Appunti di Geometria Algebrica B

Giacomo Mezzedimi

29 luglio 2017

Indice

Introduzione

Questi appunti nascono durante il secondo semestre dell'anno accademico 2016/2017, periodo nel quale io ho seguito il corso del professor Manfredini; seguono abbastanza fedelmente le lezioni tenute dal professore, e ricoprono gran parte dei primi due capitoli del libro "*Principles of Algebraic Geometry*" di Griffiths e Harris.
Queste pagine potrebbero essere benissimo piene di errori, matematici e non; chiedo perciò a chiunque le usi di segnalarmeli, ad esempio per mail a *mezzedimi@mail.dm.unipi.it*.
Questi appunti si trovano sulla mia pagina web *http://poisson.phc.unipi.it/~mezzedimi/*.

Giacomo Mezzedimi

1 Fasci e prefasci

1.1 Fasci di germi di funzioni

Sia X uno spazio topologico e Y un insieme qualunque.

Definizione 1.1.1. Sia $p \in X$. La **spiga dei germi** in p delle applicazioni da X in Y è l'insieme quoziente $(\mathscr{F}_{X,Y})_p = \{(U, f) \mid U \subseteq X \text{ aperto}, \, p \in U, \; f : U \to Y\}/ \sim_p$, dove $(U.f) \sim_p (V, g)$ se esiste un aperto $W \subseteq U \cap V$ in X che contenga p e tale che le restrizioni $f_{|W}$ e $g_{|W}$ coincidano su W. La classe $[(U, f)]_{\sim_p}$ è denotata f_p ed è chiamata **germe** di f in p.
Inoltre $\mathscr{F}_{X,Y} = \bigcup_{p \in X} (\mathscr{F}_{X,Y})_p$ è detto **fascio dei germi di applicazioni** da X a Y e π : $\mathscr{F}_{X,Y} \to X$ tale che $\pi((\mathscr{F}_{X,Y})_p) = \{p\}$ è detta **proiezione** del fascio.

Vogliamo dotare il fascio $\mathscr{F}_{X,Y}$ di una topologia; la prossima definizione costruisce una base di aperti per tale fascio.

Definizione 1.1.2. Sia $U \subseteq X$ aperto, $f : U \to Y$. Definiamo $\mathscr{A}_{U,f} = \bigcup_{p \in U} f_p$. Chiaramente la proiezione π mappa $\mathscr{A}_{U,f}$ in U, e la restrizione $\pi_{|\mathscr{A}_{U,f}}$ è biunivoca; inoltre tali $\mathscr{A}_{U,f}$ intersecano le spighe in al massimo un punto (che è f_p se $p \in U$). Poniamo dunque su $\mathscr{F}_{X,Y}$ la topologia data dalla base di aperti $\mathscr{A}_{U,f}$ al variare di $U \subseteq X$ aperto e $f : U \to Y$.

Richiamiamo brevemente il concetto di omeomorfismo locale, che ci servirà lungo tutta la trattazione:

Definizione 1.1.3. Una mappa $\pi : Z \to X$ spazi topologici si dice **omeomorfismo locale** se, per ogni $p \in Z$, esiste un aperto $U \subseteq Z$ che contiene p tale che $\pi(U)$ è aperto in X e $\pi_{|U} : U \to \pi(U)$ è un omeomorfismo.

Un omeomorfismo locale è continuo, aperto e gli aperti su cui π è omeomorfismo con l'immagine danno una base di aperti per la topologia.

Avendo fatto notare che gli aperti $\mathscr{A}_{U,f}$ intersecano le spighe in al massimo un punto, segue subito che le spighe assumono la topologia discreta in $\mathscr{F}_{X,Y}$. Inoltre la proiezione π è chiaramente un omeomorfismo locale.

Le definizioni date fino ad adesso sono le più generali possibili, ma quasi sempre nella pratica ci troveremo di fronte a spazi X, Y con molta più struttura, quindi viene naturale chiedersi in quali situazioni possiamo restringere l'insieme delle funzioni che consideriamo nella costruzione del fascio. Ripercorrendo le definizioni è evidente che, se la classe di funzioni che consideriamo è invariante per restrizione, allora tutta la costruzione appena descritta funziona allo stesso modo. Quindi, ad esempio, se anche Y è uno spazio topologico, possiamo considerare il fascio dei germi delle funzioni $f : U \to Y$ continue, denotato $\mathcal{C}^0_{X,Y}$; oppure, se X, Y sono varietà differenziabili (risp. complesse), possiamo considerare il fascio dei germi delle funzioni $f : U \to Y$ $\mathcal{C}^k$ (risp. olomorfe), denotato $\mathcal{C}^k_{X,Y}$ (risp. $\mathcal{O}_{X,Y}$).
Per facilità di notazione, quando lo spazio Y coinciderà con $\mathbb{C}$, lo ometteremo nel simbolo del fascio (ad esempio scriveremo $\mathcal{O}_X$ per $\mathcal{O}_{X,\mathbb{C}}$).

Un'importantissima classe di funzioni, anch'essa invariante per restrizione, che useremo spesso nel seguito è la classe delle sezioni di una mappa surgettiva $F : Y \twoheadrightarrow X$, cioè la classe delle funzioni $f : U \to Y$, con $U \subseteq X$ aperto, tali che $F \circ f = \mathrm{id}_U$. Considerando tali funzioni otteniamo il fascio $\Gamma_F = \Gamma_Y$ dei germi delle sezioni di F. Come prima, se F ha una qualche regolarità, tacitamente assumeremo che anche le sezioni abbiano la stessa regolarità.

Definizione 1.1.4. Sia $U \subseteq X$ un aperto. Una **sezione** di $\mathscr{F}_{X,Y}$ su U è una mappa $\sigma : U \to \mathscr{F}_{X,Y}$ continua tale che $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. L'insieme delle sezioni di $\mathscr{F}_{X,Y}$ su U si indica $\Gamma(U, \mathscr{F}_{X,Y})$.

Avendo definito le sezioni puntualmente, ci potremmo aspettare che esse abbiamo comportamente estremamente strani ed imprevedibili; invece la definizione delle spighe, che trasforma un'informazione puntuale in un'informazione locale, permette di classificare in modo agevole le sezioni procedendo dal puntuale al locale, e dal locale al globale.

Sia appunto $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{F}_{X,Y})$ una sezione su U e p un punto di U. $\sigma(p)$ è un germe della spiga $(\mathscr{F}_{X,Y})_p$, perciò esiste un aperto $W_p \subseteq U$ che contiene p e una funzione $f^{(p)} : W_p \to Y$ tale che $\sigma(p) = f_p^{(p)}$. D'altra parte, sull'aperto $\mathscr{A}_{W_p, f^{(p)}}$, π è invertibile, quindi su $\sigma^{-1}(\mathscr{A}_{W_p, f^{(p)}}) \subseteq W_p$, σ coincide con $(\pi_{|\mathscr{A}_{W_p, f^{(p)}}})^{-1}$. In particolare σ è un omeomorfismo locale.
Tale ragionamento ci dà un'informazione locale su σ, in quanto $\sigma(q) = f_q^{(p)}$ su tutti i punti $q \in \sigma^{-1}(\mathscr{A}_{W_p, f^{(p)}})$; ma allora esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di U, e per ogni $\alpha \in I$ esiste una funzione $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ tale che $\sigma(q) = (f_\alpha)_q$ su tutti i $q \in U_\alpha$. Inoltre queste funzioni f_α si incollano bene sulle intersezioni, perchè se $q \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $(f_\alpha)_q = \sigma(q) = (f_\beta)_q$, dunque f_α e f_β coincidono su un qualche intorno di q, e a maggior ragione coincidono in q.
Alla fine, esiste una mappa globale $F : U \to Y$ tale che $F_{|U_\alpha} = f_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$; dunque, se $p \in U_\alpha$, $F_p = (f_\alpha)_p = \sigma(p)$. Abbiamo perciò ottenuto una mappa:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathscr{F}_{X,Y}) & \longrightarrow & F_{X,Y}(U) = \{F : U \to Y\} \\ \sigma & \longmapsto & F \end{array}$$

con inversa $F \mapsto \sigma : U \to \mathscr{F}_{X,Y}$ tale che $\sigma(p) = F_p$ (e σ ha immagine $\mathscr{A}_{U,F}$). Usando il linguaggio delle categorie, abbiamo appena mostrato:

Proposizione 1.1.1. *La spiga di un fascio $\mathscr{F}_{X,Y}$ è naturalmente isomorfa (all'interno della categoria* **Set***) al limite diretto degli insiemi delle sezioni di $\mathscr{F}_{X,Y}$:*

$$(\mathscr{F}_{X,Y})_p = \varinjlim_{\substack{p \in U \subseteq X \\ U \text{ aperto}}} F_{X,Y}(U) \cong \varinjlim_{\substack{p \in U \subseteq X \\ U \text{ aperto}}} \Gamma(U, \mathscr{F}_{X,Y}).$$

1.2 Fasci e prefasci di insiemi

In questa seconda sezione cominciamo la vera e propria teoria dei fasci, andando a generalizzare in due possibili modi la costruzione del fascio dei germi di applicazioni vista nelle sezione precedente. Dove non diversamente indicato, X sarà sempre uno spazio topologico.

Definizione 1.2.1. Un **fascio** (di insiemi) su X è una coppia $(\mathscr{S}, \pi)$, dove $\mathscr{S}$ è uno spazio topologico e $\pi : \mathscr{S} \to X$ è surgettiva e un omeomorfismo locale. X si dice **base** del fascio, $\mathscr{S}$ **spazio totale** e π **proiezione**. Spesso indicheremo il fascio $(\mathscr{S}, \pi)$ semplicemente con $\mathscr{S}$.
Inoltre, se $x \in X$, $\mathscr{S}_x = \pi^{-1}(x)$ è detta **spiga** del fascio su x e i suoi elementi sono detti **germi** (su x).

<u>Esempi.</u>

- Ogni rivestimento è un fascio. Ad esempio i rivestimenti universali $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ e $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ tali che $z \mapsto e^{2\pi i z}$ sono fasci ed hanno spighe isomorfe a $\mathbb{Z}$.

- Chiaramente però esistono fasci che non sono rivestimenti. Ad esempio, se $\pi : Y \to X$ è un rivestimento di grado $d \geq 2$, e $U \subseteq Y$ è un chiuso su cui π è iniettiva, allora $Y \backslash U$ con la proiezione $\pi_{|Y \backslash U} : Y \backslash U \to X$ è ancora un fascio.

- Sia M uno spazio topologico dotato della topologia discreta. Allora $\mathscr{S} = X \times M$ è un fascio con $\pi : \mathscr{S} \to X$ la proiezione sul primo fattore, è chiamato **fascio costante** a spiga M, ed è spesso indicato semplicemente M. Chiaramente le spighe sono isomorfe a M: in particolare, $\mathscr{S}_x = \{x\} \times M$.

- Se $x_0 \in X$ è un punto chiuso, consideriamo $\mathscr{S} = X \times M/\sim$, dove $(x_1, m_1) \sim (x_2, m_2)$ se $x_1 = x_2 \neq x_0$. $\mathscr{S}$, insieme alla proiezione $\pi : \mathscr{S} \to X$ sul primo fattore, è un fascio, detto **fascio grattacielo** a spiga M e supporto in x_0, ed è denotato M_{x_0}. Una costruzione analoga può essere fatta con un numero finito di punti chiusi di X.

Così come per il fascio dei germi di applicazioni, la proiezione π è continua ed aperta, mentre le spighe $\mathscr{S}_x$ hanno la topologia discreta. Da queste semplici osservazioni segue che la spiga $\mathscr{S}_x$ su x è chiusa in $\mathscr{S}$ se e solo se $\{x\}$ è chiuso in X. Perciò tutte le spighe sono chiuse se e solo se la base X del fascio è T1.

Definizione 1.2.2. $(\mathscr{S}, \pi)$, $(\mathscr{S}', \pi')$ fasci su X. Un **morfismo di fasci** su X è una mappa $F : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ continua tale che $\pi = \pi' \circ F$, cioè che fa commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathscr{S}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Preso $x \in X$, F mappa la spiga $\mathscr{S}_x$ nella spiga $\mathscr{S}'_x$, dunque F induce una mappa $F_x : \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}'_x$ fra le spighe. F si dice **isomorfismo** di fasci se è invertibile.

Osservazione. F è un omeomorfismo locale; in particolare è aperta, e $\mathrm{Im}(F) \subseteq \mathscr{S}'$ è aperto. Inoltre F è un isomorfismo se è un omeomorfismo.

Definizione 1.2.3. $(\mathscr{S}, \pi)$ fascio su X, $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ aperto. $\mathscr{S}'$ si dice **sottofascio** di $\mathscr{S}$ se $(\mathscr{S}', \pi_{|\mathscr{S}'})$ è ancora un fascio (cioè se $\pi(\mathscr{S}') = X$).

Esempi.
- Se $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ è un sottofascio, allora l'inclusione $i : \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{S}$ è un morfismo di fasci.

- Se $f : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ è un morfismo di fasci, $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathscr{S}'$ è un sottofascio.

- La proiezione $p : M \to M_{x_0}$, dove M indica il fascio costante e M_{x_0} il fascio grattacielo, è un morfismo di fasci.

Definizione 1.2.4. $(\mathscr{S}, \pi)$ fascio su X, $Y \subseteq X$. La **restrizione** di $\mathscr{S}$ a Y è il fascio $\mathscr{S}_{|Y} = \pi^{-1}(Y)$ con la stessa proiezione π.

Esempi.
- Sia $\pi : Y \to X$ è un rivestimento di grado $d \geq 2$, e $U \subseteq Y$ è un chiuso su cui π è iniettiva. Allora $Y \backslash U \subseteq Y$ è una restrizione.

- L'Exp reale è restrizione dell'Exp complesso.

Dopo aver definito la struttura di base dei fasci, riprendiamo e generalizziamo la teoria delle sezioni già vista precedentemente per il fascio dei germi di funzioni.

Definizione 1.2.5. $(\mathscr{S}, \pi)$ fascio su X, $U \subseteq X$ aperto. $\sigma : U \to \mathscr{S}$ si dice **sezione** di π (o di $\mathscr{S}$) su U se è continua e $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. L'insieme delle sezioni di $\mathscr{S}$ su U si indica con $\Gamma(U, S)$.

Come avevamo già osservato nel caso del fascio dei germi di funzioni, le sezioni sono iniettive, coincidono localmente con π^{-1} (e dunque $\sigma(x) \in \mathscr{S}_x$ per ogni $x \in U$), sono omeomorfismi locali, esistono sempre sezioni su aperti sufficientemente piccoli e ogni $p \in \mathscr{S}$ è immagine di una qualche sezione. Infine le immagini delle sezioni danno una base per la topologia di $\mathscr{S}$.

Sia $F : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ un morfismo fra fasci su X. Se $U \subseteq X$ è aperto e σ è sezione di $\mathscr{S}$ su U, allora $F \circ \sigma$ è sezione di $\mathscr{S}'$ su U; dunque esiste una mappa:

$$\begin{array}{rccc} F_U : & \Gamma(U, \mathscr{S}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathscr{S}') \\ & \sigma & \longmapsto & F \circ \sigma \end{array}$$

Se F è un isomorfismo, chiaramente F_U è biunivoca.

Esempi.

- Consideriamo il fascio $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to S^1$. Se $\emptyset \neq U \subsetneq S^1$ è connesso, la teoria di base dei rivestimenti ci dice che $\Gamma(U, \mathrm{Exp}) = \mathbb{Z}$. D'altra parte non esistono sollevamenti globali, dunque $\Gamma(S^1, \mathrm{Exp}) = \emptyset$.

- Consideriamo $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Se $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}^*$ è un aperto connesso tale che $i_*(\pi_1(U)) = \{0\} \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*)$, con $i : U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ l'inclusione, allora esistono sezioni su U e sono esattamente le determinazioni del logaritmo complesso; quindi $\Gamma(U, \mathrm{Exp}) = \mathbb{Z}$. Invece, $\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathrm{Exp}) = \emptyset$.

- Sia M il fascio costante, e $\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto connesso. Allora evidentemente $\Gamma(U, M) = M$. Se invece U non è connesso, abbiamo che $\Gamma(U, M) = \{\sigma : U \to M \text{ loc. costanti}\}$. Ad esempio, se U ha le componenti connesse aperte, allora $\Gamma(U, M) = M^{\mathcal{C}}$, dove $\mathcal{C}$ è l'insieme delle componenti connesse di U.

- Sia M_{x_0} il fascio grattacielo. Se $\emptyset \neq U \subseteq X$ è aperto, allora $\Gamma(U, M_{x_0}) = \{pt\}$ se $x_0 \notin U$, mentre $\Gamma(U, M_{x_0}) = M$ se $x_0 \in U$.

Definizione 1.2.6. $\mathscr{S}$ fascio su X, $U \subseteq X$ aperto, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathscr{S})$. Poniamo $Z_{\sigma_1, \sigma_2} = \{p \in U \mid \sigma_1(p) = \sigma_2(p)\}$.

Sappiamo che un insieme di questo tipo è chiuso se lo spazio $\mathscr{S}$ è T2. Però, in questo caso, possiamo dire che tale insieme Z_{σ_1, σ_2} è sempre aperto. Infatti, se $y = \sigma_1(x) = \sigma_2(x) \in \mathscr{S}_x$, esiste un intorno V di y su cui π è omeomorfismo su $\pi(V)$; su $\sigma_1^{-1}(V) \cap \sigma_2^{-1}(V)$, che è aperto e non vuoto, σ_1 e σ_2 coincidono con $(\pi_{|V})^{-1}$.
Dunque, se $\mathscr{S}$ è T2, vale il principio di identità per le sezioni, cioè se due sezioni coincidono su un punto p, allora coincidono su tutta la componente connessa di p in U. La prossima proposizione mostra che, con una piccola ipotesi aggiuntiva, vale anche il viceversa:

Proposizione 1.2.1. *Sia X T2. Allora $\mathscr{S}$ è T2 se e solo se vale il principio di identità per sezioni di $\mathscr{S}$.*

Dimostrazione. Un'implicazione è già stata vista. Per l'altra, siano $s_1 \neq s_2 \in \mathscr{S}$. Se s_1, s_2 stanno in spighe diverse, allora, presi intorni aperti disgiunti U_1, U_2 rispettivamente di $\pi(s_1)$ e $\pi(s_2)$, gli aperti $\pi^{-1}(U_1)$ e $\pi^{-1}(U_2)$ separano s_1 e s_2. Se invece s_1, s_2 stanno nella stessa spiga $\mathscr{S}_p$, allora consideriamo due sezioni $\sigma_1 \in \Gamma(U_1, \mathscr{S})$ e $\sigma_2 \in \Gamma(U_2, \mathscr{S})$, con U_1, U_2 intorni aperti di p. Scelto $U \subseteq U_1 \cap U_2$ intorno aperto connesso di p, consideriamo $\sigma_1(U)$ e $\sigma_2(U)$, che sono intorni aperti rispettivamente di s_1 e s_2. Se per assurdo si intersecassero, sia $x \in \sigma_1(U) \cap \sigma_2(U)$. Visto che localmente σ_1 e σ_2 coincidono con π^{-1}, allora $\sigma_1^{-1}(x) = \sigma_2^{-1}(x) = \pi(x)$; ma questo significa che σ_1 e σ_2 coincidono su un punto, perciò coincidono su tutto U, e in particolare $s_1 = \sigma_1(p) = \sigma_2(p) = s_2$, assurdo. □

Esempi.

- Consideriamo il fascio $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$. Ogni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua dà una sezione globale $\sigma_f : \mathbb{R} \to \mathcal{C}^0_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$ tale che $x \mapsto f_x$. Se $f_1 \equiv 0$ e $f_2 = x - |x|$, allora le sezioni σ_{f_1} e σ_{f_2} coincidono su $\mathbb{R}^+$ ma non su $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, dunque il fascio $\mathcal{C}^0_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$ non è T2.

- In modo simile si vede che nessuno dei fasci $\mathcal{C}^k_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$ è T2.
- I fasci $\mathcal{C}^\omega_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$ delle funzioni analitiche su $\mathbb{R}$ e $\mathcal{O}_\Omega$ delle funzioni olomorfe su $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso sono T2 (in quanto le sezioni di tali fasci sono indotte da mappe globali, e due funzioni analitiche o olomorfe con lo stesso germe sono uguali su ogni componente connessa).

Sia $(\mathscr{S}, \pi)$ un fascio su X, e consideriamo il fascio (Γ_π, π') dei germi delle sezioni di π. Definiamo una mappa $\varphi : \mathscr{S} \to \Gamma_\pi$ tale che, se $s \in \mathscr{S}$ e $x = \pi(s)$, preso $U_s \subseteq X$ aperto contenente x e presa $\sigma_s \in \Gamma(U_s, \mathscr{S})$ sezione su U_s, vale $\varphi(s) = [(U_s, \sigma_s)]_{\sim_x}$. Tale mappa è ben definita, in quanto σ_s localmente coincide con π^{-1}, e soddisfa la commutatività $\pi = \pi' \circ \varphi$. D'altra parte è anche continua, perchè, presi $U \subseteq X$ aperto e $\sigma \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, l'aperto $\mathscr{A}_{U,\sigma} = \{\sigma_x \mid x \in U\}$ della base per la topologia di Γ_π ha controimmagine tramite φ coincidente con $\mathrm{Im}(\sigma_{|U})$, che è aperto perchè σ è un omeomorfismo locale. Infine, il morfismo di fasci $\varphi^{-1} : \Gamma_\pi \to \mathscr{S}$ tale che $[(U, \sigma)]_{\sim_x} \mapsto \sigma(x)$ è l'inverso di φ; dunque abbiamo mostrato:

Proposizione 1.2.2. *I fasci $\mathscr{S}$ e Γ_π sono isomorfi. Quindi $\mathscr{S}$ (con la sua topologia) è completamente determinato dalle sue sezioni:*

$$\mathscr{S}_x \cong \varinjlim_{x \in U \subseteq X} \Gamma(U, \mathscr{S}).$$

Effettuata questa costruzione "topologica" di un generico fascio, occupiamoci adesso di definire la stessa struttura in modo "algebrico", sfruttando il linguaggio della teoria delle categorie.

Definizione 1.2.7. Un **prefascio** S (di insiemi) su X è il dato da:

1. Per ogni $U \subseteq X$ aperto esiste un insieme $S(U)$, con l'unica proprietà che $S(\emptyset) = \emptyset$;
2. Per ogni $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ aperti, esiste una restrizione $\rho^U_V : S(U) \to S(V)$ tale che:
   - $\rho^U_U = \mathrm{id}_U$ per ogni $\emptyset \neq U \subseteq X$ aperto;
   - $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$ per ogni $\emptyset \neq W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ aperti.

In termini categoriali, sia $\mathbf{Top}(X)$ la categoria i cui oggetti sono gli aperti di X e i morfismi sono le inclusioni; allora un prefascio su X è semplicemente un funtore controvariante $S : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{Set}$.

Per chiarezza di notazione, indicheremo sempre i fasci con le lettere corsive e i prefasci con quelle maiuscole.

Prima di cominciare a definire la restante struttura dei prefasci, soffermiamoci su un dettaglio che spesso ignoreremo, ma che è conveniente sottolineare fin da subito. L'oggetto $\emptyset \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, detto **terminale** o **iniziale** a seconda del contesto, è tale che, per ogni $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, esiste un unico morfismo $\emptyset \to A$ (che chiameremo $\mathrm{id}_\emptyset$ o semplicemente id), mentre, se $A \neq \emptyset$, non esistono morfismi $A \to \emptyset$. In particolare, se S è un prefascio e $S(V) \neq \emptyset$, allora anche $S(U) \neq \emptyset$ per ogni $U \supseteq V$ aperto. Questo osservazione porta naturalmente alla seguente definizione:

Definizione 1.2.8. S prefascio su X. Il **supporto insiemistico** di S è $\mathrm{SetSupp}(S) = \{x \in X \mid \exists U \subseteq X \text{ aperto}, x \in U, \text{ t.c. } S(U) \neq \emptyset\} = \bigcup_{S(U) \neq \emptyset} U$.

<u>*Esempi.*</u>
- Il funtore $F_{X,Y}$ tale che $F_{X,Y}(U) = \{f : U \to Y\}$, dotato delle usuali restrizioni $\rho^U_V : F_{X,Y}(U) \to F_{X,Y}(V)$ è un prefascio. Vale un discorso analogo a quello fatto per i fasci, e cioè si possono ridurre gli insiemi $F_{X,Y}(U)$, purchè rimangano invarianti per le restrizioni; sono dunque prefasci $\Gamma(\mathscr{S}) : U \to \Gamma(U, \mathscr{S})$, con $\mathscr{S}$ fascio su X, $C^k_X : U \to \{f : U \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$, $O_X : U \to \{f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfa}\}$, ${C^k_X}^* : U \to \{f : U \to \mathbb{C} \text{ continua mai nulla}\}$ e $O^*_X : U \to \{f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfa mai nulla}\}$.

- Se X è una varietà differenziabile, $A^p : U \to \{p\text{-forme diff. su } U \text{ a valori in } \mathbb{C}\}$ è un prefascio; sono prefasci anche Z^p e B^p, rispettivamente i prefasci delle forme chiuse e delle forme esatte. Infine anche $H^p : U \to \frac{Z^p(U)}{B^p(U)}$, detta **coomologia p-esima di De Rham**, è un prefascio.

- Se $M \neq \emptyset$, il **prefascio costante** a valori in M è il funtore S tale che $S(U) = M$ per tutti gli aperti $\emptyset \neq U \subseteq X$, dotato della restrizione id_M.

- Il **prefascio grattacielo** a valori in M e supporto $x_0 \in X$ chiuso, è il funtore S tale che $S(U) = M$ se $x_0 \in U$, mentre $S(U) = \{\overline{m}\}$ se $x_0 \in M$, dove $\overline{m} \in M$ è un elemento prefissato, con le restrizioni id_M e la costante su $\{\overline{m}\}$.

Definizione 1.2.9. Siano S, S' prefasci su X. Un **morfismo di prefasci** su X è una mappa $\phi : S \to S'$ data da:

1. Per ogni $U \subseteq X$ esiste una mappa $\phi_U : S(U) \to S'(U)$;

2. Dati $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq X$ aperti, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} S(U) & \xrightarrow{\phi_U} & S'(U) \\ {\scriptstyle \rho^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'^U_V} \\ S(V) & \xrightarrow[\phi_V]{} & S'(V) \end{array}$$

   commuta.

Sempre in termini categoriali, un morfismo fra due prefasci S, S' è una trasformazione naturale dei funtori controvarianti S e S'.

Definizione 1.2.10. S, S' prefasci su X. S' si dice **sottoprefascio** di S se, per ogni $U \subseteq X$ aperto, $S'(U) \subseteq S(U)$ e $\rho'^U_V = \rho^U_{V|S'(U)}$.

Adesso vogliamo specificare in che modo si può passare dalla costruzione topologica dei fasci a quella algebrica dei prefasci e viceversa; per farlo, consideriamo un prefascio S su X. Ad esso possiamo associare il **fascio dei germi di** S $\mathscr{S}$ su $\mathrm{SetSupp}(S)$, le cui spighe sono:

$$\mathscr{S}_p = \varinjlim_{p \in U \subseteq X} S(U) = \{(U, s) \mid p \in U \subseteq X,\ S(U) \neq \emptyset,\ s \in S(U)\} / \sim_p,$$

dove $(U, s) \sim_p (U', s')$ se esiste un aperto $W \subseteq U \cap U'$ che contiene p tale che $\rho^U_W(s) = \rho^{U'}_W(s')$. Come al solito il germe $[(U, s)]_{\sim_p}$ si indica con s_p e il fascio $\mathscr{S}$, coincidente con l'unione $\bigcup_{p \in \mathrm{SetSupp}(S)} \mathscr{S}_p$, è dotato della proiezione π tale che $\pi(\mathscr{S}_p) = \{p\}$. Tale proiezione diventa un omeomorfismo locale ponendo su $\mathscr{S}$ la solita topologia, generata dalla base di aperti $\mathscr{A}_{U,s} = \{s_p \mid p \in U\}$, al variare di $U \subseteq X$ aperto e $s \in S(U)$; chiaramente per $\mathscr{S}$ valgono tutte le proprietà dei fasci dei germi di funzioni viste nella sezione precedente.
Questo processo, che da un prefascio S ottiene un fascio $\mathscr{S}$, è detto di **fascificazione**, e il fascio $\mathscr{S}$ è indicato con $\mathrm{Sheaf}(S)$. Una sorta di processo inverso consiste nel considerare, dato un fascio $\mathscr{S}$, il prefascio $\Gamma(\mathscr{S})$ delle sezioni di $\mathscr{S}$.
Abbiamo già visto che $\mathrm{Sheaf}(\Gamma(\mathscr{S})) \cong \mathscr{S}$ per ogni fascio $\mathscr{S}$; inoltre esiste sempre un morfismo di prefasci su X $i : S \to \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S))$ tale che, per ogni aperto $U \subseteq X$, si ha la mappa:

$$\begin{array}{rccc} i_U : & S(U) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) \\ & s & \longmapsto & \begin{array}{rccc} \sigma : & U & \to & \mathrm{Sheaf}(S) \\ & x & \mapsto & s_x \end{array} \end{array}$$

Dalla definizione si ha che i è un isomorfismo se tutte le i_U sono biunivoche. In generale, però, non è vero che $\Gamma(\mathrm{Sheaf}(S)) \cong S$; se questo isomorfismo vale, si dice che il prefascio S è **canonico**. I prossimi esempi illustrano i motivi principali per cui l'isomorfismo può non valere.

Esempi.

- Sia S il prefascio su X tale che $S(X) = \{0, 1\}$ e $S(U) = \{0\}$ per ogni U aperto non vuoto, con le restrizioni ovvie. Le spighe in ogni punto sono banalmente $\{0\}$, quindi $\mathrm{Sheaf}(S) \cong X$ e $\Gamma(X, \mathrm{Sheaf}(S)) = \{0\} \neq S(X)$.
  In questo esempio il prefascio non è canonico perchè le sezioni globali 0 e 1 sono diverse ma uguali in ogni germe.

- Sia S il prefascio costante a valori in M, con M che contiene almeno due elementi. Le spighe in ogni punto di $\mathrm{Sheaf}(S)$ sono isomorfe a M, quindi $\mathrm{Sheaf}(S)$ è il fascio costante a spiga M. Da questo si deduce subito che in generale $\Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) \neq S(U)$, in quanto il primo è l'insieme delle sezioni localmente costanti, mentre il secondo è l'insieme delle sezioni costanti.
  In questo esempio il prefascio non è canonico perchè in generale sezioni localmente compatibili non si incollano a una sezione globale.

- Invece il prefascio grattacielo S a valori in M e supporto $x_0 \in X$ chiuso è canonico. Infatti la spiga di $\mathrm{Sheaf}(S)$ in x è M se $x = x_0$, mentre è un fissato $\overline{m} \in M$ se $x \neq x_0$; dunque $\mathrm{Sheaf}(S)$ è il fascio grattacielo a spiga M e supporto x_0. Quindi si ottiene che $\Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S)) = S(U)$ per ogni aperto U, in quanto entrambi coincidono con M se $x_0 \in U$ e con $\{pt\}$ se $x_0 \notin U$.

Il prossimo teorema, che caratterizza completamente i prefasci canonici, mostra in effetti che le due situazioni descritte sopra sono tutte e sole quelle che impediscono a un prefascio di essere canonico:

Teorema 1.2.3. *Il prefascio S è canonico se e solo se:*

S1) Elementi localmente uguali di $S(U)$ sono uguali, cioè, se $s, t \in S(U)$ sono tali per cui esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di U su cui le restrizioni $\rho^U_{U_\alpha}(s)$ e $\rho^U_{U_\alpha}(t)$ coincidono per ogni $\alpha \in I$, allora s e t sono uguali;

S2) Dati localmente compatibili si incollano globalmente, cioè, se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento aperto di U e $s_\alpha \in S(U_\alpha)$ per ogni $\alpha \in I$ tali che le restrizioni $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(S_\alpha)$ e $\rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(S_\beta)$ coincidono per ogni coppia di U_α, U_β con intersezione non vuota, allora esiste $s \in S(U)$ tale che la restrizione $\rho^U_{U_\alpha}$ è proprio s_α per ogni $\alpha \in I$.

Osservazione. Grazie alla condizione S1, la $s \in S(U)$ globale in S2 è necessariamente unica.

Dimostrazione. $\Rightarrow$) $S \cong \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S))$ e quest'ultimo è un fascio di germi di funzioni, per cui S1 e S2 sono banalmente vere.

$\Leftarrow$) Mostriamo che la $i : U \to \Gamma(\mathrm{Sheaf}(S))$ definita precedentemente è un isomorfismo, cioè che $i_U : S(U) \to \Gamma(U, \mathrm{Sheaf}(S))$ è biunivoca per ogni U aperto non vuoto. Per l'iniettività, siano $s, t \in S(U)$ tali che $i_U(s) = i_U(t)$. Allora, per ogni $x \in U$, i germi s_x e t_x coincidono, cioè esiste un aperto $U_x \subseteq U$ contenente x tale che $\rho^U_{U_x}(s) = rho^U_{U_x}(t)$. Gli $\{U_x\}$ formano un ricoprimento aperto di U, quindi per S1 s e t sono uguali.
Per la surgettività, invece, sia σ una sezione di $\mathrm{Sheaf}(S)$ su U. Per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U_x \subseteq U$ contenente x e una $s^{(x)} \in S(U_x)$ tale che, per ogni $y \in U_x$, $\sigma(y) = s^{(x)}_y$; nell'intersezione $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, $t_1 = \rho^{U_{x_1}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{(x_1)})$ e $t_2 = \rho^{U_{x_2}}_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}(s^{(x_2)})$ coincidono, in quanto, per ogni $z \in U_{x_1} \cap U_{x_2}$, i germi $(t_1)_z = s^{(x_1)}_z$ e $(t_2)_z = s^{(x_2)}_z$ coincidono con $\sigma(z)$. D'altra parte, la condizione S2 ci dà una $s \in S(U)$ globale tale che la restrizione $\rho^U_{U_x}(s)$ coincide con $s^{(x)}$ per ogni $x \in U$, da cui $s_x = s^{(x)}_x = \sigma(x)$ per ogni $x \in U$, cioè $\sigma = i_U(s)$. □

Come ultima cosa osserviamo che il passaggio da prefascio a fascio (e viceversa) comporta naturalmente un passaggio da morfismo di prefasci a morfismo di fasci (e viceversa): se $F : S \to S'$ è un morfismo di prefasci, esso induce un morfismo di fasci $f : \mathrm{Sheaf}(S) \to \mathrm{Sheaf}(S')$ tale che, se $y \in \mathrm{Sheaf}(S)$ è il germe $[(U, s)]_{\sim_x}$ per un certo $U \subseteq X$ aperto contenente $x = \pi(y)$ e un certo $s \in S(U)$, allora $f(y) = (F_U(s))_x$. É facile vedere che f risulta continua.
Viceversa, un morfismo $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ di fasci induce un morfismo di prefasci $\phi : \Gamma(\mathscr{S}) \to \Gamma(\mathscr{S}')$ semplicemente per composizione.

1.3 Fasci e prefasci con struttura

Finalmente siamo pronti a definire il contesto che più ci servirà in seguito. Nella sezione precedente abbiamo studiato fasci e prefasci su insiemi, cioè senza nessuna particolare struttura algebrica; adesso vediamo come le classiche strutture di base (di gruppo, di anello, di K-algebre,...) si inseriscono nel contesto della teoria dei fasci.

Definizione 1.3.1. Siano $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ fasci su X. Il **prodotto fibrato** di $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ è lo spazio $\mathscr{S} \times_X \mathscr{S}' = \{(s, s') \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}' \mid \pi(s) = \pi'(s')\}$ con la topologia prodotto.

Il prodotto fibrato $\mathscr{S} \times_X \mathscr{S}'$ risulta essere un fascio con l'ovvia proiezione $\pi_X : \mathscr{S} \times_X \mathscr{S}' \to X$ tale che $\pi_X(s, s') = \pi(s) = \pi'(s')$. Inoltre π_X è un omeomorfismo sugli aperti $U \times_X U' = (U \times U') \cap (\mathscr{S} \times_X \mathscr{S}')$, dove U, U' sono aperti rispettivamente di $\mathscr{S}, \mathscr{S}'$ su cui π, π' sono omeomorfismi e $\pi(U) = \pi'(U')$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S} \times_X \mathscr{S}' \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_X"] & \mathscr{S} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathscr{S}' \arrow[r, "\pi'"'] & X \end{tikzcd}$$

Infine le spighe $(\mathscr{S} \times_X \mathscr{S}')_x$ del prodotto fibrato non sono altro che il prodotto cartesiano $\mathscr{S}_x \times \mathscr{S}'_x$ delle relative spighe di $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$.

Definizione 1.3.2. Un **fascio di gruppi abeliani** su X è un fascio $\mathscr{S}$ su X tale che ogni spiga $\mathscr{S}_x$ è un gruppo abeliano e la somma $+ : \mathscr{S} \times_X \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ (tale che $+(s, t) = s + t$) è un morfismo di fasci.

In tal caso, la sezione nulla che associa ad ogni $x \in X$ il germe $0_x \in \mathscr{S}_x$ è effettivamente una sezione, in quanto è continua perchè localmente $0 = +(s, -s)$. In modo simile si definisce:

Definizione 1.3.3. Un **fascio di anelli** su X è un fascio $\mathscr{S}$ su X tale che ogni spiga $\mathscr{S}_x$ è un anello, la somma $+ : \mathscr{S} \times_X \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ è un morfismo di fasci, il prodotto $\cdot : \mathscr{S} \times_X \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ (tale che $\cdot(s, t) = st$) è un morfismo di fasci e la mappa $1 : X \to \mathscr{S}$ che associa ad ogni $x \in X$ il germe $1_x \in \mathscr{S}_x$ è una sezione.

In questo caso richiedere che la sezione 1 sia effettivamente una sezione è una richiesta non vuota, perchè negli anelli non esistono gli inversi rispetto alla moltiplicazione. In generale possiamo definire:

Definizione 1.3.4. Data una categoria $\mathcal{S}$ di una struttura algebrica, un **fascio di oggetti di $\mathcal{S}$** su X è un fascio $\mathscr{S}$ su X tale che ogni spiga $\mathscr{S}_x$ è un oggetto di $\mathcal{S}$, ogni operazione $* : \mathscr{S} \times_X \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ interna agli oggetti di $\mathcal{S}$ è un morfismo di fasci e, posto e_* l'elemento neutro rispetto a $*$, la mappa $e_* : X \to \mathscr{S}$ che associa ad ogni $x \in X$ il germe $(e_*)_x \in \mathscr{S}_x$ è una sezione.

Da queste definizioni osserviamo subito che, se $\mathscr{S}$ è un fascio con struttura, $\mathscr{S}$ ammette sempre una sezione su ogni aperto $U \subseteq X$ non vuoto.
Come al solito, trasliamo le definizioni per i fasci nel contesto dei prefasci:

Definizione 1.3.5. Data una categoria $\mathcal{S}$ di una struttura algebrica, un **prefascio di oggetti di** $\mathcal{S}$ su X è un funtore controvariante $S : \mathbf{Top}(X) \to \mathcal{S}$. Ad esempio, un **prefascio di gruppi abeliani** su X è un prefascio S su X tale che $S(U)$ è un gruppo abeliano per ogni $U \subseteq X$ aperto e, per ogni $V \subseteq U \subseteq X$ non vuoti, la restrizione $\rho_V^U : S(U) \to S(V)$ è un omomorfismo di gruppi abeliani.

Analogamente a sopra, osserviamo che nelle categorie $\mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, ...$ di strutture algebriche, l'elemento terminale non è l'insieme vuoto, ma $\{0\}$, quindi imponiamo che un prefascio S soddisfi $S(\emptyset) = \{0\}$. Perciò il supporto insiemistico di un qualunque prefascio con strutttura coincide con X.

Esempi. Se X è una varietà complessa, $\mathcal{O}_X$ e O_X sono un fascio e un prefascio di $\mathbb{C}$-algebre. Invece $\mathcal{O}_X^*$ e O_X^* sono un fascio e un prefascio di gruppi abeliani con la moltiplicazione.

Come ci possiamo aspettare, le operazioni Γ e Sheaf mantengono la struttura passando da fascio a prefascio e viceversa. Per semplicità lo facciamo vedere nel caso di fasci e prefasci di gruppi abeliani. Se S è un prefascio di gruppi abeliani su X, sulle spighe di $\mathrm{Sheaf}(S)$ possiamo definire la somma $[(U,s)]_{\sim_p} + [(V,t)]_{\sim_p} = [(U \cap V, \rho_{U\cap V}^U(s) + \rho_{U\cap V}^V(t))]_{\sim_p}$ e non è difficile verificare che la somma $+ : \mathrm{Sheaf}(S) \times_X \mathrm{Sheaf}(S) \to \mathrm{Sheaf}(S)$ è continua.
Viceversa, se $\mathscr{S}$ è un fascio di gruppi abeliani su X, l'insieme $\Gamma(U, \mathscr{S})$ delle sezioni su U è un gruppo abeliano per ogni aperto U: 0 è per definizione una sezione, se σ è una sezione, anche $-\sigma$ lo è perchè localmente coincide con $+(0, -\sigma)$, e, se σ_1, σ_2 sono sezioni su U, $\sigma_1+\sigma_2 = \sigma_2+\sigma_1$ è ancora una sezione perchè localmente coincide con $+(\sigma_1, \sigma_2) = +(\sigma_2, \sigma_1)$.

Definizione 1.3.6. $Y \subseteq X$, $\mathscr{S}$ fascio di gruppi abeliani su Y. L'**estensione a 0** di $\mathscr{S}$ è il fascio $\mathscr{S}'$ di gruppi abeliani su X associato al prefascio tale che $U \mapsto \Gamma(U \cap Y, \mathscr{S}) \cup \{0\}$ per ogni aperto $U \subseteq X$.

Ovviamente le spighe di $\mathscr{S}'$ e $\mathscr{S}$ nei punti di Y sono uguali, mentre le spighe di $\mathscr{S}'$ sono banali (cioè uguali a $\{0\}$) nei punti fuori dalla chiusura $\overline{Y}$ di Y in X. In generale non possiamo dire niente sulle spighe $\mathscr{S}'_x$ per $x \in \overline{Y} \backslash Y$.

Definizione 1.3.7. Data una categoria $\mathcal{S}$ di una struttura algebrica, un **morfismo di prefasci di oggetti di** $\mathcal{S}$ su X è un morfismo $F : S \to S'$ di prefasci di oggetti di $\mathcal{S}$ su X tale che $F_U : S(U) \to S'(U) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{S}}(S(U), S'(U))$ è un morfismo della categoria $\mathcal{S}$ per ogni aperto $U \subseteq X$.

Definizione 1.3.8. Data una categoria $\mathcal{S}$ di una struttura algebrica, un **morfismo di fasci di oggetti di** $\mathcal{S}$ su X è un morfismo $f : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ di fasci di oggetti di $\mathcal{S}$ su X tale che $f_x : \mathscr{S}_x \to \mathscr{S}'_x \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{S}}(\mathscr{S}_x, \mathscr{S}'_x)$ è un morfismo della categoria $\mathcal{S}$ per ogni $x \in X$.

Non è difficile verificare che il morfismo di fasci indotto da un morfismo di prefasci di oggetti di $\mathcal{S}$ è un morfismo di fasci di oggetti di $\mathcal{S}$ e viceversa.

Esempio. X varietà complessa. Allora $\mathrm{Exp} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ tale che $f_x \mapsto e^{2\pi i f_x}$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani su X.

Definizione 1.3.9. Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ è detto **fascio nucleo**. In modo analogo si definisce il **fascio immagine** $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ è un sottofascio di $\mathscr{S}$, in quanto è aperto perchè coincide con $\varphi^{-1}(0(X))$, dove $0 : X \to \mathscr{S}'$ è la sezione nulla. Allo stesso modo $\mathrm{Im}(\varphi)$ è un sottofascio di $\mathscr{S}'$, in quanto φ è aperta.
Un modo alternativo di definire $\mathrm{Ker}(\varphi)$ è come il fascio associatto al prefascio (canonico) $U \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi_U : \Gamma(U, \mathscr{S}) \to \Gamma(U, \mathscr{S}'))$.

Esempio. Se $\mathrm{Exp} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ è il morfismo definito sopra, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Exp})$ è il fascio costante $\mathbb{Z}$.

Definizione 1.3.10. Una successione di fasci di gruppi abeliani su X e morfismi di fasci

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{S}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathscr{S}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{S}_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$$

si dice **complesso di fasci** se $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.
Equivalentemente, la precedente successione è un complesso di fasci se le successioni delle spighe

$$\cdots \longrightarrow (\mathscr{S}_{i-1})_x \xrightarrow{(\varphi_{i-1})_x} (\mathscr{S}_i)_x \xrightarrow{(\varphi_i)_x} (\mathscr{S}_{i+1})_x \xrightarrow{(\varphi_{i+1})_x} \cdots$$

sono tutte complessi di gruppi abeliani.
Infine, la successione di fasci si dice **esatta** se $\mathrm{Im}(\varphi_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$.

Esempi.

- Se $\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani su X, allora la successione

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow \mathscr{S} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$

  è esatta.

- La successione di fasci di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1$$

  è esatta. Infatti l'unica cosa da verificare è la surgettività di Exp, ma è facile vederla sapendo che esistono sempre determinazioni del logaritmo complesso su aperti sufficientemente piccoli.

- X varietà complessa, $V \subseteq X$ sottovarietà complessa. Detto I_V il fascio dei germi di funzioni olomorfe su X e nulle su V, si ha una successione esatta

$$0 \longrightarrow I_V \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{r} \mathcal{O}_V \longrightarrow 0,$$

  dove r è la restrizione e $\mathcal{O}_V$ è esteso a 0 a fascio su X. r è surgettiva perchè, preso $f_x \in \mathcal{O}_V$ e due intorni $U_1 \subseteq U_2$ rispettivamente di V e X contenenti x tali che l'inclusione $U_1 \hookrightarrow U_2$ sia l'inclusione $\mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ in carta, posso estendere tale $f_x = [(U_1, f)]_{\sim_x} \in \mathcal{O}_V$ a un germe $f_x = [(U_2, f)]_{\sim_x} \in \mathcal{O}_X$ semplicemente ponendo a 0 le ultime $n-k$ coordinate.

- Sia X una varietà reale. Detto $\mathscr{A}_X^p$ il fascio dei germi di p-forme su X, abbiamo che la successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \mathscr{A}_X^1 \xrightarrow{d} \mathscr{A}_X^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

  è esatta, in quanto, per il teorema di Poincarè, le p-forme chiuse sono localmente esatte. Analogamente, se X è una varietà complessa e $\mathscr{A}_X^{p,q}$ è il fascio dei germi delle (p,q)-forme su X, abbiamo che la successione

$$0 \longrightarrow \Omega_X^p \hookrightarrow \Lambda_X^{p,0} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}_X^{p,2} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

  è esatta per il teorema $\bar\partial$-Poincarè, dove Ω_X^p è il fascio dei germi delle p-forme olomorfe su X.

Definizione 1.3.11. Una successione di prefasci di gruppi abeliani su X e morfismi di fasci

$$\cdots \longrightarrow S_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} S_i \xrightarrow{\phi_i} S_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} \cdots$$

si dice **complesso di prefasci** (risp. **esatta**) se la sucessione di gruppi abeliani

$$\cdots \longrightarrow S_{i-1}(U) \xrightarrow{(\phi_{i-1})_U} S_i(U) \xrightarrow{(\phi_i)_U} S_{i+1}(U) \xrightarrow{(\phi_{i+1})_U} \cdots$$

è un complesso (risp. è esatta) per ogni aperto $U \subseteq X$.

Come al solito, è naturale chiedersi come si comportino i funtori Γ e Sheaf rispetto ai complessi e alle successioni esatte. Vedere che Γ e Sheaf portano complessi in complessi è piuttosto semplice, perchè entrambi mantengono nulle le composizioni successive $\varphi_i \circ \varphi_{i-1}$. Per le successioni esatte, invece, il discorso è un po' meno ovvio; le prossime due proposizioni mostrano che Sheaf è un funtore esatto, mentre Γ lo è a sinistra.

Proposizione 1.3.1. *Il funtore* Sheaf *fra la categoria dei prefasci di gruppi abeliani e la categoria dei fasci di gruppi abeliani è esatto.*

Dimostrazione. Sia $S \xrightarrow{F} S' \xrightarrow{G} S''$ una successione esatta di prefasci, e denotiamo con $\mathscr{S} \xrightarrow{f} \mathscr{S}' \xrightarrow{g} \mathscr{S}''$ la successione immagine tramite Sheaf. Preso $x \in X$, vogliamo vedere che $\mathrm{Im}(f_x) = \mathrm{Ker}(g_x)$; mostriamo entrambe le inclusioni.

$\subseteq$) Sia $[(U,s)]_{\sim_x} \in \mathscr{S}_x$. Allora $g_x(f_x([(U,s)]_{\sim_x})) = g_x((F_U(s))_x) = (G_U(F_U(s)))_x = ((G \circ F)_U(s))_x = 0$, in quanto $G \circ F = 0$.

$\supseteq$) Sia $[(U,s')]_{\sim_x} \in \mathscr{S}'_x$ tale che $g_x([(U,s')]_{\sim_x}) = 0$. Allora $G_U(s')_x = 0_x$, quindi esiste un aperto $W \subseteq U$ contenente x tale che $G_W(\rho^U_W(s')) = \rho^U_W(G_U(s')) = 0$, da cui $\rho^U_W(s') \in \mathrm{Ker}(G_W) = \mathrm{Im}(F_W)$, cioè esiste un $s \in S(W)$ tale che $\rho^U_W(s') = F_W(s)$. Ma allora $[(U,s')]_{\sim_x} = [(W,\rho^U_W(s'))]_{\sim_x} = [(W,F_W(s))]_{\sim_x} = F_x([(W,s)]_{\sim_x})$, cioè la tesi.

□

Proposizione 1.3.2. *Il funtore Γ è esatto a sinistra, cioè, se $0 \to \mathscr{S} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{S}' \xrightarrow{\beta} \mathscr{S}''$ una successione esatta di fasci di gruppi abeliani, allora $0 \to \Gamma(\mathscr{S}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(\mathscr{S}') \xrightarrow{\beta} \Gamma(\mathscr{S}'')$ è una successione esatta di prefasci.*

Dimostrazione. Preso un aperto $U \subseteq X$, dobbiamo mostrare che la successione di gruppi abeliani $0 \to \Gamma(U,\mathscr{S}) \xrightarrow{\alpha_U} \Gamma(U,\mathscr{S}') \xrightarrow{\beta_U} \Gamma(U,\mathscr{S}'')$ è esatta. Cominciamo col mostrare l'iniettività di α_U. Sia $\sigma \in \Gamma(U,\mathscr{S})$ tale che $\alpha_U(\sigma) = \alpha \circ \sigma = 0$; allora, per ogni $x \in U$, $\alpha_x(\sigma(x)) = (\alpha \circ \sigma)(x) = 0_x \in \mathscr{S}'_x$, ma α_x è iniettiva, quindi $\sigma(x)$ è il germe nullo per ogni $x \in U$, cioè σ è la sezione nulla.
Passiamo a mostrare l'esattezza in $\Gamma(U,\mathscr{S}')$, cioè che $\mathrm{Im}(\alpha_U) = \mathrm{Ker}(\beta_U)$. L'inclusione $\subseteq$ è facile, quindi vediamo l'altra. Sia $\sigma' \in \Gamma(U,\mathscr{S}')$ tale che $\beta_U(\sigma') = \beta \circ \sigma' = 0$; per ogni $x \in U$, $\beta_x(\sigma'(x)) = 0_x \in \mathscr{S}''_x$, ma $\mathrm{Im}(\beta_x) = \mathrm{Ker}(\alpha_x)$, quindi esiste un $s \in \mathscr{S}_x$ tale che $\alpha_x(s) = \sigma'(x)$. Visto che è un'uguaglianza fra germi, deve esistere un aperto $U_x \subseteq U$ e un germe $s^{(x)} \in \mathscr{S}_x$ tale che $\alpha_{U_x}(s^{(x)}) = \sigma'_{|U_x}$; d'altra parte $\{U_x\}_{x\in U}$ è un ricoprimento aperto di U, e sulle intersezioni $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, si ha:

$$\begin{aligned}\alpha_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(\rho^{U_{x_1}}_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(s^{(x_1)})) &= \rho^{U_{x_1}}_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(\alpha \circ s^{(x_1)}) = \sigma'_{|U_{x_1}\cap U_{x_2}} = \\ &= \rho^{U_{x_2}}_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(\alpha \circ s^{(x_2)}) = \alpha_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(\rho^{U_{x_2}}_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}(s^{(x_2)})),\end{aligned}$$

ma $\alpha_{U_{x_1}\cap U_{x_2}}$ è iniettiva, quindi le restrizioni di $s^{(x_1)}$ e $s^{(x_2)}$ a $U_{x_1} \cap U_{x_2}$ coincidono, perciò i dati locali sono compatibili e si incollano a una $s \in \Gamma(U,\mathscr{S})$ tale che $\rho^U_{U_x}(s) = s^{(x)}$ per ogni $x \in U$. Ma allora $\alpha_U(s) = \sigma'$, in quanto su U_x valgono le uguaglianze $\alpha_U(s)_{|U_x} = \alpha_{U_x}(\rho^U_{U_x}(s)) = \alpha_{U_x}(s^{(x)}) = \sigma'_{|U_x}$. □

Definizione 1.3.12. $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ si dice **sottofascio di gruppi abeliani** se $\mathscr{S}'_x \subseteq \mathscr{S}_x$ è un sottogruppo per ogni $x \in X$. Nel caso in cui $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ sia un sottofascio di gruppi abeliani, definiamo il **fascio quoziente** di $\mathscr{S}$ e $\mathscr{S}'$ come il fascio $\frac{\mathscr{S}}{\mathscr{S}'} = \bigcup_{x\in X} \frac{\mathscr{S}_x}{\mathscr{S}'_x}$ con la topologia che rende esatta la successione di fasci di gruppi abeliani $\mathscr{S} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathscr{S}}{\mathscr{S}'} \to 0$. Equivalentemente, è il fascio associato al prefascio (non canonico) $U \mapsto \frac{\Gamma(U,\mathscr{S})}{\Gamma(U,\mathscr{S}')}$.

La successione di fasci

$$0 \longrightarrow \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{S} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathscr{S}}{\mathscr{S}'} \longrightarrow 0$$

è chiaramente esatta. Più in generale, se $\varphi : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ è un morfismo di fasci di gruppi abeliani, definiamo **fascio conucleo** il fascio $\operatorname{coker}(\varphi)$ associato al prefascio (non canonico) $U \mapsto \frac{\Gamma(U,\mathscr{S})}{\varphi_U(\Gamma(U,\mathscr{S}'))}$. Evidentemente le spighe del fascio conucleo sono tali che $(\operatorname{coker}(\varphi))_x = \frac{\mathscr{S}_x}{\varphi_x(\mathscr{S}'_x)}$. Inoltre abbiamo sempre una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) \hookrightarrow \mathscr{S} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S}' \longrightarrow \operatorname{coker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Osserviamo che il fascio quoziente $\frac{\mathscr{S}}{\mathscr{S}'}$ può essere visto come il fascio conucleo realtivo al morfismo di inclusione $i : \mathscr{S}' \hookrightarrow \mathscr{S}$.

Nonostante spesso sia utile per completare a destra particolari successioni esatte, in generale è estremamente difficile lavorare con il fascio conucleo e con le sue sezioni. Infatti, una sezione σ di $\operatorname{coker}(\varphi)$ su un aperto $U \subseteq X$ è determinata da un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di U e da delle $\{s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{S})\}_{\alpha\in I}$ tali che, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, vale che $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) - \rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta) \in \varphi_{U_\alpha\cap U_\beta}(\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathscr{S}'))$.
Inoltre due tali sezioni, denotiamole $(\{U_\alpha\}, \{s_\alpha\})_{\alpha\in I}$ e $(\{U'_\beta\}, \{s'_\beta\})_{\beta\in J}$, sono uguali se, per ogni $p \in U$ e per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta$ contenga p, esista un aperto $V \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ contenente p tale che $\rho^{U_\alpha}_V(s_\alpha) - \rho^{U_\beta}_V(s'_\beta) \in \varphi_V(\Gamma(V, \mathscr{S}))$.

1.4 Coomologie di fasci e prefasci

Obiettivo di questa sezione è definire le diverse teorie coomologiche nel contesto dei fasci e dei prefasci e mostrarne eventuali analogie. Iniziamo prendendo un fascio $\mathscr{F}$ di gruppi abeliani su X.

Definizione 1.4.1. Una **risoluzione** del fascio $\mathscr{F}$ è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathscr{L}^1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots$$

Per mostrare che effettivamente esistono sempre risoluzioni per ogni fascio $\mathscr{F}$, costruiamone esplicitamente una, che viene chiamata **risoluzione canonica** del fascio. Consideriamo il prefascio canonico $\Sigma\mathscr{F}$ di gruppi abeliani su X tale che $U \mapsto \{f : U \to \mathscr{F} \mid \pi \circ f = \mathrm{id}_U\}$, detto **prefascio delle sezioni discontinue** di $\mathscr{F}$, e poniamo $\operatorname{Can}^0(\mathscr{F})$ il fascio associato a tale prefascio. Chiaramente $\Gamma(\mathscr{F})$ è un sottoprefascio di $\Sigma\mathscr{F}$, da cui $0 \to \Gamma(\mathscr{F}) \xhookrightarrow{i} \Sigma\mathscr{F}$ è esatta di prefasci. Applicando il funtore Sheaf, otteniamo una successione esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xhookrightarrow{i^*} \operatorname{Can}^0(\mathscr{F}).$$

Considerato il conucleo $Z^1(\mathscr{F}) = \operatorname{coker}(i^*)$ e posto $\operatorname{Can}^1(\mathscr{F}) = \operatorname{Can}^0(Z^1(\mathscr{F}))$ e $Z^2(\mathscr{F}) = Z^1(Z^1(\mathscr{F}))$, possiamo facilmente estendere la precedente successione esatta di fasci a:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xhookrightarrow{i^*} \operatorname{Can}^0(\mathscr{F}) \longrightarrow \operatorname{Can}^1(\mathscr{F}) \longrightarrow Z^2(\mathscr{F}).$$

Iterando questo procedimento otteniamo la risoluzione canonica voluta.

Sia adesso $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{L}^0 \xrightarrow{\varphi_0} \dots$ una risoluzione qualunque di $\mathscr{F}$; essa induce un complesso di prefasci

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathscr{L}^0) \xrightarrow{\phi_0} \Gamma(\mathscr{L}^1) \xrightarrow{\phi_1} \dots$$

esatto nei primi due termini. Valutando quest'ultima successione in X, otteniamo il complesso di gruppi abeliani

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{L}^0) \stackrel{(\phi_0)_X}{\longrightarrow} \Gamma(X, \mathscr{L}^1) \stackrel{(\phi_1)_X}{\longrightarrow} \dots,$$

anch'esso esatto nei primi due termini. Visto che la coomologia di questo complesso è sempre banale in grado 0, viene naturale isolare la parte "non banale" di tale complesso ponendo $B^* = \Gamma(X, \mathscr{L}^*)$; sicuramente vale che $H^0(B^*) = \mathrm{Ker}((\phi_0)_X) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Definizione 1.4.2. La **coomologia di X a valori in $\mathscr{F}$** è la coomologia $H^*(X, \mathscr{F})$ del complesso $B^* = \Gamma(X, \mathrm{Can}^*(\mathscr{F}))$ costruito come sopra a partire dalla risoluzione canonica.

Esattamente come sopra, vale che $H^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Adesso passiamo a studiare la coomologia di un prefascio. Per farlo, prendiamo F un prefascio di gruppi abeliani su X, e fissiamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di X. Per semplicità di notazione, usiamo la notazione $U_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$.

Definizione 1.4.3. Le **p-cocatene di Čech** a valori in F e subordinate a $\mathcal{U}$ sono il gruppo $\check{C}^p(\mathcal{U}, F) = \prod_{\alpha_0,\dots,\alpha_p \in I} F(U_{\alpha_0,\dots,\alpha_p})$.

Chiaramente nella definizione si possono considerare solo gli indici per cui $U_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} \neq \emptyset$, perchè sugli altri il prefascio F vale $\{0\}$. Inoltre una p-cocatena $\sigma \in \check{C}^p(\mathcal{U}, F)$ è determinata da un $\sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} \in F(U_{\alpha_0,\dots,\alpha_p})$ per ogni $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in I$.
Fra tali gruppi di cocatene definiamo delle **mappe di cobordo** $d_p : \check{C}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, F)$ tali che:

$$(d_p(\sigma))_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho^{U_{\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{p+1}}}_{U_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p+1}}} (\sigma_{\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_j},\dots,\alpha_{p+1}}).$$

É una noiosissima verifica controllare che effettivamente $d^2 = 0$, cioè che $d_{p+1} \circ d_p = 0$. Per non appesantire troppo la trattazione, mostriamo solo il primo caso non banale $p = 1$. Presa una 0-cocatena $\sigma \in \check{C}^0(\mathcal{U}, F)$, cioè presa una collezione di $\sigma_\alpha \in F(U_\alpha)$ per ogni $\alpha \in I$, si ha che:

$$(d\sigma)_{\alpha,\beta} = \rho^{U_\beta}_{U_{\alpha,\beta}}(\sigma_\beta) - \rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha,\beta}}(\sigma_\alpha),$$

da cui si ottiene che gli 0-cocicli secondo tali mappe di cobordo sono esattamente i dati localmente compatibili. Similmente, se $\eta \in \check{C}^1(\mathcal{U}, F)$, si ha che:

$$(d\eta)_{\alpha,\beta,\gamma} = \rho^{U_{\beta,\gamma}}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\eta_{\beta,\gamma}) - \rho^{U_{\alpha,\gamma}}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\eta_{\alpha,\gamma}) + \rho^{U_{\alpha,\beta}}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\eta_{\alpha,\beta}),$$

perciò con facili calcoli si verifica che:

$$(d^2(\sigma))_{\alpha,\beta,\gamma} = \rho^{U_\gamma}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\gamma) - \rho^{U_\beta}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\beta) - \rho^{U_\gamma}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\gamma) + \rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\alpha) + \rho^{U_\beta}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\beta) - \rho^{U_\alpha}_{U_{\alpha,\beta,\gamma}}(\sigma_\alpha) = 0.$$

Definizione 1.4.4. Senza troppa fantasia, $\check{B}^p(\mathcal{U}, F) = \mathrm{Im}(d_{p-1})$ sono detti **p-cobordi di Čech**, $\check{Z}^p(\mathcal{U}, F) = \mathrm{Ker}(d_p)$ sono detti **p-cocicli di Čech** e $\check{H}^p(\mathcal{U}, F) = \frac{\check{Z}^p(\mathcal{U},F)}{\check{B}^p(\mathcal{U},F)}$ è detta **coomologia di Čech** a valori in F subordinata a $\mathcal{U}$.

Se abbiamo un morfismo di prefasci $\phi : L \to F$, esso induce omomorfismi $\phi_p : \check{C}^p(\mathcal{U}, L) \to \check{C}^p(\mathcal{U}, F)$ fra le p-cocatene di Čech a valori in L e in F tali che:

$$(\phi_p(\sigma))_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = \phi_{\alpha_0,\dots,\alpha_p}(\sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_p}).$$

Nonostante questa definizione consenta fin da subito di fare alcuni calcoli espliciti per particolari prefasci, non ci soddisfa la dipendenza della coomologia dal ricoprimento $\mathcal{U}$; per questo mostriamo che con un semplice argomento di limite diretto possiamo eliminare questa dipendenza. Innanzitutto, se $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta\in J}$ è un altro ricoprimento di X più fine di $\mathcal{U}$, e $\varphi : J \to I$ è una mappa di raffinamento, cioè tale che $U'_\beta \subseteq U_{\varphi(\beta)}$, definiamo il morfismo di complessi $\rho^*_\varphi : \check{C}^*(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^*(\mathcal{U}', F)$ tale che:

$$(\rho^p_\varphi(\sigma))_{\beta_0,\dots,\beta_p} = \rho^{U_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_p)}}_{U'_{\beta_0,\dots,\beta_p}}(\sigma_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_p)}).$$

Tale ρ^*_φ induce una mappa $(\rho^p_\varphi)^* : \check{H}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', F)$ in coomologia che non dipende dalla mappa di raffinamento φ, perchè se $\varphi' : J \to I$ è un'altra mappa di raffinamento, abbiamo che ρ^*_φ e $\rho^*_{\varphi'}$ sono omotope tramite la successione di mappe $k^p : \check{C}^p(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}', F)$ tali che:

$$(k^p(\sigma))_{\beta_0,\dots,\beta_{p-1}} = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j \rho^{U_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_j),\varphi'(\beta_j),\dots,\varphi'(\beta_{p-1})}}_{U'_{\beta_0,\dots,\beta_{p-1}}}(\sigma_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_j),\varphi'(\beta_j),\dots,\varphi'(\beta_{p-1})}),$$

cioè vale la relazione $\rho^p_\varphi - \rho^p_{\varphi'} = d_{p-1}k^p + k^{p-1}d_p$ per ogni p. Dunque denotiamo una qualunque $(\rho^*_\varphi)^*$ con $(\rho^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}'})^*$. Grazie a queste premesse, siamo pronti a definire la **coomologia di Čech** di X a valori in F:

$$\check{H}^*(X, F) = \varinjlim_{\mathcal{U} \text{ ric. di } X} \check{H}^*(\mathcal{U}, F).$$

Tutta questa costruzione della coomologia di Čech fatta per un prefascio si traduce immediatamente nel contesto dei fasci grazie alla seguente definizione.

Definizione 1.4.5. Se $\mathscr{F}$ è un fascio di gruppi abeliani su X, poniamo $\check{H}^*(X, \mathscr{F}) = \check{H}^*(X, \Gamma(\mathscr{F}))$ **coomologia di Čech** di X a valori in $\mathscr{F}$.

Proposizione 1.4.1. *Sia F un prefascio canonico di gruppi abeliani su X. Allora $\check{H}^0(X, F) = F(X)$. In particolare, $\check{H}^0(X, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F})$ per ogni fascio $\mathscr{F}$ su X.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) \cong F(X)$ per ogni ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, costruendo esplicitamente due mappe $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) \to F(X)$ e $F(X) \to \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$ una l'inversa dell'altra. Se $s \in F(X)$, gli associamo $[\sigma] \in \check{H}^0(\mathcal{U}, F)$, con $\sigma \in \check{Z}^0(\mathcal{U}, F)$ tale che $\sigma_\alpha = \rho^X_{U_\alpha}(s)$ per ogni $\alpha \in I$; tale σ è effettivamente uno 0-cociclo di Čech perchè abbiamo già osservato che essi coincidono con i dati localmente compatibili. Viceversa, se $\sigma \in \check{Z}^0(\mathcal{U}, F)$, gli associamo l'elemento $s \in F(X)$ globale ottenuto incollando i dati σ_α localmente compatibili. □

Proposizione 1.4.2. *Sia $Y \subseteq X$ un chiuso, e sia $\mathscr{F}$ un fascio di gruppi abeliani su Y. Detta $\widetilde{\mathscr{F}}$ l'estensione a 0 di $\mathscr{F}$ a fascio di X, vale che $\check{H}^*(Y, \mathscr{F}) = \check{H}^*(X, \widetilde{\mathscr{F}})$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di Y, è immediato osservare che $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ è un ricoprimento aperto di X. Inoltre, tale associazione $\mathcal{U} \mapsto \widetilde{\mathcal{U}}$ preserva l'inclusione fra ricoprimenti (dove diciamo che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ se $\mathcal{U}$ è più fine di $\mathcal{U}'$). Viceversa, se $\widetilde{\mathcal{U}}$ è un ricoprimento aperto di X, allora $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{U}} \cap Y$ (in cui l'intersezione è fatta aperto per aperto e gli insiemi vuoti vengono scartati) è un ricoprimento aperto di Y e anche tale associazione preserva l'inclusione fra ricoprimenti. Grazie a questa osservazione, ci basta mostrare che $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong \check{H}^*(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathscr{F}})$ per ogni $\mathcal{U}$ fissato e per ogni $\widetilde{\mathcal{U}}$ fissato. Se fissiamo $\mathcal{U}$ ricoprimento di Y, associamo ad ogni $\sigma \in \check{Z}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, cioè ad ogni collezione di $\sigma_{U_\alpha} \in \Gamma(\mathcal{U}, \mathscr{F})$, l'elemento $\widetilde{\sigma} \in \check{Z}^p(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathscr{F}})$ tale che $\widetilde{\sigma}_{U_\alpha} = \sigma_{U_\alpha}$ per ogni $U_\alpha \in \mathcal{U}$ e $\widetilde{\sigma}_{X\setminus Y} = 0$; questa mappa induce chiaramente un isomorfismo $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong \check{H}^*(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathscr{F}})$.

D'altra parte, se $\widetilde{\mathcal{U}}$ è un ricoprimento di X, associamo ad ogni $\widetilde{\sigma} \in \check{Z}^p(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathscr{F}})$, cioè ad ogni collezione $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{U}_\alpha} \in \Gamma(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\mathscr{F}}) = \Gamma(\underbrace{\widetilde{U}_\alpha \cap Y}_{:=U_\alpha}, \mathscr{F})$, l'elemento $\sigma_{U_\alpha} = \widetilde{\sigma}_{\widetilde{U}_\alpha}$ per ogni $U_\alpha \in \mathcal{U}$ non vuoto; ancora una volta, questa mappa induce un ovvio isomorfismo $\check{H}^*(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mathscr{F}}) \cong \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathscr{F})$. □

Enunciamo adesso due importanti teoremi che useremo spesso per fare conti espliciti di coomologie di spazi sufficientemente regolari, ma che non dimostriamo perchè le dimostrazioni (benchè non difficili) sono particolarmente noiose e non centrali nel nostro corso.

Teorema 1.4.3. *Sia X uno spazio paracompatto, e F un prefascio di gruppi abeliani su X (non necessariamente canonico). Allora $\check{H}^*(X, F) \cong \check{H}^*(X, \mathrm{Sheaf}(F))$.*

Teorema 1.4.4. *Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto aciclico per F prefascio su X, cioè tale che $\check{H}^p(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}, F_{|U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}})$ per ogni $p \geq 1$ e $\alpha_0, \ldots, \alpha_p \in I$. Allora $\mathcal{U}$ è un buon ricoprimento per calcolare la coomologia di X, cioè $\check{H}^*(X, F) = \check{H}^*(\mathcal{U}, F)$.*

A questo punto ci rimane solamente da vedere come ricavare le successioni esatte lunghe in coomologia in tutte le teorie coomologiche che abbiamo presentato; per le coomologie di Čech sarà piuttosto rapido, mentre per la coomologia dei fasci avremo bisogno di richiamare alcuni concetti sulle risoluzioni.

Cominciamo con una successione esatta di prefasci di gruppi abeliani su X:

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\Psi} G \longrightarrow 0.$$

Con una semplice verifica si può controllare che tutte le successioni corte

$$0 \longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, L) \xrightarrow{\phi_p} \check{C}^p(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\Psi_p} \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \longrightarrow 0$$

sono esatte per ogni p e per ogni $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X; dunque abbiamo una successione esatta di complessi

$$0 \longrightarrow \check{C}^*(\mathcal{U}, L) \xrightarrow{\phi_*} \check{C}^*(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\Psi_*} \check{C}^*(\mathcal{U}, G) \longrightarrow 0,$$

che produce una successione esatta lunga in coomologia:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, L) \xrightarrow{\phi_0^*} \check{H}^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\Psi_0^*} \check{H}^0(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\delta_0} \check{H}^1(\mathcal{U}, L) \xrightarrow{\phi_1^*} \check{H}^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\Psi_1^*} \check{H}^1(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\delta_1} \ldots$$

Ma avendo già osservato che il funtore $\varinjlim$ è esatto, deduciamo subito che esiste una successione esatta lunga in coomologia:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X, L) \xrightarrow{\phi_0^*} \check{H}^0(X, F) \xrightarrow{\Psi_0^*} \check{H}^0(X, G) \xrightarrow{\delta_0} \check{H}^1(X, L) \xrightarrow{\phi_1^*} \check{H}^1(X, F) \xrightarrow{\Psi_1^*} \check{H}^1(X, G) \xrightarrow{\delta_1} \ldots$$

Supponiamo invece di avere una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X:

$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\psi} \mathscr{G} \longrightarrow 0.$$

Il funtore Γ è esatto solo a sinistra, quindi dobbiamo accontentarci di una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathscr{L}) \xrightarrow{\varphi\circ} \Gamma(\mathscr{F}) \xrightarrow{\psi\circ} G = \frac{\Gamma(\mathscr{F})}{\mathrm{Im}(\Gamma(\mathscr{L})))} \longrightarrow 0.$$

Ma visto che $\mathrm{Sheaf}(G) = \mathrm{coker}(\varphi) = \mathscr{G}$, se X è paracompatto, il teorema 1.4.3 ci assicura che $\check{H}^p(X,G) = \check{H}^p(X,\mathscr{G})$, quindi la precedente successione esatta di prefasci produce una successione esatta lunga in coomologia:

$$0 \longrightarrow \check{H}^0(X,\mathscr{L}) \xrightarrow{\varphi_0^*} \check{H}^0(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\psi_0^*} \check{H}^0(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\partial_0} \check{H}^1(X,\mathscr{L}) \xrightarrow{\varphi_1^*} \check{H}^1(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\psi_1^*} \check{H}^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\partial_1} \dots$$

Passiamo ora alla costruzione della successione esatta lunga per la coomologia dei fasci; richiamiamo il concetto di famiglia adatta di oggetti di una categoria, che nel contesto dei fasci è rappresentato dai fasci fiacchi e dai fasci aciclici.

Definizione 1.4.6. Un fascio $\mathscr{F}$ di gruppi abeliani su X si dice **fiacco** se le restrizioni $\rho_V^U : \Gamma(U,\mathscr{F}) \to \Gamma(V,\mathscr{F})$ sono surgettive per ogni coppia di aperti $V \subseteq U \subseteq X$.

Osserviamo subito che il fascio $\mathrm{Can}^0(\mathscr{F})$ è sempre fiacco, in quanto ogni sezione su di lui si estende a un qualunque aperto più grande.

Proposizione 1.4.5. *Sia $0 \to \mathscr{L} \overset{\varphi}{\to} \mathscr{F} \overset{\psi}{\to} \mathscr{G} \to 0$ esatta di fasci con $\mathscr{L}$ fiacco. Allora anche la successione $0 \to \Gamma(\mathscr{L}) \overset{\varphi\circ}{\to} \Gamma(\mathscr{F}) \overset{\psi\circ}{\to} \Gamma(\mathscr{G}) \to 0$ è esatta di prefasci.*
Inoltre $\mathscr{F}$ è fiacco se e solo se $\mathscr{G}$ è fiacco.

Dimostrazione. Per la prima parte ci basta dimostrare che $\psi_U : \Gamma(U,\mathscr{F}) \to \Gamma(U,\mathscr{G})$ è surgettiva per ogni $U \subseteq X$ aperto. Sia dunque $s \in \Gamma(U,\mathscr{G})$ e consideriamo la famiglia $T = \{(U',t') \mid U' \subseteq U \text{ aperto}, t' \in \Gamma(U',\mathscr{F}), \psi_{U'}(t') = s_{|U'}\}$, con l'ovvia relazione d'ordine $(U',t') \leq (U'',t'')$ se $U' \subseteq U''$ e $t''_{U'} = t'$. Chiaramente le catene hanno un maggiorante dato dall'unione, quindi esiste un elemento massimale $(V,t) \in T$. Supponiamo per assurdo che $V \subsetneq U$, e prendiamo $x \in U \backslash V$. Visto che localmente le sezioni coincidono con π^{-1}, sicuramente esiste un aperto $U_x \subseteq U$ contenente x e una sezione $t_x \in \Gamma(U_x,\mathscr{F})$ tale che $\psi_{U_x}(t_x) = s_{|U_x}$. Se l'intersezione $U_x \cap V$ è vuota, abbiamo subito un assurdo perchè possiamo estendere t a una sezione su $U_x \cup V$; se invece $U_x \cap V \neq \emptyset$, su tale intersezione abbiamo che $\psi_{U_x\cap V}(t_{|U_x\cap V}) - \psi_{U_x\cap V}(t_{x|U_x\cap V}) = 0$, da cui $t_{|U_x\cap V} - t_{x|U_x\cap V} \in \mathrm{Im}(\varphi_{U_x\cap V})$. Sia $l \in \Gamma(U_x \cap V,\mathscr{L})$ tale che $\varphi_{U_x\cap V}(l) = t_{|U_x\cap V} - t_{x|U_x\cap V}$. $\mathscr{L}$ è fiacco, quindi l si estende a una sezione l' di $\mathscr{L}$ su U_x; ma allora $t_x + \varphi_{U_x}(l')$ è una sezione di $\mathscr{F}$ su U_x che si incolla con t sull'intersezione $U_x \cap V$, assurdo perchè questo incollamento produce una sezione su $U_x \cup V \supsetneq V$.
Per la seconda parte, abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{L}) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\rho_U^X"] & \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "\rho_U^X"] & \Gamma(X,\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_U^X"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(U,\mathscr{L}) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d] & \Gamma(U,\mathscr{F}) \arrow[r, "\psi_U"] \arrow[d, dashed, "2"] & \Gamma(U,\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "3"] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

in cui le righe e le colonne non tratteggiate sono esatte. La tesi è equivalente a dire che c'è esattezza in 2 se e solo se c'è esattezza in 3. Se c'è esattezza in 2, sia $\sigma \in \Gamma(U,\mathscr{G})$. ψ_U è surgettiva, quindi $\sigma = \psi_U(s)$ per un certo $s \in \Gamma(U,\mathscr{F})$; ma ρ_U^X della seconda colonna è surgettivo per ipotesi, quindi esiste $s' \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ tale che $\sigma = \psi_U(\rho_U^X(s')) = \rho_U^X(\psi_X(s'))$, cioè c'è esattezza in 3. Viceversa, se c'è esattezza in 3, sia $s \in \Gamma(U,\mathscr{F})$. Esattamente come sopra, esiste un $s' \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ tale che $\psi_U(s) = \rho_U^X(\psi_X(s'))$; però non possiamo concludere subito che $\rho_U^X(s') = s$. D'altra parte, l'elemento $s - \rho_U^X(s')$ va a 0 tramite ψ_U, quindi esiste $l \in \Gamma(U,\mathscr{L})$ tale che $\varphi_U(l) = s - \rho_U^X(s')$. $\mathscr{L}$ è fiacco, quindi esiste $l' \in \Gamma(X,\mathscr{L})$ tale che $s - \rho_U^X(s') = \varphi_U(\rho_U^X(l')) = \rho_U^X(\varphi_X(l'))$. Ma allora l'elemento $\varphi_X(l') + s' \in \Gamma(X,\mathscr{F})$ si restringe a s tramite ρ_U^X, cioè c'è esattezza in 2. $\square$

A questo punto siamo pronti per mostrare in che modo un morfismo di fasci $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induce un morfismo fra le risoluzioni canoniche di $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$. Se $\varphi_0 : \mathrm{Can}^0(\mathscr{F}) \to \mathrm{Can}^0(\mathscr{G})$ è la mappa ottenuta per composizione con φ, si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & Z^1(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\varphi_1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{G}) \arrow[r] & Z^1(\mathscr{G}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove l'esistenza di $\widetilde{\varphi_1}$ è facilmente dedotta da un diagram chasing simile ai precedenti. Iterando tale ragionamento, otteniamo un morfismo di complessi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathrm{Can}^1(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{G}) \arrow[r] & \mathrm{Can}^1(\mathscr{G}) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Ma se adesso consideriamo una successione esatta di fasci $0 \to \mathscr{L} \overset{\varphi}{\to} \mathscr{F} \overset{\psi}{\to} \mathscr{G} \to 0$, essa induce una successione esatta fra i canonici $0 \to \mathrm{Can}^0(\mathscr{L}) \overset{\varphi_0}{\to} \mathrm{Can}^0(\mathscr{F}) \overset{\psi_0}{\to} \mathrm{Can}^0(\mathscr{G}) \to 0$, perciò possiamo dedurne un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{L} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{L}) \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{F}) \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d] & \mathrm{Can}^0(\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^1(\mathscr{L}) \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi_1}"] \arrow[d] & Z^1(\mathscr{F}) \arrow[r, dashed, "\widetilde{\psi_1}"] \arrow[d] & Z^1(\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

in cui si può verificare che la terza riga è esatta (è un altro diagram chasing che sfrutta l'esattezza delle prime due righe). Iterando, giungiamo a una successione esatta dei complessi che calcolano la coomologia:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathrm{Can}^*(\mathscr{L})) \xrightarrow{\varphi_*} \Gamma(X, \mathrm{Can}^*(\mathscr{F})) \xrightarrow{\psi_*} \Gamma(X, \mathrm{Can}^*(\mathscr{G})) \longrightarrow 0,$$

da cui deduciamo la successione esatta lunga in coomologia voluta:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{L}) \xrightarrow{\varphi_0^*} H^0(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\psi_0^*} H^0(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\partial_0} H^1(X, \mathscr{L}) \xrightarrow{\varphi_1^*} H^1(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\psi_1^*} H^1(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\partial_1} \dots$$

Dopo tanta fatica abbiamo raggiunto l'obiettivo di ricavare queste successioni esatte lunghe, che ci serviranno in numerose occasioni, soprattutto in ragionamenti induttivi. L'ultimo problema che rimane consiste nel lavorare esplicitamente con i fasci canonici, che sono enormi e spesso intrattabili; per questo enunciamo e dimostriamo il teorema di De Rham astratto, che non è altro che una trasposizione nel linguaggio dei fasci del teorema generale che assicura che le risoluzioni acicliche calcolano i funtori derivati.

Definizione 1.4.7. Un fascio $\mathscr{F}$ di gruppi abeliani su X si dice **aciclico** se $H^p(X,\mathscr{F})=0$ per ogni $p\geq 1$. Similmente, si dice **Čech-aciclico** se $\check{H}^p(X,\mathscr{F})=0$ per ogni $p\geq 1$.

Proposizione 1.4.6. *Un fascio $\mathscr{F}$ fiacco è aciclico.*

Dimostrazione. La successione $0\to\mathscr{F}\to\mathrm{Can}^0(\mathscr{F})\to Z^1(\mathscr{F})\to 0$ è esatta e $\mathscr{F}$ è fiacco, quindi anche $Z^1(\mathscr{F})$ lo è; iterando si ha che tutti gli $Z^i(\mathscr{F})$ sno fiacchi. Ma allora ogni successione esatta $0\to Z^i(\mathscr{F})\to\mathrm{Can}^i(\mathscr{F})\to Z^{i+1}(\mathscr{F})\to 0$ induce un'altra successione esatta fra le sezioni globali:

$$0\longrightarrow\Gamma(X,Z^i(\mathscr{F}))\longrightarrow\Gamma(X,\mathrm{Can}^i(\mathscr{F}))\longrightarrow\Gamma(X,Z^{i+1}(\mathscr{F}))\longrightarrow 0.$$

Rincollando queste successioni esatte corte otteniamo che il complesso che calcola la coomologia di $\mathscr{F}$:

$$\Gamma(X,\mathrm{Can}^0(\mathscr{F}))\longrightarrow\Gamma(X,\mathrm{Can}^1(\mathscr{F}))\longrightarrow\Gamma(X,\mathrm{Can}^2(\mathscr{F}))\longrightarrow\dots$$

è esatto, da cui $\mathscr{F}$ è aciclico. □

Teorema 1.4.7 (De Rham astratto). *Ogni risoluzione $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}_0\overset{\varphi_0}{\to}\mathscr{L}_1\overset{\varphi_1}{\to}\dots$ del fascio $\mathscr{F}$ fatta da fasci aciclici è adatta per calcolare la coomologia di $\mathscr{F}$, cioè $H^p(X,\mathscr{F})=H^p(\Gamma(X,\mathscr{L}_*))=\frac{\mathrm{Ker}((\varphi_p)_X)}{\mathrm{Im}((\varphi_{p-1})_X)}$.*

Dimostrazione. Detto $K_i=\mathrm{Ker}(\varphi_i)=\mathrm{Im}(\varphi_{i-1})$ per $i\geq 1$ e $K_0=\mathscr{F}$, spezziamo la risoluzione in successioni esatte corte della forma:

$$0\longrightarrow K_i\longrightarrow\mathscr{L}_i\xrightarrow{\varphi_i}K_{i+1}\longrightarrow 0.$$

La successione esatta di complessi $0\to K_*\to\mathscr{L}_*\overset{\varphi_*}{\to}K[1]_*\to 0$ (dove $K[1]_*$ è il complesso traslato tale che $K[1]_p=K_{p+1}$) induce una successione esatta lunga in coomologia:

$$0\longrightarrow H^0(X,K_i)\longrightarrow H^0(X,\mathscr{L}_i)\xrightarrow{\alpha}H^0(X,K_{i+1})\xrightarrow{\beta}H^1(X,K_i)\longrightarrow\underbrace{H^1(X,\mathscr{L}_i)}_{=0}\longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,K_{i+1})\xrightarrow{\sim}H^2(X,K_i)\longrightarrow\underbrace{H^2(X,\mathscr{L}_i)}_{=0}\longrightarrow H^2(X,K_{i+1})\longrightarrow\dots$$

Ma allora $H^p(X,K_{i+1})\cong H^{p+1}(X,K_i)$ per ogni i e per ogni $p\geq 1$, mentre $H^1(X,K_i)\cong\frac{H^0(X,K_{i+1})}{\mathrm{Ker}(\beta)}=\frac{H^0(X,K_{i+1})}{\mathrm{Im}(\alpha)}$ e $H^0(X,K_i)=\mathrm{Ker}(\alpha)$. Ma α è semplicemente indotta da φ, quindi $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}((\varphi_i)_X:\Gamma(X,\mathscr{L}_i)\to\Gamma(X,\mathscr{L}_{i+1}))$ e $\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}((\varphi_i)_X)$. Perciò, se $p\geq 1$, abbiamo la catena di uguaglianze:

$$H^{p+1}(X,\mathscr{F})\cong H^p(X,K_1)\cong\dots\cong H^1(X,K_p)=\frac{H^0(X,K_{p+1})}{\mathrm{Im}((\varphi_p)_X)}=\frac{\mathrm{Ker}((\varphi_{p+1})_X)}{\mathrm{Im}((\varphi_p)_X)}.$$

Infine, con una semplice verifica si mostra che la coomologia è la stessa anche per $p=0,1$. □

Con una dimostrazione analoga si può vedere che, se X è paracompatto e $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{L}_0\to\dots$ è una risoluzione di $\mathscr{F}$ fatta di fasci di gruppi abeliani su X Čech-aciclici, allora $\check{H}^*(X,\mathscr{F})=H^*(\Gamma(X,\mathscr{L}_*))$.

1.5 Equivalenza delle teorie coomologiche a valori nei fasci

Come spesso accade, vogliamo mostrare che le diverse teorie coomologiche che abbiamo introdotto coincidono sotto ipotesi minime di regolarità; alla fine della sezione vedremo inoltre che la coomologia a valori nei fasci è una generalizzazione dei normali concetti di coomologia singolare e simpliciale. Eviteremo gran parte delle dimostrazioni, che sono estremamente tecniche.

Sia X una varietà differenziabile reale (se fosse una varietà complessa si procederebbe in modo analogo), abbiamo una risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d_0} \Lambda_X^1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

del fascio costante $\mathbb{R}$ su X fatta da fasci Čech-aciclici. Infatti vale il seguente risultato:

Proposizione 1.5.1. *Sia $\mathscr{S}$ un fascio su X che sia anche un C_X^∞-modulo (cioè un fascio in cui si possono moltiplicare le sezioni per funzioni C^∞ su X). Allora $\mathscr{S}$ è Čech-aciclico.*

Dimostrazione. Preso un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di X localmente finito, vediamo che $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathscr{S}) = 0$. Sia $\{\varphi : X \to \mathbb{R}\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\mathcal{U}$, e prendiamo un p-cociclo $\sigma \in \check{Z}^p(\mathcal{U}, \mathscr{S})$. Allora consideriamo la $(p-1)$-cocatena $\tau \in \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathscr{S})$ tale che:

$$\tau_{\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}} = \sum_{\beta\in I} \varphi_\beta \sigma_{\beta,\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}},$$

dove consideriamo $\sigma_{\beta,\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}}$ estesa a 0 fuori da $U_{\beta,\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1}}$. Visto che $d\sigma = 0$, si ottiene subito:

$$(d\tau)_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = \sum_{\beta\in I} \varphi_\beta \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{\beta,\alpha_0,\dots,\widehat{\alpha_i},\dots,\alpha_p} \right)}_{=\sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_p}} = \sum_{\beta\in I} \varphi_\beta \sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} = \sigma_{\alpha_0,\dots,\alpha_p},$$

cioè σ è un p-cobordo e la tesi è dimostrata. □

Dunque la precedente risoluzione Čech-aciclica del fascio costante $\mathbb{R}$ permette subito di dimostrare il teorema:

Teorema 1.5.2. *Sia X una varietà differenziabile. Allora la coomologia di Čech e la coomologia di De Rham su X a valori in $\mathbb{R}$ coincidono, cioè $\check{H}^*(X, \mathbb{R}) = H^*_{DR}(X, \mathbb{R})$.*

Sia invece $\mathscr{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X, che assumiamo paracompatto, e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Usando la notazione usuale, se $U \subseteq X$ è un aperto, allora $\mathcal{U} \cap U$ è un ricoprimento aperto di U. Consideriamo il prefascio canonico $U \mapsto \check{C}^p(\mathcal{U} \cap U, \mathscr{F}_{|U})$ e denotiamo con $\check{\mathscr{C}}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ il fascio associato a tale prefascio. Allora si può dimostrare che

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \check{\mathscr{C}}^1(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_1} \check{\mathscr{C}}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_2} \dots$$

è una risoluzione di $\mathscr{F}$. Inoltre non è difficile vedere che, se $\mathscr{F}$ è fiacco, anche tutti i $\check{\mathscr{C}}^p(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ lo sono, dunque passando alle sezioni globali si ottiene che il complesso che calcola la coomologia di $\mathscr{F}$ è esatto; da questo segue:

Proposizione 1.5.3. *Un fascio $\mathscr{F}$ fiacco è Čech-aciclico.*

A questo punto, visto che la risoluzione canonica di $\mathscr{F}$ è fatta da fasci fiacchi, in particolare è fatta da fasci aciclici e Čech-aciclici, e perciò per il teorema di De Rham astratto si ha:

Teorema 1.5.4. *Sia X uno spazio paracompatto e $\mathscr{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Allora la coomologia di $\mathscr{F}$ e la coomologia di Čech a valori in $\mathscr{F}$ coincidono, cioè $H^*(X, \mathscr{F}) = \check{H}^*(X, \mathscr{F})$.*

Infine, sia X uno spazio paracompatto e T2, e consideriamo un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di X localmente finito.

Definizione 1.5.1. Il **nerbo** di $\mathcal{U}$ è il complesso simpliciale $N(\mathcal{U})$ con vertici I e tale che in $N(\mathcal{U})$ esiste un p-simplesso di vertici $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ se e solo se $U_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} \neq \emptyset$.

Senza particolari difficoltà si può vedere che le p-cocatene simpliciali $C^p_{\mathrm{simpl}}(N(\mathcal{U}), R)$ a valori in un qualunque PID R coincidono con le p-cocatene di Čech $\check{C}^p(\mathcal{U}, R)$; è invece molto meno facile mostrare che, se $\mathcal{U}$ è abbastanza fine, il nerbo $N(\mathcal{U})$ è omotopicamente equivalente a X. In ogni caso, queste due osservazioni implicano il seguente:

Teorema 1.5.5. *Sia X uno spazio paracompatto e T2, e sia R un PID. Allora la coomologia di Čech a valori nel fascio costante R coincide con la coomologia simpliciale o singolare di X a valori in R, cioè $\check{H}^*(X, R) = H^*_{simpl}(X, R) = H^*_{sing}(X, R)$.*

2 Varietà complesse

2.1 Funzioni olomorfe in più variabili complesse

In questa sezione ci occuperemo di richiamare i fatti fondamentali delle funzioni olomorfe in $\mathbb{C}^n$, e di inserire tale teoria nel contesto dei fasci che abbiamo appena studiato. Eviteremo diverse dimostrazioni, tranne quelle più istruttive o quelle dei fatti non completamente di base, ed assumeremo come noti i fatti di analisi complessa in una variabile.

Nel seguito considereremo $\mathbb{C}^n$ con le variabili $z_1, \dots, z_n$ e lo identificheremo come spazio metrico con $\mathbb{R}^{2n}$, su cui poniamo le variabili $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ tali che $z_j = x_j + iy_j$. Come è usuale, denoteremo con $dz_j = dx_j + idy_j$ i funzionali $\mathbb{C}$-lineari e con $d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$ i funzionali $\mathbb{C}$-antilineari. Dove non altrimenti specificato, U denoterà sempre un aperto di $\mathbb{C}^n$.

Definizione 2.1.1. Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. f è analitica, cioè per ogni punto $u \in U$ esiste un intorno $V \subseteq U$ contenente u e una serie di potenze $\sum_{j \in \mathbb{N}^n} a_{j_1,\dots,j_n}(z_1 - u_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (z_n - u_n)^{j_n}$ convergente a $f_{|V}$ su V (si può vedere che la convergenza è assoluta e uniforme sui compatti);

2. f e continua, esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_j}$ su U e valgono le equazioni di Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0$;

3. f è separatamente olomorfa in ogni variabile.

Un'importante osservazione è che la serie di potenze che definisce f in un intorno U di u è completamente determinata dal germe di f in u, in quanto vale sempre:

$$a_{j_1,\dots,j_n} = \frac{1}{j_1! \cdot \ldots \cdot j_n!} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_n} f}{\partial z_1^{j_1} \ldots \partial z_n^{j_n}},$$

dove come usuale denotiamo $\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$.

Come già fatto nel primo capitolo, indichiamo con $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$, tale che $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ olomorfe}\}$. Nonostante abbia una struttura di fascio di $\mathbb{C}$-algebre, spesso useremo solo la sua struttura di fascio di anelli. Invece $\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}$ indica il fascio (di gruppi abeliani) dei germi delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}^n$ mai nulle.

Proposizione 2.1.1. *Gli invertibili dell'anello $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ coincidono esattamente con $\Gamma(U, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n})$. Inoltre, per ogni $u \in \mathbb{C}^n$, la spiga $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}_u = (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u \backslash (\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n})_u$ e invertibili $(\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n})_u$. Infine $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_0 =: \mathcal{O}_n$ per ogni $u \in \mathbb{C}^n$.*

Dimostrazione. Il primo fatto è completamente ovvio. Per il secondo, consideriamo l'omomorfismo di anelli:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}_u : & (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [(U, f)]_{\sim_u} & \longmapsto & f(u) \end{array}$$

Sicuramente $\mathfrak{m}_u = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_u)$ è un ideale massimale, ma è anche l'unico, perchè se $f(u) \neq 0$, esiste un aperto $V \subseteq U$ contenente u tale che f non si annulla mai su V, quindi $\left[\left(V, \frac{1}{f_{|V}}\right)\right]_{\sim_u}$ è l'inverso di $[(U, f)]_{\sim_u}$ in $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u$.
Infine la traslazione di $\mathbb{C}^n$ che porta u in 0 dà un ovvio isomorfismo fra $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_u$ e $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_0$. $\square$

Proposizione 2.1.2. *L'insieme delle sezioni $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non contiene nè funzioni a valori reali, nè funzioni di modulo costante, eccetto le funzioni localmente costanti. In particolare la spiga $\mathcal{O}_n$ non contiene i germi di tali funzioni.*

Dimostrazione. Se $f : U \to \mathbb{R}$ è olomorfa, allora le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e $\frac{\partial f}{\partial y_j}$ sono funzioni reali, perciò per Cauchy-Riemann devono essere identicalmente nulle, da cui f è localmente costante. Se invece $f : U \to \mathbb{C}$ ha modulo costante $\rho \neq 0$ (se $|f|$ è costantemente 0 allora f è la funzione identicamente nulla), possiamo scrivere $f(z) = \rho e^{i\theta(z)}$, con $\theta : U \to \mathbb{R}$ continua. Ma $0 = \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = \rho i e^{i\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \overline{z_j}}$, quindi θ è olomorfa e a valori reali, da cui θ (e quindi f) è localmente costante. □

Grazie alla caratterizzazione vista nel primo capitolo, otteniamo che il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ è T2, in quanto lo spazio $\mathbb{C}^n$ lo è e vale il principio di identità per le sezioni di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, che sono funzioni olomorfe.

Corollario 2.1.3. *$\mathcal{O}_n$ è un dominio di integrità.*

Dimostrazione. Sia U un intorno aperto di 0 tale che $f \cdot g \equiv 0$ su U, dove f, g sono due funzioni olomorfe. Se $f \not\equiv 0$ in U, allora g è nulla sull'aperto $U \backslash \{f = 0\} \neq \emptyset$, quindi per il principio di identità $g \equiv 0$ su U. □

Richiamiamo due semplici e noti fatti di analisi complessa senza dimostrazione:

Teorema 2.1.4 (della media integrale)**.** *Denotiamo con $\Delta = D(\omega, r)$ il disco di centro ω e raggio r, e sia dV la forma di volume standard su $\mathbb{C}^n$. Allora, per ogni f olomorfa, vale la relazione:*

$$\int_\Delta f(\rho) dV(\rho) = \mathrm{vol}(\Delta) f(\omega).$$

Teorema 2.1.5 (Principio del massimo modulo)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto connesso, e $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non costante. Allora $|f|$ non ha massimi locali in U.*

I prossimi teoremi iniziano a delineare le enormi differenze che esistono fra le funzioni olomorfe in una variabile e le funzioni olomorfe in più variabili.

Teorema 2.1.6 (Hartogs)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, con $n \geq 2$, $u \in U$ e $f \in \Gamma(U \backslash \{u\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Allora f si estende a $F \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, cioè la restrizione $\rho^U_{U \backslash \{u\}} : \Gamma(U \backslash \{u\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ è surgettiva.*

Dimostrazione. Per semplicità vediamo solo la dimostrazione nel caso $u = 0$ e $n = 2$; l caso $n > 2$ si fa in modo simile ma con qualche accortezza tecnica in più. In realtà mostriamo un fatto più forte, cioè che se $U \supseteq \Delta' = D(0, r')$, allora ogni funzione olomorfa in un intorno di $U \backslash \Delta'$ si estende a una F olomorfa su U. Sia dunque $r > r'$ tale che $\Delta = D(0, r) \subseteq U$; fissato $z_1 = c$, si ha che l'intersezione $\{z_1 = c\} \cap (\Delta \backslash \Delta')$ è un disco o una corona circolare a seconda di c. Dunque si può definire su Δ la funzione:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(z_1, w)}{w - z_2} dw,$$

che risulta ben definita, continua e olomorfa rispetto a z_2, in quanto il bordo $|w| = r$ è sufficientemente distante da Δ'. D'altra parte f è olomorfa in entrambe le variabili su un intorno di $|w| = r$, perciò:

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z_1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}}(z_1, w)}{w - z_2} dw = 0,$$

da cui anche F è olomorfa su Δ. Per vedere che F è effettivamente un'estensione di f, basta osservare che F e f coincidono sull'aperto $\Delta \backslash \Delta'$, dunque per connessione F e f coincidono su tutto Δ. □

Corollario 2.1.7. *Se $n \geq 2$, i fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \setminus \{p\}}$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ coincidono.*

Teorema 2.1.8 (Lemma di preparazione di Weierstrass)**.** *Sia f olomorfa in un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{C}^n$ di 0, con f non identicamente nulla sull'asse z_n. Allora esiste un intorno aperto di 0 su cui f si scrive in modo unico come $f = h \cdot p$, con h olomorfa tale che $h(0) \neq 0$ e $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ monico tale che i suoi coefficienti si annullano in 0.*
In altre parole, per ogni $f \in \mathcal{O}_n$ tale che $f(0, z_n) \neq 0 \in \mathcal{O}_1$, esistono unici $h \in \mathcal{O}_n^*$ e $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ monico tali che $f = h \cdot p$.

Dimostrazione. In una variabile il teorema è ovvio, quindi assumiamo $n \geq 2$. Innanzitutto denotiamo $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Possiamo assumere che $f(0) = 0$, in quanto altrimenti basta scegliere $h = f$ e $p = 1$. Visto che $f(0, z_n) \not\equiv 0$, necessariamente lo sviluppo in serie di potenze di f in 0 contiene termini $a_k z_n^k$, con $k > 0$; sia d il minimo k per cui $a_k \neq 0$. Mettendo in evidenza tale termine, otteniamo $f(0, z_n) = z_n^d(a_d + a_{d+1}z_n + \ldots)$, dove il fattore fra parentesi è invertibile in $\mathcal{O}_1$; perciò $f(0, z_n)$ ha in 0 uno zero di molteplicità d.
Sicuramente esistono $r, \delta > 0$ tali che $|f(0, z_n)| \geq \delta > 0$ su $\{|z_n| = r\}$, e 0 è l'unico zero di $f(0, z_n)$ in $\{|z_n| < r\}$; ma allora per uniforme continuità esiste un $\varepsilon > 0$ per cui $|f(z, z_n) - f(0, z_n)| < \frac{\delta}{2}$ su $\{|z| < \varepsilon, |z_n| = r\}$, dunque $|f(z, z_n)| > \frac{\delta}{2}$ su U'. Per il teorema di Rouchè, $f(z, w)$ ha d zeri (contati con molteplicità) su $U' = \{|z| < \varepsilon, |z_n| < r\}$, siano essi $b_1 = b_1(z), \ldots, b_d = b_d(z)$; chiaramente $b_1, \ldots, b_d$ si annullano in 0. Adesso, per il teorema dei residui, abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{w^q \frac{\partial f}{\partial z_n}(z, w)}{f(z, w)} dw = \sum_{i=1}^{d} b_i^q,$$

quindi tali somme $S_q = \sum_{i=1}^d b_i^q$ sono funzioni olomorfe in z per ogni $q \geq 1$.
Ma visto che le funzioni simmetriche elementari $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ in $b_1, \ldots, b_d$ sono polinomiali nelle S_q, otteniamo che anche le σ_i sono olomorfe in U', da cui $p(z, z_n) = z_n^d - \sigma_1(z)z_n^{d-1} + \ldots + (-1)^d \sigma_d(z) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ ha le stesse radici di f in U'.
A questo punto possiamo scegliere $h = \frac{f}{p}$: h è olomorfa su $\{f \neq 0\}$, ed ha singolarità eliminabili in $\{f = 0\}$, perciò h si estende in modo olomorfo rispetto a z_n su tutto U'; col solito trucchetto della formula integrale di Cauchy si ottiene che h è olomorfa anche rispetto a z su tutto U'.
Infine l'unicità della decomposizione segue dall'osservazione che p deve essere l'unico polinomio monico in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ che ha per zeri tutti e soli gli zeri di f, in quanto h è diverso da 0 in un piccolo intorno di 0. □

Corollario 2.1.9 (Teorema di estensione di Riemann)**.** *Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ non identicamente nulla, e g olomorfa e limitata su $U \setminus \{f = 0\}$. Allora g si estende a G olomorfa su U.*

Dimostrazione. Il problema è locale, quindi possiamo ridurci a dimostrare il caso in cui U è un disco Δ centrato in 0 piccolo a piacere. Riprendiamo la notazione $z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ se $n \geq 2$ (se $n = 1$ il teorema segue dall'analisi complessa in una variabile). A meno di cambiare variabili, possiamo assumere che il luogo di zeri di f non contenga tutto l'asse z_n, quindi per il lemma di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere $f = h \cdot p$ in un intorno di 0. Per $z = \overline{z}$ fissato e $|z_n| < r$ piccolo, gli zeri di $f(\overline{z}, \cdot)$ coincidono con quelli di $p(\overline{z}, \cdot)$, che sono isolati; inoltre $g(\overline{z}, \cdot)$ è limitata in un intorno di tali zeri, quindi $g(\overline{z}, z_n)$ si estende a $\widetilde{g}$ su $\{|z| < \varepsilon, |z_n| < \delta\}$, con ε, δ opportuni, e con $\widetilde{g}$ olomorfa nell'ultima variabile e fuori da $\{f = 0\}$. Scrivendo $\widetilde{g}(z, z_n)$ in forma integrale si ottiene che $\widetilde{g}$ è in realtà olomorfa anche in z, da cui la tesi prendendo $\Delta = D(0, \min\{\varepsilon, \delta\})$. □

Grazie a questi risultati siamo in grado di capire parzialmente la forma dei luoghi di zeri di funzioni olomorfe in $\mathbb{C}^n$ per $n \geq 2$: infatti abbiamo dimostrato che localmente tale luogo di zeri è in realtà luogo di zeri di un polinomio $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; poniamo $d = \deg_{z_n}(p)$. Se $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ è la proiezione sulle prime $n-1$ coordinate, e $\rho = \pi_{|\{p=0\}} : \{p = 0\} \to \mathbb{C}^{n-1}$ è la restrizione al luogo di zeri di p, preso $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ si ha che $\rho^{-1}(z)$ è l'insieme delle radici di $p(z, \cdot)$, che è un insieme finito di punti. In particolare tali radici sono esattamente d sull'insieme $\{\mathrm{disc}(p) \neq 0\}$, dove $\mathrm{disc}(p) = \mathrm{Ris}(p, p')$ indica il discriminante di p, mentre sono $< d$ su $\{\mathrm{disc}(p) = 0\}$. Quindi abbiamo che ρ è un rivestimento ramificato, e un rivestimento di grado d fuori da $\{\mathrm{disc}(p) = 0\}$.

Corollario 2.1.10. *$\mathcal{O}_n$ è un UFD.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n, essendo il caso $n = 1$ ovvio. Assumiamo che $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ sia UFD; allora per il lemma di Gauss anche $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ lo è. Sia dunque $f \in \mathcal{O}_n$ tale che $f(0, z_n) \not\equiv 0$ (a meno di cambiare variabili possiamo sempre assumerlo); per il lemma di preparazione di Weierstrass scriviamo $f = h \cdot p$, con $h \in \mathcal{O}_n^*$ e $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è un UFD, quindi possiamo scrivere $p = \prod_i p_i$, con i p_i irriducibili su $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Ma tali p_i sono irriducibili anche su $\mathcal{O}_n$, perchè se $p_i = F_1F_2$ in $\mathcal{O}_n$, allora sempreper il lemma di preparazione di Weierstrass possiamo scrivere $F_1 = H_1G_1$ e $F_2 = H_2G_2$, con $H_1, H_2 \in \mathcal{O}_n$ e $G_1, G_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, assurdo perchè $1 \cdot p_i = H_1H_2G_1G_2$ e dunque $p_i = G_1G_2$ in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ per decomposizione unica. Infine l'unicità della fattorizzazione si vede in modo analogo: se $f = h \prod_i p_i = \prod_j f_j$, allora scriviamo $f_j = h_j \widetilde{g}_j$ per ogni j, da cui come sopra $\prod_i p_i = \prod_j \widetilde{g}_j$ sono la stessa fattorizzazione per fattorizzazione unica in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. □

Con le prossime proposizioni andiamo a studiare quali proprietà dei germi in un punto si estendono localmente.

Proposizione 2.1.11 (Propagazione di germi coprimi)**.** *$f, g \in \mathcal{O}_n$, $f, g \not\equiv 0$, relativamente primi. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che f, g sono relativamente primi in $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_z$ per ogni $|z| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sicuramente esiste una retta per 0 su cui f, g non si annullano identicamente, quindi possiamo supporre $f, g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Inoltre $f(0, z_n)$ non è identicamente nulla, quindi $f(z', z_n) \not\equiv 0$ per ogni z' sufficientemente piccolo fissato. Detto perciò $\mathcal{O}_{n-1} \ni \gamma = \mathrm{Ris}(f, g) \neq 0$, possiamo scrivere $\alpha f + \beta g = \gamma$ e tale relazione vale in un intorno U di 0. Adesso sia $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = g(z_0) = 0$, e supponiamo per assurdo che f, g abbiano un fattore in comune $h \in (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})_{z_0}$; h divide γ, che non dipende da z_n, quindi anche h non dipende da z_n. Ma allora $h((z_0)_1, \ldots, (z_0)_{n-1}, z_n) \equiv 0$ in un intorno di $(z_0)_n$ e h divide f, cioè $f(z_0, z_n) \equiv 0$, assurdo. □

Proposizione 2.1.12 (Propagazione di germi ridotti)**.** *Un germe ridotto in $\mathcal{O}_n$ (cioè privo di fattori multipli) rimane ridotto in un intorno di 0.*

Dimostrazione. Il criterio della derivata dice che $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ non ha fattori multipli se e solo se p e $\frac{\partial p}{\partial z_n}$ sono coprimi, quindi basta applicare il risultato precedente. □

Osserviamo però che tale estensione locale non vale per i germi irriducibili (se $n \geq 3$). Infatti il germe $x^2 - zy^2$ è irriducibile in 0, ma è riducibile fuori da 0 (perchè fuori da 0 si può estrarre la radice quadrata e scriverlo come $(x - \sqrt{z}y)(x + \sqrt{z}y)$).

Teorema 2.1.13 (di divisione di Weierstrass)**.** *Fissato $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ di grado k in z_n, per ogni $f \in \mathcal{O}_n$ esistono unici $h \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, con $\deg_{z_n}(r) < k$, tali che $f = h \cdot g + r$.*

Dimostrazione. Vediamo prima l'esistenza. Consideriamo

$$h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z, u)}{g(z, u)} \frac{du}{u - z_n},$$

definita per $|z| < \varepsilon$ e $|z_n| < \delta$, con $\varepsilon, \delta > 0$ opportuni. h è come al solito olomorfa e $r = f - h \cdot g$ si scrive

$$r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \left(f(z,u) - \frac{g(z,z_n) f(z,u)}{g(z,u)} \right) \frac{du}{u - z_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z,u)}{g(z,u)} \underbrace{\left(\frac{g(z,u) - g(z,z_n)}{u - z_n} \right)}_{*} du,$$

con il polinomio $*$ di grado $< k$ in z_n, da cui anche r è un polinomio in z_n di grado $< k$.
Per l'unicità, basta osservare che un'uguaglianza $h \cdot g = r$, con $h \in \mathcal{O}_n$, $g, r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\deg_{z_n}(r) < \deg_{z_n}(g)$, è verificata solo se $h = r = 0$. $\square$

Corollario 2.1.14 (Nullstellensatz debole)**.** *$f \in \mathcal{O}_n$ irriducibile, $h \in \mathcal{O}_n$ nulla su $\{f = 0\}$. Allora $f \mid h$ in $\mathcal{O}_n$.*

Dimostrazione. Assumiamo come al solito $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, con $k = \deg_{z_n}(f)$. f è irriducibile, quindi $f, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ sono coprimi in $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, e perciò possiamo scrivere $\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma \neq 0$, per opportuni $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $\gamma \in \mathcal{O}_{n-1}$. Fissato $z = z_0$, se $f(z_0, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$ ha una radice w di molteplicità $m > 1$, allora $f(z_0, z_n) = \frac{\partial f}{\partial z_n}(z_0, z_n) = 0$ e dunque $\gamma(z_0) = 0$. Quindi, se $\gamma(z_0) \neq 0$, $f(z_0, \cdot)$ ha k radici distinte. Scriviamo ora $h = fg + r$; visto che $\gamma(z_0) \neq 0$ in un intorno di 0 (per la propagazione dei germi coprimi), in tale intorno $h(z_0, \cdot)$ ha almeno k radici distinte (le stesse di f), quindi anche $r(z_0, \cdot)$ ha almeno k radici distinte, ma $\deg(r(z_0, \cdot)) < k$, perciò $r = 0$. $\square$

Corollario 2.1.15. *$\mathcal{O}_n$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Vediamolo per induzione su n; il caso $n = 1$ è facile. Se invece $n \geq 2$, sia $I \subseteq \mathcal{O}_n$ un ideale non banale; fissato $f \in I$, $f \not\equiv 0$, scegliamo coordinate tali che $f(0, z_n) \not\equiv 0$. $\mathcal{O}_{n-1}$ è noetheriano, quindi anche $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ lo è, dunque $I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ è finitamente generato da $g_1, \ldots, g_l$. Scriviamo $f = h \cdot p$, con $h \in \mathcal{O}_n^*$ e $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$; chiaramente $p \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \cap I$. Adesso, data una qualunque $\widetilde{f} \in I$, scriviamo $\widetilde{f} = \widetilde{h} \cdot p + r$, con $\widetilde{h} \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ con $\deg_{z_n}(r) < \deg_{z_n}(p)$; il resto r sta in I, quindi $\widetilde{f} \in \langle p, g_1, \ldots, g_l \rangle_{\mathcal{O}_n} = \langle g_1, \ldots, g_l \rangle_{\mathcal{O}_n}$. $\square$

2.2 Varietà complesse e varietà analitiche

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Diremo che una funzione $f : U \to \mathbb{C}^m$ è olomorfa se lo è coordinata per coordinata.

Definizione 2.2.1. Una **n-varietà complessa** M è una $2n$-varietà differenziabile (che noi assumeremo sempre paracompatta, di Hausdorff e connessa) che possiede un atlante olomorfo, cioè una famiglia di mappe $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n\}_{\alpha \in I}$ omeomorfismi sull'immagine, con $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M, e tale che i cambi di carta $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ siano olomorfi.

Esempi.

- $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, i loro aperti e le loro sottovarietà algebriche lisce sono varietà complesse.
- $(\mathbb{C}^2 \backslash \{0,0\}) / \sim$, dove $z \sim 2z$ per ogni $z \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0,0\}$, è una varietà complessa connessa e compatta (ma che vedremo non si immerge in nessun $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$).
- Sia $\pi : M \to N$ un rivestimento. Se N è una varietà complessa, esiste un'unica struttura di varietà complessa su M che rende π olomorfa. Viceversa, se M è una varietà complessa e le trasformazioni del rivestimento sono olomorfe, allora esiste un'unica struttura complessa su N che rende π olomorfa.

- I tori complessi $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$, con $\Lambda = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{Z}}$ sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}^m$, sono varietà complesse (non tutti isomorfi come varietà complesse, pur essendo tutti isomorfi come varietà differenziabili). Infatti la mappa quoziente $\pi : \mathbb{C}^n \to T$ è il rivestimento universale di T e gli elementi di $\mathrm{Aut}(\pi)$ sono traslazioni per elementi di Λ. Infine T è compatto se e solo se $n = 2m$, e vedremo che non tutti tali T compatti si immergono in qualche $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.
- Le superfici di Riemann sono varietà complesse, con la struttura olomorfa data dalle coordinate interne rispetto alla metrica riemanniana considerata.

Definizione 2.2.2. Sia M una varietà complessa con atlante olomorfo $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n\}_{\alpha \in I}$, e U un aperto di M. Allora $z_1, \dots, z_n : U \to \mathbb{C}$ si dicono **coordinate complesse** (o **coordinate olomorfe**) se $z = (z_1, \dots, z_n) : U \to \mathbb{C}^n$ è tale che $\varphi_\alpha \circ z^{-1} : z(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ e $z \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to z(U \cap U_\alpha)$ sono olomorfe per ogni $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Il nome coordinate complesse è suggerito dal caso particolare della varietà complessa $\mathbb{C}^n$ con l'atlante banale: in questo caso le coordinate complesse sono proprio le classiche n funzioni coordinate. Inoltre i cambi di coordinate complesse sono sempre olomorfi.

Definizione 2.2.3. M varietà complessa, $U \subseteq M$ aperto. $f : U \to \mathbb{C}$ si dice **olomorfa** se ogni punto $x \in U$ ammette un intorno aperto $V \subseteq U$ e delle coordinate olomorfe $z = (z_1, \dots, z_n)$ tali che $f \circ z^{-1}$ è olomorfa su $z(V)$.
Inoltre, se anche N è una varietà complessa, $f : M \to N$ si dice **olomorfa** se, per ogni punto $x \in M$, esiste un intorno V di x, delle coordinate olomorfe $z = (z_1, \dots, z_m)$ su V, un intorno W di $f(x)$ tale che $f(V) \subseteq W$ e delle coordinate olomorfe $w = (w_1, \dots, w_m)$ su W tali che $w \circ f \circ z^{-1} : z(V) \to w(W)$ è olomorfa.

Esempio. Per vedere che una qualunque mappa $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tale che $f(z) = [q_1(z), \dots, q_n(z)]$, con i q_i polinomi dello stesso grado, è olomorfa, si può vedere che lo è in ciascuna carta coordinata, oppure si fa vedere che una tale mappa è la mappa quoziente di una funzione $\widetilde{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ olomorfa.

Date tali definizioni, se M è una varietà complessa si può definire $\mathcal{O}_M$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su M; se $U \subseteq M$ è un sottoinsieme con coordinate olomorfe $z = (z_1, \dots, z_n)$, allora si ha un chiaro isomorfismo $\Gamma(U, \mathcal{O}_M) \cong \Gamma(z(U), \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ dato dalla composizione per z^{-1}: per questo motivo si dice che $\mathcal{O}_M$ è localmente isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$. Dunque i risultati locali che abbiamo mostrato per $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ valgono anche per $\mathcal{O}_M$; in particolare valgono le seguenti proprietà:

- Su $\mathcal{O}_M$ non ci sono germi di funzioi reali o di modulo costante;
- $\mathcal{O}_M$ è di Hausdorff;
- Il principio del massimo modulo;
- L'estensione di funzioni olomorfe su punti isolati (se $\dim(M) \geq 2$);
- L'estensione di funzioni olomorfe limitate sul luogo di zeri di una funzione olomorfa;
- Le spighe di $\mathcal{O}_M$ sono anelli noetheriani e UFD;
- Il Nullstellensatz debole;
- La propagazione di germi coprimi e ridotti.

Dal principio del massimo modulo per i germi di $\mathcal{O}_M$ segue facilmente il seguente risultato, che ci impedisce di studiare le varietà complesse compatte immergendole dentro $\mathbb{C}^N$:

Corollario 2.2.1. *Sia M una varietà complessa compatta. Allora:*

1. *Le sezioni globali $\Gamma(M, \mathcal{O}_M) = \mathbb{C}$ coincidono con le sezioni localmente costanti (e dunque costanti per connessione);*

2. *Se $M \subseteq \mathbb{C}^n$, allora M è un punto;*

3. *Se M non è un punto, non si può immergere in nessun $\mathbb{C}^N$.*

Dimostrazione. Il primo punto segue immediatamente dal principio del massimo modulo, mentre il secondo segue dal fatto che le coordinate di $\mathbb{C}^n$ ristrette a M sono olomorfe (e dunque costanti per il primo punto). □

Spendiamo qualche parola su un altro possibile approccio allo studio della struttura complessa su una varietà; non useremo praticamente mai questo punto di vista, ma vogliamo sottolinearlo per completezza. Se M è una varietà differenziabile e $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{C}^\infty_M$ è un sottofascio di anelli localmente isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$, possiamo considerare l'atlante olomorfo dato dai diffeomorfismi $z : U \to V$, dove $U \subseteq M$ e $V \subseteq \mathbb{C}^n$ sono aperti tali che $f \circ z^{-1} : z(U) \to \mathbb{C}$ è olomorfa per ogni $f \in \Gamma(U, \mathscr{A})$. Chiaramente la scelta di un atlante olomorfo definisce una naturale classe di funzioni olomorfe, e si può mostrare che la scelta $\mathscr{A} = \mathcal{O}_M$ definisce (come sopra) lo stesso atlante da cui siamo partiti.

Adesso passiamo a definire il concetto di sottovarietà di una varietà complessa: ne definiremo di due tipi, di cui uno sarà un'estensione dell'altro.

Definizione 2.2.4. Sia M una varietà complessa e $V \subseteq M$. V si dice **sottovarietà analitica** se per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ contenente p e una famiglia di funzioni olomorfe $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)$ per cui $V \cap U = \bigcap_{\alpha \in I} \{f_\alpha = 0\}$.

In altre parole, una sottovarietà analitica è localmente luogo di zeri di una famiglia di sezioni del fascio $\mathcal{O}_M$; visto però che le spighe $(\mathcal{O}_M)_p$ sono sempre noetheriane, possiamo scegliere I finito. Se in particolare I contiene una sola sezione, la sottovarietà analitica si dice **ipersuperficie**. Inoltre una sottovarietà analitica è sempre chiusa.

Nel seguito M sarà sempre una varietà complessa e V una sottovarietà analitica di M.

Definizione 2.2.5. V si dice **irriducibile** se una qualunque decomposizione $V = V_1 \cup V_2$, con V_1, V_2 sottovarietà analitiche di M, è banale, cioè $V_1 = V$ o $V_2 = V$. Inoltre, se $p \in V$, V si dice **irriducibile in** p se, per ogni U intorno aperto di p sufficientemente piccolo, $U \cap V$ è una sottovarietà analitica irriducibile di U (equivalentemente, se ne esiste uno di tali intorni).

Esempi.
- La conica nodata $\{y^2 - x^2(x+1) = 0\}$ è irriducibile, ed è irriducibile in ogni suo punto diverso da 0.
- La coppia di rette $\{xy = 0\}$ è riducibile, ed è irriducibile in ogni suo punto diverso da 0.

Proposizione 2.2.2. *Una ipersuperficie V è irriducibile in $p \in V$ se e solo se esiste un intorno U di p tale che, se $V \cap U = \{f = 0\}$, f è irriducibile in $(\mathcal{O}_M)_p$.*

Dimostrazione. $\Leftarrow$) Supponiamo che in un intorno di p V si decomponga come $V = V_1 \cup V_2$, con V_1, V_2 sottovarietà analitiche. Se per assurdo si avesse che $V_1 \not\subseteq V_2$ e $V_2 \not\subseteq V_1$, allora esisterebbero $f_1, f_2 \in (\mathcal{O}_M)_p$ tali che $f_1 \equiv 0$ su V_1, $f_1 \not\equiv 0$ su V_2 e viceversa per f_2; ma visto che $f_1 f_2 \equiv 0$ su $V_1 \cup V_2 = V$, allora per Nullstellensatz debole $f \mid f_1 f_2$, e per irriducibilità di f necessariamente f divide f_1 o f_2. Ma allora $V_2 \not\subseteq V$ o $V_1 \not\subseteq V$, entrambe impossibili; perciò $V_1 \subseteq V_2$ o $V_2 \subseteq V_1$, da cui $V = V_1$ o $V = V_2$.

$\Rightarrow$) Intorno a p, V si scrive come luogo di zeri di una $g \in (\mathcal{O}_M)_p$, e possiamo supporre tale g minimale (cioè g divide ogni altro germe di $(\mathcal{O}_M)_p$ che dà V nell'intorno fissato); scritto $g = \prod_{i=1}^m f_i$, con gli f_i irriducibili distinti in $(\mathcal{O}_M)_p$, abbiamo una decomposizione $V = \bigcup_{i=1}^m \{f_i = 0\}$, da cui $V = \{f_i = 0\}$ per un certo $1 \leq i \leq m$ e $m = 1$ per Nullstellensatz debole.

$\square$

Enunciamo alcuni risultati piuttosto difficili da dimostrare (soprattutto il secondo) riguardo alle sottovarietà analitiche, che però potrebbero servirci in seguito.

Proposizione 2.2.3. *1. Ogni sottovarietà analitica è localmente unione finita di sottovarietà analitiche irriducibili.*

2. Ogni sottovarietà analitica è localmente immagine di un rivestimento ramificato da un aperto di $\mathbb{C}^k$.

Teorema 2.2.4 (Proper Mapping)**.** *Sia $f : M \to N$ olomorfa fra varietà complesse. Se $V \subseteq M$ è una sottovarietà analitica tale che $f_{|V}$ è propria, allora $f(V) \subseteq N$ è una sottovarietà analitica.*

Osserviamo subito che, se W è una sottovarietà analitica di N, chiaramente $f^{-1}(W)$ è una sottovarietà analitica di M, senza ulteriori ipotesi sulla f (basta che sia olomorfa). Invece si possono trovare esempi di mappe f non proprie per cui $f(V)$ non è una sottovarietà analitica di N.

Definizione 2.2.6. $S \subseteq M$ si dice **sottovarietà complessa** di dimensione k se per ogni $p \in S$, esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di p con coordinate olomorfe z tali che $z(S \cap U) = z(U) \cap \mathbb{C}^k \subseteq \mathbb{C}^n$, dove denotiamo con $\mathbb{C}^k$ il sottospazio $\{z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}$ di $\mathbb{C}^n$.

Chiaramente una sottovarietà complessa S di dimensione k è una k-varietà complessa, con coordinate olomorfe le ovvie $z_{|S\cap U} : S \cap U \to \mathbb{C}^k$ ottenute restringendo il codominio. Inoltre, utilizzando z^{-1}, si ha che S è localmente immagine biolomorfa di un aperto di $\mathbb{C}^k$; infine una sottovarietà complessa è anche una sottovarietà analitica, in quanto localmente è luogo di zeri $\{z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}$ di $n - k$ funzioni olomorfe.

L'obiettivo delle prossime pagine è tradurre il linguaggio e i teoremi di base della teoria delle varietà differenziabili nel contesto delle varietà complesse, di cui sono un caso particolare. Vedremo inoltre come questa struttura aggiuntiva permetta di ottenere risultati migliori.
Presa come al solito M varietà complessa e $p \in M$, siano $z_1, \ldots, z_n$ coordinate olomorfe in un intorno U di p; posto $z_j = x_j + iy_j$ per ogni $1 \leq j \leq n$, è chiaro che $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ siano coordinate reali su U per M, vista come varietà reale di dimensione $2n$.

Ricordiamo che, se consideriamo su M solo la struttura C^∞, possiamo definire il suo spazio tangente (reale) $T_{\mathbb{R},p}(M)$ in p come l'insieme delle $\mathbb{R}$-derivazioni di $(\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{R}})_p$. Tale spazio tangente risulta uno spazio vettoriale (reale) di dimensione (reale) $2n$, generato dalla base di derivazioni $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$, dove per definizione $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ (e analogo per le y_j).

Definizione 2.2.7. Lo **spazio tangente complessificato** a M in p è il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes \mathbb{C}$.

Lo spazio tangente complessificato ha dimensione complessa $2n$ ed una base può essere $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$, così come $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right\}$.
Inoltre, così come nel caso reale, il tangente complessificato può essere identificato con l'insieme delle $\mathbb{C}$-derivazioni di $(\mathcal{C}^\infty_M)_p$; in questo modo risulta evidente che non dipenda dalla scelta di coordinate.

Definizione 2.2.8. Lo **spazio tangente olomorfo** a M in p è lo spazio vettoriale $T'_p(M) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$; lo **spazio tangente antiolomorfo** è lo spazio vettoriale $T''_p(M) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right)$.

Ancora una volta, possiamo vedere che $T'_p(M)$ e $T''_p(M)$ non dipendono dalla scelta di coordinate; è infatti un facile esercizio vedere che $T'_p(M)$ coincide con l'insieme delle $\mathbb{C}$-derivazioni di $(\mathcal{C}^\infty_M)_p$ nulle sulle funzioni antiolomorfe, mentre $T''_p(M)$ con l'insieme delle $\mathbb{C}$-derivazioni di $(\mathcal{C}^\infty_M)_p$ nulle sulle funzioni olomorfe.
Inoltre l'ovvia decomposizione $T_{\mathbb{C},p}(M) = T'_p(M) \oplus T''_p(M)$ induce un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare

$$T_{\mathbb{R},p}(M) \overset{i}{\hookrightarrow} T_{\mathbb{C},p}(M) \xrightarrow{\pi_1} T'_p(M)$$

fra il tangente reale e il tangente olomorfo, in quanto è facile vedere che $\frac{\partial}{\partial x_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_j}$ e $\frac{\partial}{\partial y_j} \mapsto i\frac{\partial}{\partial z_j}$ tramite $\pi_1 \circ i$. Spesso tale isomorfismo serve a descrivere alcuni spazi in modo molto più compatto; ad esempio, il tangente a una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ è dato dal vettore $\dot{x}(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(t)\frac{\partial}{\partial y}$, mentre visto in T'_p è semplicemente $\dot{z}(t)\frac{\partial}{\partial z}$.

Il coniugio su $\mathbb{C}$ si estende naturalmente a $T_{\mathbb{C},p}(M)$, tramite la definizione $\overline{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)} = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$. Il coniugio rimane idempotente, $\mathbb{R}$-lineare e $\mathbb{C}$-antilineare; inoltre è immediato verificare che valgono le relazioni:

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z_j}}, \qquad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j}.$$

Infine il coniugio è diagonalizzabile con autovalori ± 1, e l'autospazio relativo a 1 è $T_{\mathbb{R},p}(M)$.

Adesso sia $f : M^m \to N^n$ una mappa C^∞ fra varietà complesse. Fissato $p \in M$ e $f(p) \in N$, scegliamo coordinate olomorfe $z_1, \dots, z_m$ in un intorno di p e coordinate olomorfe $w_1, \dots, w_n$ in un intorno di $f(p)$, denotando $z_j = x_j + iy_j$ e $w_k = u_k + iv_k$ per ogni j, k. f induce naturalmente mappe fra i tangenti: esplicitamente, ne induce una $\mathbb{R}$-lineare fra i tangenti reali:

$$\begin{array}{rccc} df_p : & T_{\mathbb{R},p}(M) & \longrightarrow & T_{\mathbb{R},f(p)}(N) \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(p)\frac{\partial}{\partial v_k}\right) \\ & \frac{\partial}{\partial y_j} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}(p)\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_j}(p)\frac{\partial}{\partial v_k}\right) \end{array}$$

e una $\mathbb{C}$-lineare fra i tangenti complessificati:

$$\begin{array}{rccc} df_p : & T_{\mathbb{C},p}(M) & \longrightarrow & T_{\mathbb{C},f(p)}(N) \\ & \frac{\partial}{\partial z_j} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_j}(p)\frac{\partial}{\partial w_k} + \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial z_j}(p)\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right) \\ & \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} & \longmapsto & \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w_k}{\partial \overline{z_j}}(p)\frac{\partial}{\partial w_k} + \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial \overline{z_j}}(p)\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right) \end{array}$$

Da queste formule esplicite è immediato verificare che f è olomorfa se e solo se $df_p(T'_p(M)) \subseteq T'_{f(p)}(N)$ e $df_p(T''_p(M)) \subseteq T''_{f(p)}(N)$ per ogni $p \in M$.
Dunque, se fissiamo le basi $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}\right\}$ di $T_{\mathbb{R},p}(M)$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_n}\right\}$ di $T_{\mathbb{R},f(p)}(N)$, la matrice associata a df_p in tali basi è la matrice Jacobiana:

$$J_{\mathbb{R},p}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p) & \frac{\partial u_k}{\partial y_j}(p) \\ \frac{\partial v_k}{\partial x_j}(p) & \frac{\partial v_k}{\partial y_j}(p) \end{pmatrix};$$

analogamente, se fissiamo le basi $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_m},\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial \overline{z_m}}\right\}$ di $T_{\mathbb{C},p}(M)$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial w_1},\dots,\frac{\partial}{\partial w_n},\dots,\frac{\partial}{\partial \overline{w_1}},\dots,\frac{\partial}{\partial \overline{w_n}}\right\}$ di $T_{\mathbb{C},f(p)}(N)$, la matrice associata a df_p in tali basi è la matrice Jacobiana complessa:

$$J_{\mathbb{C},p}(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial w_k}{\partial z_j}(p) & \frac{\partial w_k}{\partial \overline{z_j}}(p) \\ \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial z_j}(p) & \frac{\partial \overline{w_k}}{\partial \overline{z_j}}(p) \end{pmatrix}.$$

Il Jacobiano complesso è una matrice della forma $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A}\end{smallmatrix}\right)$, con il blocco B nullo se la f è olomorfa. Per tale motivo, il blocco A si denota $J_p(f)$ e viene detto **Jacobiano olomorfo**. Sempre se f è olomorfa, valgono delle importanti relazioni fra i ranghi e i determinanti di tali Jacobiani, immediate da verificare: innanzitutto

$$\operatorname{rk}(J_{\mathbb{R},p}(f))=\operatorname{rk}(J_{\mathbb{C},p}(f))=2\operatorname{rk}(J_p(f))$$

e, se $m=n$,

$$\det(J_{\mathbb{R},p}(f))=\det(J_{\mathbb{C},p}(f))=|\det(J_p(f))|^2\geq 0.$$

Se inoltre f è localmente iniettiva in p, si ha che $\det(J_{\mathbb{R},p}(f))>0$ e quindi in un intorno di p, f mantiene l'orientazione. Perciò ogni atlante complesso è orientabile, perchè i cambi di carta hanno tutti il determinante positivo.
In realtà, ogni atlante complesso è effettivamente orientato: possiamo fare il pullback dell'orientazione standard di $\mathbb{C}^n$ tramite le carte. In particolare, l'orientazione di $\mathbb{C}^n$ data dalla $2n$-forma

$$\eta=dx_1\wedge dy_1\wedge\ldots\wedge dx_n\wedge dy_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n dz_1\wedge d\overline{z_1}\wedge\ldots\wedge dz_n\wedge d\overline{z_n}$$

può essere trasportata all'indietro sulla varietà tramite le carte di un atlante localmente finito e rincollata con una partizione dell'unità, costituendo una $2n$-forma di orientazione sulla varietà considerata.

I seguenti due teoremi, che non sono altro che la traduzione all'interno dell'analisi complessa dei teoremi della funzione implicita e della funzione inversa, vengono enunciati per aperti di $\mathbb{C}^n$; ma visto che entrambi sono risultati locali, restano validi anche su varietà complesse.

Teorema 2.2.5 (delle funzioni implicite olomorfe). *Siano* $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{O}_n$, *con* $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{i,j=1,\dots,k}\neq 0$. *Allora in un intorno di 0* $f_1(z)=\ldots=f_k(z)=0$ *se e solo se esistono* $w_1,\dots,w_k\in\mathcal{O}_{n-k}$ *tali che* $z_i=w_i(z_{k+1},\dots,z_n)$, *per* $1\leq i\leq k$.

Dimostrazione. Posto come al solito $z_j=x_j+iy_j$, si ha:

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_i}{\partial y_j} & \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial y_j}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial z_j} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial \overline{z_j}}\end{pmatrix}=\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)^2\neq 0,$$

quindi applicando il teorema delle funzioni implicite reali (nelle variabili $z_j,\overline{z_j}$), si ottengono $w_1,\dots,w_k$ funzioni C^∞ definite in un intorno di 0 dipendenti solo dalle variabili $z_{k+1},\dots,z_n$, $\overline{z_{k+1}},\dots,\overline{z_n}$. Tali $w_1,\dots,w_k$ sono proprio le funzioni che ci servono, cioè $f_1=\ldots=f_k=0\iff z_i=w_i(z_{k+1},\dots,z_n,\overline{z_{k+1}},\dots,\overline{z_n})$ per ogni $1\leq i\leq k$; quindi rimane solo da verificare che tali w_i siano olomorfe. Visto che $f_h(w_1,\dots,w_k,z_{k+1},\dots,z_n)\equiv 0$ in un intorno di 0, allora fissato $\alpha\geq k+1$ abbiamo:

$$0=\frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}}\left(f_h(w_1,\dots,w_k,z_{k+1},\dots,z_n)\right)=\sum_{j=1}^k\frac{\partial f_h}{\partial z_j}\frac{\partial w_j}{\partial \overline{z_\alpha}}+\underbrace{\sum_{j=1}^k\frac{\partial f_h}{\partial \overline{z_j}}\frac{\partial \overline{w_j}}{\partial \overline{z_\alpha}}}_{=0}+\underbrace{\frac{\partial f_h}{\partial \overline{z_\alpha}}}_{=0},$$

quindi al variare di $h = 1, \dots, k$, si ha un sistema lineare omogeneo $k \times k$, con matrice dei coefficienti $\left(\frac{\partial f_h}{\partial z_j}\right)_{h,j=1,\dots,k}$ invertibile nel solito intorno di 0, che ha dunque un'unica soluzione, quella nulla. Perciò $\frac{\partial w_j}{\partial \overline{z_\alpha}} \equiv 0$ in un intorno di 0 per ogni $\alpha \geq k+1$, cioè le w_j sono olomorfe nell'intorno di 0. $\square$

Teorema 2.2.6 (della funzione inversa olomorfa)**.** *Sia $f : U \to V$ olomorfa fra aperti di $\mathbb{C}^n$, e fissiamo $p \in U$ tale che $\det(J_p(f)) \neq 0$. Allora f è invertibile in un intorno di p e f^{-1} è olomorfa.*

Dimostrazione. Fissiamo coordinate $z_1, \dots, z_n$ in partenza e $w_1, \dots, w_n$ in arrivo, tali che $w_i = f_i(z)$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Visto che $\det(J_{\mathbb{R},p}(f)) = |\det(J_p(f))|^2 \neq 0$, possiamo applicare il teorema della funzione inversa reale, per ottenere che f è invertibile in un intorno di p e $f^{-1} = f^{-1}(w_1, \dots, w_n, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_n})$ è C^∞; inoltre risulta che $z_j = f_j^{-1}(w, \overline{w})$ per ogni $1 \leq j \leq n$. Ancora una volta basta far vedere che f^{-1} è olomorfa. Dall'uguaglianza $f^{-1}(f(z)) \equiv z$, si ha per ogni $1 \leq \alpha \leq n$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}} \left(f_i^{-1}(f(z))\right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \overline{z_\alpha}}}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial \overline{w_j}} \frac{\partial \overline{w_j}}{\partial \overline{z_\alpha}},$$

quindi come prima abbiamo un sistema lineare omogeneo $n \times n$, con matrice dei coefficienti $\left(\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial \overline{z_\alpha}}\right)_{j,\alpha=1,\dots,n} = \overline{\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha}\right)}_{j,\alpha=1,\dots,n}$ invertibile in un intorno di p, che ha dunque un'unica soluzione, quella nulla. Da questo segue che anche f^{-1} è olomorfa. $\square$

Proposizione 2.2.7. *Sia $f : U \to V$ olomorfa fra aperti di $\mathbb{C}^n$ iniettiva. Allora, per ogni $p \in U$, $\det(J_p(f)) \neq 0$, cioè f^{-1} è olomorfa.*

Dimostrazione. Lo facciamo per induzione, essendo il caso $n = 1$ ovvio (addirittura basta la locale iniettività). Per $n \geq 2$, sia k il rango del Jacobiano olomorfo $J_p(f)$. Supponiamo per assurdo che $0 < k < n$. Allora senza perdita di generalità possiamo supporre che il minore $k \times k$ di $J_p(f)$ invertibile sia il minore $k \times k$ in alto a sinistra, cioè $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1,\dots,k}$ è invertibile. Posto $z'_j = f_j(z)$ per $j = 1, \dots, k$ e $z'_j = z_j$ per $j > k$, il teorema della funzione implicita ci assicura che le $z'_1, \dots, z'_n$ sono coordinate olomorfe in un intorno di p. Detto $C = \{z'_1 = \ldots = z'_k = 0\}$, f è una mappa biunivoca fra C e il luogo di zeri $\{w_1 = \ldots = w_k = 0\}$; inoltre, in queste nuove coordinate, il Jacobiano olomorfo si scrive:

$$J_p(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline B & A \end{array}\right),$$

dove $A = J_p(f_{|C})$. Ma essendo il rango di $J_p(f)$ uguale a $k < n$, necessariamente $J_p(f_{|C})$ non è invertibile, assurdo per ipotesi induttiva.
Perciò $k = 0$ o $k = n$, cioè se $J_p(f)$ non è invertibile, allora è identicamente 0. Ma su $\{J_p(f) = 0\} = \{J_{\mathbb{R},p}(f) = 0\}$, f è localmente costante, ed essendo $\{J_p(f) = 0\}$ il luogo di zeri di una funzione olomorfa in più variabili, non è fatto di punti isolati; dunque f è costante sulle componenti connesse di $\{J_p(f) = 0\}$, da cui necessariamente $k = n$ per iniettività di f. $\square$

Come conseguenza di tali risultati, siamo in grado di dare una migliore descrizione locale delle sottovarietà complesse S^k di una varietà complessa M^n; infatti S è localmente:

- Immagine di un aperto U di $\mathbb{C}^k$ tramite una funzione $\varphi : U \to M$ olomorfa tale che $\operatorname{rk}(J_p(\varphi)) = k$ per ogni $p \in U$;

- Luogo di zeri di funzioni olomorfe $f_1, \dots, f_{n-k} : V \to \mathbb{C}$, dove V è un aperto di M contenente p e, detta $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : V \to \mathbb{C}^{n-k}$, $\mathrm{rk}(J_p(f)) = n-k$ per ogni $p \in V$.

Chiudiamo la sezione con una brevissima trattazione sui punti singolari e non singolari di varietà analitiche, in cui enunceremo alcuni importanti risultati che però non dimostreremo.

Definizione 2.2.9. Sia V una sottovarietà analitica di una varietà complessa M^n. $p \in V$ si dice **liscio** o **non singolare** se in un intorno di p in V, V si scrive come luogo di zeri di $n-k$ funzioni olomorfe con Jacobiano di rango massimo (cioè in un intorno di p in V, V è sottovarietà complessa di dimensione k). Altrimenti, il punto p si dice **singolare**.

Denoteremo con V^* l'insieme dei punti lisci di V, e con V^s l'insieme dei punti singolari di V. Valgono i seguenti fatti, che non dimostriamo:

Teorema 2.2.8. *1. V è sottovarietà complessa di M se e solo se $V = V^*$.*

2. V^* è unione disgiunta di sottovarietà complesse.

3. Se V^* è connesso, allora è sottovarietà complessa di dimensione k. In tale caso, poniamo $\dim(V) = \dim(V^*)$.

4. V^s è contenuto in una sottovarietà analitica di M diversa da tutto V.

5. V^* è connesso se e solo se V è irriducibile.

6. Se p è punto liscio di V, allora V è irriducibile in p.

Esempio. Consideriamo la cubica cuspidata $V = \{z_1^3 - z_2^2 = 0\}$. Il Jacobiano dell'equazione che definisce V ha rango 1 se e solo se $(z_1, z_2) \neq (0,0)$, da cui 0 è l'unico punto singolare, cioè $V^* = V \setminus \{0\}$. Inoltre la mappa $f : \mathbb{C} \to V$ tale che $f(t) = (t^2, t^3)$, ristretta a $f : \mathbb{C}^* \to V^*$, è un biolomorfismo con inversa $t = \frac{z_1}{z_2}$, quindi $V^* \cong \mathbb{C}^*$ è connesso e perciò V è irriducibile. Si può generalizzare questo esempio mostrando che la varietà $V_{mn} = \{z_1^m - z_2^n = 0\}$ è irriducibile se e solo se $(m,n) = 1$, cioè se e solo se m, n sono coprimi.

2.3 Funzioni meromorfe, divisori e gruppo di Picard

Sia M^n una varietà complessa, $U \subseteq M$ un aperto, decomposto come $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ nelle sue componenti connesse. Assumendo M localmente compatto, le componenti connesse U_i sono aperte. Perciò ogni anello $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_M)$ è un dominio, e vale l'uguaglianza

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_M) = \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_M).$$

Possiamo considerare i campi dei quozienti $K(\Gamma(U_i, \mathcal{O}_M)) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_M),\ g \not\equiv 0 \right\} /_{\sim}$, con la solita relazione $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \iff fg' = f'g$.
Consideriamo il prefascio (non canonico) $\mathcal{M}_M : U \mapsto \prod_{i \in I} K(\Gamma(U_i, \mathcal{O}_M))$; sia poi $\mathscr{M}_M = \mathrm{Sheaf}(\mathcal{M}_M)$ la fascificazione di $\mathcal{M}_M$, detto **fascio dei germi delle funzioni meromorfe** su M. $\mathscr{M}_M$ è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre,e le sue sezioni si chiamano appunto **funzioni meromorfe**. In modo analogo definiamo il fascio di gruppi $\mathscr{M}_M^*$, in cui il numeratore f dei germi non è identicamente nullo. Quindi una $F \in \Gamma(U, \mathscr{M}_M)$, detta **funzione meromorfa** su U, è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di U, e di funzioni $f_\alpha, g_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M)$, con $g_\alpha \not\equiv 0$, tali che, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\frac{f_\alpha}{g_\alpha} = \frac{f_\beta}{g_\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta$, cioè $f_\alpha g_\beta = f_\beta g_\alpha$. Inoltre due tali dati, siano essi $\{U_\alpha, f_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\{U'_\beta, f'_\beta, g'_\beta\}_{\beta \in J}$, danno la stessa funzione meromorfa se e solo se, per ogni

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $f'_\beta g_\alpha = g'_\beta f_\alpha$ su $U_\alpha \cap U_\beta$.
Chiaramente il fascio $\mathcal{O}_M$ si immerge naturalmente in $\mathscr{M}_M$, come l'insieme dei germi delle funzioni meromorfe con denominatore identicamente 1; analogamente $\mathcal{O}_M^*$ si immerge in $\mathscr{M}_M^*$, come l'insieme dei germi delle funzioni meromorfe con denominatore identicamente 1 e numeratore mai nullo.

La grande differenza che intercorre fra le funzioni meromorfe in una variabile e le funzioni meromorfe in più variabili è sostanzialmente l'estensione di tali funzioni sul luogo di zeri del denominatore: se infatti in una variabile un'estensione continua è a volte costrubile (a valori sulla sfera di Riemann), in più variabili un'estensione continua è sempre impossibile da costruire, visto che i luoghi di zeri di funzioni olomorfe in più variabili non sono discreti. Ad esempio, $\frac{z_1}{z_2}$ è una ben definita funzione meromorfa in $\Gamma(\mathbb{C}^2, \mathscr{M}_{\mathbb{C}^2})$, che però non ammette nessun tipo di estensione continua in $(0,0)$. D'altra parte, è altrettanto difficile definire puntualmente gli zeri e i poli di una funzione meromorfa, in quanto essa può avere rappresentazioni diverse con diversi zeri del numeratore e del denominatore; ad esempio $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1^2}{z_1 z_2}$, ma i luoghi di zeri del numeratore e del denominatore cambiano.
Un altro problema che sorge nella definizione di zeri e poli di una funzione meromorfa consiste nello specificare il comportamento di una tale funzione in un intorno di uno zero o di un polo: ad esempio, $\frac{z_1^3}{z_2^2}$ e $\frac{z_1}{z_2^5}$ hanno gli stessi luoghi di zeri del numeratore e del denominatore, ma si comportano in modo sostanzialmente diverso intorno a $(0,0)$. Per tutti questi motivi, risulta più funzionale definire zeri e poli di una funzione meromorfa come sottovarietà analitiche con certe molteplicità.

Definizione 2.3.1. $V \subseteq M$ ipersuperficie analitica (quindi V^* è una sottovarietà complessa di dimensione $n-1$). Fissato $p \in M$, esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ contenente p e una $h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)$ tale che $V \cap U = \{h = 0\}$. Una tale h si dice **funzione di definizione locale** di V in p se, per ogni $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)$ nulla su $V \cap U$, $h \mid g$ in $(\mathcal{O}_M)_q$ per ogni $q \in U$.

Una funzione di definizione locale esiste sempre, perchè se $\widetilde{h}$ è una qualunque funzione olomorfa che definisce V in un intorno U di p, possiamo fattorizzare $\widetilde{h} = \prod h_i^{k_i}$ e scegliere $h = \prod h_i$, che funziona. Inoltre la funzione di definizione locale è unica a meno di invertibili in $(\mathcal{O}_M)_p$, e dà una funzione di definizione locale di V in ogni punto dell'intorno U considerato.
Nel caso in cui il punto p fissato sia liscio, allora la funzione di definizione locale h di V in p è irriducibile in $(\mathcal{O}_M)_p$.

Definizione 2.3.2. $V \subseteq M$ ipersuperficie analitica irriducibile, $p \in V^*$ e $h \in (\mathcal{O}_M)_p$ funzione di definizione locale di V in p. Se $f \in (\mathcal{O}_M)_p$, si definisce **ordine di annullamento** di f lungo V in p il numero:

$$\mathrm{ord}_{V,p}(f) = \max\{a \in \mathbb{N} \mid h^a | f \text{ in } (\mathcal{O}_M)_p\}.$$

Tale ordine è ben definito grazie all'unicità di h (a meno di invertibili in $(\mathcal{O}_M)_p$).

In p vale una relazione del tipo $f = h^a f'$, con $a = \mathrm{ord}_{V,p}(f)$ e h, f' coprimi in $(\mathcal{O}_M)_p$; tale relazione si estende a un intorno di p, mantenendo h funzione di definizione locale e h, f' coprimi, quindi si ha che $\mathrm{ord}_{V,p}(f)$ è localmente costante intorno a p su V^*. D'altra parte, V^* è connesso, quindi è ben definito il numero $\mathrm{ord}_V(f) = \mathrm{ord}_{V,p}(f)$ indipendente da p per ogni f olomorfa, in un intorno di V.
Visto che chiaramente vale l'uguaglianza $\mathrm{ord}_{V,p}(fg) = \mathrm{ord}_{V,p}(f) + \mathrm{ord}_{V,p}(g)$ per ogni f, g olomorfe, appare naturale l'estensione della definizione di ordine di annullamento alle funzioni meromorfe: se infatti F è meromorfa in un intorno di V, e $p \in V^*$, intorno a p possiamo scrivere $F = \frac{f}{g}$, con $f, g \in (\mathcal{O}_M)_p$ e g non identicamente nulla, e porre $\mathrm{ord}_{V,p}(F) = \mathrm{ord}_{V,p}(f) - \mathrm{ord}_{V,p}(g)$.
Tale ordine è ben definito, perchè se $\frac{f'}{g'} = \frac{f}{g}$ è un'altra rappresentazione di F, si ha che $f'g = fg'$

e dunque $\text{ord}_{V,p}(f') + \text{ord}_{V,p}(g) = \text{ord}_{V,p}(f) + \text{ord}_{V,p}(g')$.
Infine anche $\text{ord}_{V,p}(F)$ è localmente costante per ogni F meromorfa, in quanto nelle intersezioni di due intorni le due scritture di F coincidono; perciò data la connessione di V^* si può definire $\text{ord}_V(F)$. Se $\text{ord}_V(F) > 0$, si dice che V è **zero di F di molteplicità** $\text{ord}_V(F)$; se invece $\text{ord}_V(F) < 0$, si dice che V è **polo di F di molteplicità** $-\text{ord}_V(F)$.
L'uguaglianza $\text{ord}_V(FG) = \text{ord}_V(F) + \text{ord}_V(G)$ rimane valida per qualunque funzioni F, G meromorfe.

Definizione 2.3.3. Un **divisore** D su M è una somma formale localmente finita $D = \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i V_i$, dove $\{V_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ è l'insieme delle ipersuperfici analitiche irriducibili di M e gli a_i sono numeri interi. I divisori formano un gruppo abeliano, denotato $\text{Div}(M)$.

Se M è compatta, allora le somme formali che definiscono i divisori sono finite, dunque il gruppo dei divisori è il gruppo libero:

$$\text{Div}(M) = \langle V_i \mid i \in \mathcal{I}\rangle = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{Z}V_i.$$

Definizione 2.3.4. Un divisore $D \neq 0$ si dice **effettivo**, e si denota $D \geq 0$, se la scrittura $D = \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i V_i$ è tale che $a_i \geq 0$ per ogni $i \in \mathcal{I}$.

Definizione 2.3.5. Sia $F \in H^0(M, \mathscr{M}_M^*)$ una funzione meromorfa definita globalmente e non identicamente nulla. Definiamo $(F) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \text{ord}_{V_i}(F)V_i \in \text{Div}(M)$ il **divisore associato** a F. Tale somma è localmente finita perchè localmente i luoghi di zeri di funzioni olomorfe sono unioni di un numero finito di componenti irriducibili.

Un'importante osservazione è che F è olomorfa se e solo se $(F) \geq 0$. Infatti questo ci dà una mappa $(\cdot) : H^0(M, \mathscr{M}_M^*) \to \text{Div}(M)$ che risulta essere un omomorfismo con nucleo $\text{Ker}((\cdot)) = H^0(M, \mathcal{O}_M^*)$. A questo punto viene naturale chiedersi a quale sottogruppo di $\frac{H^0(M,\mathscr{M}_M^*)}{H^0(M,\mathcal{O}_M^*)}$ corrisponda $\text{Div}(M)$; la prossima proposizione dà una risposta generale a tale domanda.

Proposizione 2.3.1. *Il gruppo dei divisori* $\text{Div}(M)$ *è isomorfo a* $H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$.

Dimostrazione. Vogliamo costruire due omomorfismi $\text{Div}(M) \to H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$ e $H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right) \to \text{Div}(M)$, uno l'inverso dell'altro. Cominciamo col primo: sia $D \in \text{Div}(M)$, $D = \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i V_i$, e sia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un ricoprimento aperto di M; su ogni U_α, ogni V_i ha una funzione di definizione locale non identicamente nulla, che denoteremo $h_{i,\alpha} \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M)$. Definiamo $h_\alpha = \prod_{i\in\mathcal{I}} h_{i,\alpha}^{a_i}$; tale prodotto è localmente finito, quindi h_α è una ben definita funzione meromorfa in $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{M}_M^*)$. Le h_α definiscono un elemento di $\Gamma\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$, in quanto, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $h_{i,\alpha}$ e $h_{i,\beta}$ differiscono per una $f_{i,\alpha,\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*)$ su $U_\alpha \cap U_\beta$, quindi h_α e $h_\beta = h_\alpha \left(\prod f_{i,\alpha,\beta}\right)$ coincidono in $\Gamma\left(U_\alpha \cap U_\beta, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$. Inoltre tale associazione $\text{Div}(M) \to H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$ è un omomorfismo, in quanto su $\text{Div}(M)$ c'è una struttura additiva, mentre su $H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$ c'è una struttura moltiplicativa.
Viceversa, sia $f \in H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right)$, cioè il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di M e di funzioni $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{M}_M^*)$ tali che, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_M^*)$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Per ogni ipersuperficie analitica irriducibile $V \subseteq M$, si ha che $\text{ord}_{V\cap U_\alpha}(f_\alpha) = \text{ord}_{V\cap U_\beta}(f_\beta)$, quindi si può definire $D = \sum_{i\in\mathcal{I}} \text{ord}_{V_i\cap U_\alpha}(f_\alpha)V_i$, dove per ogni $i \in \mathcal{I}$ si sceglie un qualunque α tale che $U_\alpha \cap V_i \neq \emptyset$; tale somma è localmente finita, e dunque costituisce un ben definito divisore $D \in \text{Div}(M)$. Anche in questo caso è immediato vedere che tale mappa $H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right) \to \text{Div}(M)$ è un omomorfismo, ed è altrettanto evidente che sia l'inversa della mappa definita precedentemente. □

Il precedente risultato assume un'importanza fondamentale in vista della seguente osservazione. Abbiamo una successione esatta:

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \hookrightarrow \mathscr{M}_M^* \longrightarrow \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*} \longrightarrow 1,$$

che induce una successione esatta lunga in coomologia:

$$1 \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^0(M, \mathscr{M}_M^*) \longrightarrow H^0\left(M, \frac{\mathscr{M}_M^*}{\mathcal{O}_M^*}\right) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow \dots$$

Il terzo termine può essere identificato con $\mathrm{Div}(M)$, rendendo più chiara la precedente successione esatta da un punto di vista geometrico. Il lavoro che ci proponiamo ora di fare è interpretare il quarto termine $H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$ sempre da un punto di vista geometrico, per estrarre informazioni topologiche dalla successione algebrica di sopra.
Per farlo, avremo bisogno di richiamare alcuni concetti sui fibrati vettoriali complessi, su cui però non ci dilungheremo troppo.

Definizione 2.3.6. Sia M una varietà complessa. Un **fibrato vettoriale complesso** su M di rango k è una coppia (E, π), dove E è una varietà differenziabile e $\pi : E \to M$ è surgettiva, C^∞, tale che, per ogni $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(x)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione k e π è localmente banale, cioè, per ogni $x \in M$, esiste un aperto $U \subseteq M$ aperto contenente x e una mappa $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commuta, e per ogni $y \in U$, $\varphi_y = (\varphi_U)_{|E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{C}^k$ è un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare.
φ_U si dice **banalizzazione** del fibrato su U, π si dice **proiezione** ed E **spazio totale**.

Definizione 2.3.7. Un **morfismo di fibrati vettoriali complessi** su M è una mappa $F : E \to E'$ C^∞ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

commuta e $F_x = F_{|E_x} : E_x \to E'_x$ è $\mathbb{C}$-lineare per ogni $x \in M$.

Chiaramente un morfismo di fibrati è un isomorfismo (cioè invertibile nella categoria dei fibrati vettoriali complessi) se e solo se F_x è un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare per ogni $x \in M$.

Esempi.

- Il **fibrato costante** $M \times \mathbb{C}^k$ è un fibrato vettoriale complesso di rango k con proiezione la proiezione sulla prima componente. Qualunque fibrato isomorfo al fibrato costante si dice **fibrato banale**.

- Il **fibrato tangente complesso** $T_{\mathbb{C}}(M) = \bigcup_{x \in M} T_{\mathbb{C},x}(M)$ e il **fibrato cotangente complesso** $T^*_{\mathbb{C}}(M) = \bigcup_{x \in M} T^*_{\mathbb{C},x}(M)$ sono fibrati vettoriali complessi.

- Il **fibrato tangente olomorfo** $T'(M) = \bigcup_{x \in M} T'_x(M)$ e il **fibrato cotangente olomorfo** $T'(M)^* = \bigcup_{x \in M} T'_x(M)^*$ sono fibrati vettoriali complessi.

Date banalizzazioni φ_U, φ_V di un fibrato E sugli aperti $U, V \subseteq M$ con intersezione $U \cap V \neq \emptyset$, possiamo considerare la mappa di transizione $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$; essa si scrive

$$\begin{array}{rccc} \varphi_U \circ \varphi_V^{-1}: & \varphi_V(U \cap V) & \longrightarrow & \varphi_U(U \cap V) \\ & (x, v) & \longmapsto & (x, g_{U,V}(x)(v)) \end{array}$$

dove $g_{U,V}(x) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^k) = \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ per ogni $x \in U \cap V$. Perciò abbiamo una funzione C^∞ $g_{U,V} : U \cap V \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$, che viene chiamata **funzione di transizione** di E fra U e V.
Le funzioni di transizione rispettano relazioni abbastanza forti fra di sè, che però sono estremamente facili da dimostrare. In particolare:

- $g_{U,U}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k}$ per ogni $x \in U$;
- $g_{U,V}(x) \circ g_{V,U}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k}$ per ogni $x \in U \cap V$;
- $g_{U,V}(x) \circ g_{V,W}(x) \circ g_{W,U}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^k}$ per ogni $x \in U \cap V \cap W$.

Inoltre le funzioni di transizione sono particolarmente utili perchè riescono a determinare il fibrato E a meno di isomorfismo. Se infatti $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento aperto di M, e per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ sono date delle funzioni C^∞ $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ che rispettano le tre relazioni precedenti (in realtà bastano le ultime due, dato che la prima segue da queste), allora, detto E il rincollamento delle $U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ tramite le funzioni $g_{\alpha\beta}$, cioè

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{C}^k /_\sim,$$

dove $U_\alpha \times \mathbb{C}^k \ni (x, v) \sim (y, w) \in U_\beta \times \mathbb{C}^k$ se e solo se $x = y$ e $w = g_{\alpha\beta}(x)(v)$, E risulta un fibrato vettoriale complesso con funzioni di transizione le $g_{\alpha\beta}$.

Un altro vantaggio che dà la descrizione di un fibrato tramite le sue funzioni di transizione è che abbiamo un criterio per stabilire se due fibrati sono isomorfi; la prossima proposizione chiarisce questo aspetto.

Proposizione 2.3.2. *Siano E, E' due fibrati vettoriali complessi, con proiezioni π, π' e funzioni di transizione rispettivamente $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta'}$, relative al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M, banalizzante per entrambi i fibrati. Allora E ed E' sono isomorfi se e solo se per ogni $\alpha \in I$ esiste una funzione C^∞ $F_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ tale che $g'_{\alpha\beta} = F_\alpha g_{\alpha\beta} F_\beta^{-1}$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Sia $F : E \to E'$ un isomorfismo di fibrati. Abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_{U_\alpha}"] \arrow[d, "f"'] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \arrow[d, "(\mathrm{id}, F_\alpha)"] \\ (\pi')^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi'_{U_\alpha}"'] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \end{tikzcd}$$

con $F_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ C^∞. La seconda componente di $\varphi'_{U_\alpha} \circ (\varphi'_{U_\beta})^{-1}$ è $g_{\alpha\beta}^{-1}$, cioè, prendendo opportunamente seconde componenti, si ha:

$$g'_{\alpha\beta} = \varphi'_{U_\alpha} \circ (\varphi'_{U_\beta})^{-1} = F_\alpha(\varphi_{U_\alpha} \circ f^{-1} \circ f \circ \varphi_{U_\beta}^{-1}) F_\beta^{-1} = F_\alpha g_{\alpha\beta} F_\beta^{-1}.$$

$\Leftarrow$) Su $\pi^{-1}(U_\alpha)$ poniamo $f = (\varphi'_{U_\alpha})^{-1} \circ (\mathrm{id}, F_\alpha) \circ \varphi_{U_\alpha}$; chiaramente tali funzioni si rincollano bene sulle intersezioni, quindi definiscono un isomorfismo di fibrati fra E ed E'.

$\square$

Esempi. Consideriamo $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con coordinate $[x_0, x_1]$, e con le solite carte $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$, con coordinate $y = \frac{x_1}{x_0}$ su U_0 e $x = \frac{x_0}{x_1}$ su U_1. Dato $k \in \mathbb{Z}$, consideriamo il fibrato vettoriale complesso $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ di rango 1 su $\mathbb{P}^1$ con le funzioni di transizione $g_{00} = g_{11} = \mathrm{id}$, $g_{10} : U_0 \cap U_1 \to \mathbb{C}^*$ tale che $g_{10}([x_0, x_1]) = \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^k$ e $g_{01} = g_{10}^{-1}$. Come già osservato sopra, il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ può essere ottenuto per rincollamento come

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) = (U_0 \times \mathbb{C}) \sqcup (U_1 \times \mathbb{C})/_\sim,$$

dove $([x_0, x_1], v) \sim \left([x_0, x_1], \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^k v\right)$.

Si possono descrivere in modo simile i fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ di rango 1 su $\mathbb{P}^n$: se $U_i = \{x_i \neq 0\}$ è l'i-esima carta coordinata di $\mathbb{P}^n$, il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ ha funzioni di transizione le $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ tali che $g_{ij}([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^k$.

Se $k = 0$, il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0)$ non è altro che il fibrato costante $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}$.

Nel caso dei fibrati di rango 1, le funzioni di transizione relative a un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M, siano esse $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$, sono funzioni C^∞ mai nulle, quindi formano una 1-cocatena Δ del fascio $(\mathcal{C}_M^\infty)^*$. Ma visto che

$$(\partial\Delta)_{U,V,W} = g_{V,W}\, g_{U,W}^{-1}\, g_{U,V} = g_{V,W}\, g_{W,U}\, g_{U,V} = 1,$$

si ha anche che Δ è un 1-cociclo, e definisce un elemento di $H^1(M, (\mathcal{C}_M^\infty)^*)$. Inoltre, funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ danno fibrati isomorfi se e solo se $g_{\alpha\beta} = \frac{F_\beta}{F_\alpha} g'_{\alpha\beta} = \partial F g'_{\alpha\beta}$, dove F è la 0-cocatena di $(\mathcal{C}_M^\infty)^*$ tale che $F_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ è la funzione che dà la relazione fra le funzioni di transizione; perciò i due insiemi di funzioni di transizione danno fibrati isomorfi se e solo se $[\Delta] = [\Delta'] \in H^1(M, (\mathcal{C}_M^\infty)^*)$.

Abbiamo così ottenuto un isomorfismo (per ora di insiemi, ma presto diventerà un isomorfismo di gruppi ponendo un'operazione sul secondo insieme) fra $H^1(M, (\mathcal{C}_M^\infty)^*)$ e $\{$classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi di rango 1 su $M\}$.

Esempio. Se $M = S^1$, non è difficile vedere che $H^1(S^1, (\mathcal{C}_{S^1}^\infty)^*)$ è banale. Infatti, se $\{U_1, U_2, U_3\}$ è il ricoprimento aperto di S^1 tale che $U_1 = \{0 < \theta < \pi\}$, $U_2 = \left\{\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi\right\}$ e $U_3 = \left\{\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{7}{3}\pi\right\}$, una qualunque 1-cocatena σ di $(\mathcal{C}_{S^1}^\infty)^*$ è il dato di $\sigma_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ tali che $\partial\sigma = 0$, cioè $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 1$ e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^{-1}$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq 3$. Ma se consideriamo la 0-cocatena τ di $(\mathcal{C}_{S^1}^\infty)^*$, data da $\tau_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ tale che

$$\tau_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{13}} & \text{su } U_1 \cap U_3 \\ 1 & \text{su } U_1 \cap U_2 \end{cases}, \qquad \tau_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{12}} & \text{su } U_1 \cap U_2 \\ 1 & \text{su } U_2 \cap U_3 \end{cases}, \qquad \tau_3 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{23}} & \text{su } U_2 \cap U_3 \\ 1 & \text{su } U_1 \cap U_3 \end{cases}$$

e completate in modo C^∞ altrove, è una facile verifica vedere che effettivamente $\partial\tau = \sigma$.

Ma allora, quanto visto prima ci assicura che tutti i fibrati in rette complesse (cioè i fibrati complessi di rango 1, di rango reale 2) su S^1 sono banali.

Il case reale, invece, è abbastanza diverso, in quanto $\mathbb{R}^*$, a differenza di $\mathbb{C}^*$, è sconnesso, e quindi non è possibile definire le τ_i precedenti in modo continuo quando le σ_{ij} assumono valori negativi. Con un ragionamento di questo tipo, cambiando opportunamente alcuni 1 in -1 nelle definizioni delle τ_i, si può far vedere che $H^1(S^1, (\mathcal{C}_{S^1,\mathbb{R}}^\infty)^*) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dove $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ corrisponde al fibrato banale del cilindro su S^1, mentre $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ corrisponde al fibrato del Möbius su S^1.

Come già osservato precedentemente, vorremmo dotare l'insieme dei fibrati vettoriali complessi di rango 1 di un'operazione che renda l'isomorfismo $H^1(M, (\mathcal{C}_M^\infty)^*) \cong \{$cl. di isom. di fibrati di rango 1 su $M\}$ un isomorfismo di gruppi. Richiamiamo quindi le principali operazioni che possono essere eseguite fra fibrati vettoriali; siano E, E' fibrati su M, con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$ e $g'_{\alpha\beta}$.

- E^* è un fibrato con funzioni di transizione $({}^t g_{\alpha\beta})^{-1}$. Si ha che $\mathrm{rk}(E^*) = \mathrm{rk}(E)$ e le fibre di E^* non sono altro che $(E^*)_x = (E_x)^*$;
- $E \oplus E'$ è un fibrato con funzioni di transizione $\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$. Si ha che $\mathrm{rk}(E \oplus E') = \mathrm{rk}(E) + \mathrm{rk}(E')$, e le fibre sono $(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$;
- $E \otimes E'$ è un fibrato con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} \otimes g'_{\alpha\beta}$. Si ha che $\mathrm{rk}(E \otimes E') = \mathrm{rk}(E) \cdot \mathrm{rk}(E')$, e le fibre sono $(E \otimes E')_x = E_x \otimes E'_x$;
- $\bigwedge^k E$ è un fibrato con funzioni di transizione $\bigwedge^k g_{\alpha\beta}$. Si ha che $\mathrm{rk}(\bigwedge^k E) = \binom{\mathrm{rk}(E)}{k}$ e le fibre sono $(\bigwedge^k E)_x = \bigwedge^k E_x$;
- $\det(E) = \bigwedge^k E$, dove $k = \mathrm{rk}(E)$, è un fibrato con funzioni di transizione $\det(g_{\alpha\beta})$ e le fibre sono $\mathbb{C}$.

Date queste caratterizzazioni, ci accorgiamo subito che $\otimes$ e * sono le uniche operazioni fra fibrati di rango 1 che danno come risultato un altro fibrato di rango 1; inoltre, in tale caso particolare, E^* ha funzioni di transizione $\frac{1}{g_{\alpha\beta}}$, in quanto in dimensione 1 la trasposizione è ininfluente, e $E \otimes E'$ ha funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}$, in quanto in dimensione 1 il tensore fra due applicazioni è semplicemente il prodotto. Da questo segue subito:

Proposizione 2.3.3. *Siano E, E' fibrati di rango 1. Allora $E \otimes E^*$ è il fibrato banale e, se $E \cong E_1$ e $E' \cong E'_1$, allora $E^* \cong E_1^*$ e $E \otimes E' \cong E_1 \otimes E_1^* \cong E' \otimes E$.*

La precedente proposizione definisce una struttura di gruppo sull'insieme {cl. di isom. di fibrati di rango 1 su M}, con le ovvie definizioni

$$[E] + [E'] = [E \otimes E'], \qquad -[E] = [E^*].$$

Tale gruppo è abeliano, e il suo elemento neutro è rappresentato dal fibrato costante. É una verifica controllare che tale struttura di gruppo rende il già citato isomorfismo un isomorfismo di gruppi.

Osserviamo anche che, per $k \geq 1$, valgono le uguaglianze:

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))^{\otimes k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k), \qquad (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^*)^{\otimes k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-k);$$

(basta guardare le funzioni di transizione). Perciò, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo che:

$$[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)] = k[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)].$$

Definizione 2.3.8. (E, π) fibrato vettoriale complesso di rango k su M, $U \subseteq M$ aperto. Una **sezione** di E su U è una $\sigma : U \to E$ C^∞ tale che $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$.

Perciò $\sigma(x) \in E_x$ per ogni $x \in U$. Inoltre le sezioni di E su U si indicano con $\Gamma(U, E)$; $\Gamma(U, E)$ è un gruppo abeliano e un $\Gamma(U, \mathcal{C}^\infty_M)$-modulo.

Definizione 2.3.9. (E, π) fibrato vettoriale complesso di rango k su M, $U \subseteq M$ aperto. Un **frame** di E su U è il dato di k sezioni $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Gamma(U, E)$ tali che, per ogni $x \in U$, $\{\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)\}$ è base di E_x.

É importante osservare che dare un frame di E su U è come dare una banalizzazione di E su U. Infatti, se $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è una banalizzazione, e considerata $e_1, \dots, e_k$ la base canonica di $\mathbb{C}^k$, le mappe σ_i, definite come $\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}((x, e_i))$, forniscono un frame di E su U. Viceversa, se $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ è un frame di E su U, allora, preso $y \in \pi^{-1}(U)$, e chiamato $x = \pi(y)$, possiamo scrivere $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i(x)\sigma_i(x)$ per certe $\lambda_1, \dots, \lambda_k : U \to \mathbb{C}$ C^∞, da cui $\varphi_U(y) = (x, (\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x))) : U \to U \times \mathbb{C}^k$ è una banalizzazione di E su U.
Dunque E è banale se e solo se esiste una banalizzazione globale, cioè se e solo se esiste un frame di E su M.

Un'altra importante osservazione è che, se $U, V \subseteq M$ sono aperti non disgiunti, e σ_U, σ_V sono rispettivamente frame su U e su V, la matrice del cambio di base (punto per punto) da σ_U a σ_V è esattamente la funzione di transizione g_{UV}.

Adesso occupiamoci di vedere come si comporta una generica sezione di un fibrato in termini di una banalizzazione φ_U di E su un aperto $U \subseteq M$. Sia $x \in U$ e scegliamo $\sigma \in \Gamma(U, E)$; allora si ha che $\varphi_U \circ \sigma(x) = (x, F_U(x))$, dove $F_U : U \to \mathbb{C}^k$ è C^∞. Ma se $F_U(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$, allora possiamo scrivere:

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x)\varphi_U^{-1}(x, e_i).$$

Adesso, per la precedente osservazione, se $U, V \subseteq M$ sono aperti non disgiunti, e $\sigma \in \Gamma(U \cup V, E)$, allora su $U \cap V$ si ha che $F_U = g_{UV} F_V$, dove F_U, F_V sono le mappe costruite come sopra.
Dunque in generale, se $U \subseteq M$ è un aperto, e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento aperto di U banalizzante per E, si ha una corrispondenza biunivoca:

$$\Gamma(U, E) \longleftrightarrow \left\{ \{F_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k\}_{\alpha \in I} \ C^\infty \mid F_\alpha = g_{\alpha\beta} F_\beta \ \forall U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \right\} /_\sim,$$

dove $\{U_\alpha, F_\alpha\} \sim \{U'_\beta, F'_\beta\}$ se e solo se $F_\alpha = g_{U_\alpha, U'_\beta} F'_\beta$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.
Il prefascio $\Gamma_E : U \to \Gamma(U, E)$ su M è canonico, e poniamo $\mathcal{C}^\infty(E) = \mathrm{Sheaf}(\Gamma_E)$. É immediato vedere che le sezioni di $\mathcal{C}^\infty(E)$ sono le stesse delle sezioni del fibrato. Dunque, ad esempio, si ha l'uguaglianza $\Gamma(U, M \times \mathbb{C}^k) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}^k)$, da cui deriva l'altra uguaglianza:

$$\mathcal{C}^\infty(M \times \mathbb{C}^k) = (\mathcal{C}^\infty_M)^{\otimes k}.$$

Allo stesso modo ogni fibrato vettoriale E è localmente banale, quindi $\mathcal{C}^\infty(E)$ è un fascio di $\mathcal{C}^\infty_M$-moduli localmente isomorfo a $(\mathcal{C}^\infty_M)^{\otimes k}$. Un tale fascio si dice **localmente libero di rango** k. Infine abbiamo un'ultima corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Fibrati vettoriali} \\ \text{complessi su } M \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Fasci di } \mathcal{C}^\infty_M\text{- moduli} \\ \text{localmente liberi} \end{matrix} \right\}.$$

Infatti abbiamo già un modo di associare a un fibrato E il fascio $\mathscr{E} = \mathcal{C}^\infty(E)$; viceversa, se $\mathscr{E}$ è un fascio di $\mathcal{C}^\infty_M$-moduli localmente libero, allora esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M e isomorfismi $\psi_\alpha : \mathscr{E}_{|U_\alpha} \to (\mathcal{C}^\infty_{U_\alpha})^{\otimes k}$, tali che, per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'isomorfismo $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ è dato da una matrice $k \times k$ di funzioni C^∞ su $U \cap V$, invertibile punto per punto, e tali che gli isomorfismo $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ verificano le tre proprietà delle funzioni di transizione. Ma allora possiamo costruire un fibrato E di rango k su M, e tale associazione $\mathscr{E} \mapsto E$ è proprio l'inversa dell'associazione precedente.
Spesso E ed $\mathscr{E}$ si confondono, e potremmo scrivere $H^p(M, E)$ al posto di $H^p(M, \mathscr{E})$.

A questo punto ci siamo accorti che questa teoria dei fibrati vettoriali complessi descrive molto bene l'ambiente che stavano trattando prima di aprire questa sezione; per completare tale correlazione vogliamo ricostruire la stessa teoria dei fibrati complessi aggiungendo ipotesi di olomorfia dove necessario, in modo da creare una precisa controparte geometrica di $H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$.

Definizione 2.3.10. Un fibrato vettoriale complesso (E, π) su M si dice **olomorfo** se E è una varietà complessa tale che, per ogni $x \in M$, esiste una banalizzazione $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ olomorfa su un intorno U contenente x, e la proiezione $\pi : E \to M$ è olomorfa.

Chiedere che le banalizzazioni siano olomorfe è esattamente equivalente a chiedere che le funzioni di transizione siano olomorfe. Inoltre i fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ sono olomorfi.

Definizione 2.3.11. Un **morfismo** di fibrati olomorfi è un morfismo di fibrati vettoriali complessi che è anche olomorfo. Inoltre le **sezioni** di fibrati vettoriali olomorfi sono sezioni di fibrati vettoriali complessi che sono anche olomorfe, cioè sono localmente rappresentate da $F_U : U \to \mathbb{C}^k$ olomorfe. Il fascio dei germi delle sezioni olomorfe su un fibrato olomorfo si indica $\mathcal{O}(E)$; inoltre, se $\mathrm{rk}(E) = 1$, il fibrato si dice **line bundle**.

Gli $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ sono line bundle. D'altra parte, le operazioni * e $\otimes$ definire fra fibrati vettoriali complessi sono interne alla categoria dei fibrati olomorfi.

Esempi.
- Il fibrato tangente olomorfo $T'(M)$ è un fibrato olomorfo, perchè su ogni $U \subseteq M$ aperto ammette un frame, dato da $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$;
- Il fibrato delle 1-forme olomorfe $\Lambda^1_M = (T'(M))^*$ è un fibrato olomorfo, con frame dato dalle 1-forme $dz_1, \dots, dz_n$;
- I fibrati delle p-forme olomorfe Ω^p_M è un fibrato olomorfo per ogni $1 \leq p \leq \dim(M)$;
- In particolare, se $n = \dim(M)$, il fibrato delle n-forme olomorfe $K_M = \Omega^n_M$ è detto **fibrato canonico** di M ed è un line bundle.

La prossima osservazione mostra che le sezioni globali olomorfe (non nulle) di un fibrato olomorfo possono o meno esistere; con un ragionamento analogo si potrebbe mostrare lo stesso risultato per ogni $\mathbb{P}^n$.

Osservazione. Il fibrato olomorfo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ ammette sezioni globali non nulle se e solo se $k > 0$.

Dimostrazione. Posto come al solito $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$, dove mettiamo su U_0 la coordinata $x = \frac{x_1}{x_0}$ e su U_1 la coordinata $y = \frac{x_0}{x_1}$, si ha che una sezione $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k))$ è data da $F_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ e $F_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ olomorfe tali che $F_1(y) = \left(\frac{1}{x}\right)^k F_0(x)$ su $U_0 \cap U_1$. Se $k > 0$, basta prendere $F_0(x) = x^k$ e $F_1(y) = 1$. Se invece $k = 0$, F_0, F_1 si rincollano a una funzione olomorfa globale su $\mathbb{P}^1$, che per compattezza è costante, dunque $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(0)) = \mathbb{C}$.
Infine, se $k < 0$, su $U_0 \cap U_1 \cong \mathbb{C}^*$ vale la relazione $F_1\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-k} F_0(x)$, e guardando le serie di Laurent si vede che può valere solo se $F_0 = F_1 = 0$. $\square$

Esempi.
- Il fibrato tangente olomorfo $T'(\mathbb{P}^1)$ ha frame $\frac{\partial}{\partial x}$ su U_0 e $\frac{\partial}{\partial y}$ su U_1, quindi, visto che $\frac{\partial}{\partial y} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x}$, si ha che $T'(\mathbb{P}^1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$;
- Il fibrato $\Omega^1_{\mathbb{P}^1}$ ha frame dx su U_0 e dy su U_1, quindi, visto che $dy = -\frac{1}{x^2} dx$, si ha che $\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Questo mostra che non esistono 1-forme olomorfe globali su $\mathbb{P}^1$;
- $K_{\mathbb{P}^1} = \Omega^1_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Vedremo in seguito che $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.

Definizione 2.3.12. Il gruppo $\{$classi di isom. di line bundles su $M\}$, dotato dell'usuale struttura di gruppo, si chiama **gruppo di Picard** di M e si indica con $\mathrm{Pic}(M)$.

Con una dimostrazione completamenta analoga a quella relativa al caso C^∞, si può mostrare che $\mathrm{Pic}(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$. Inoltre l'inclusione

$$\mathcal{O}^*_M \hookrightarrow (\mathcal{C}^\infty_M)^*,$$

completata opportunamente alla ovvia successione esatta, produce una mappa all'interno della successione esatta lunga:

$$H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^1(M, (\mathcal{C}_M^\infty)^*),$$

che non è però necessariamente iniettiva. Inoltre un fibrato olomorfo non banale potrebbe essere banale dal punto di vista C^∞.

Finalmente siamo giunti a una successione esatta lunga del tipo:

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^0(M, \mathscr{M}_M^*) \xrightarrow{(\cdot)} \mathrm{Div}(M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M) \longrightarrow \dots$$

Nella prossima parte della sezione vedremo come interpretare l'ultima mappa $\mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M)$ da un punto di vista geometrico.

Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$, $D = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i V_i$. Consideriamo un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M tale che ogni V_i ha su ogni U_α una funzione di definizione locale $h_{\alpha,i}$. Il prodotto $h_\alpha = \prod_{i \in \mathcal{I}} h_{\alpha,i}^{a_i} \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{M}_M^*)$ è localmente finito, ed è la funzione di definizione locale di D su U_α. Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\frac{h_\alpha}{h_\beta}$ è olomorfa mai nulla e dà un 1-ciclo di $\mathcal{O}_M^*$, cioè un line bundle su M con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$. D'altra parte, se h'_α sono altre funzioni di definizione locale per D su U_α, allora $h'_\alpha = f_\alpha h_\alpha$ per certe $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M^*)$, e perciò $g'_{\alpha\beta} = \frac{h'_\alpha}{h'_\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta}$, quindi i line bundles associato sono isomorfi, in quanto $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ è un 1-cobordo di $\mathcal{O}_M^*$.
É dunque ben definito $[D] \in \mathrm{Pic}(M)$, detto **line bundle associato** a D. Inoltre è chiaro che

$$[D + D'] = [[D] \otimes [D']] = [D] + [D'],$$

cioè $[\cdot]$ è un omomorfismo di gruppi. Si può infine vedere che $[\cdot]$ è proprio l'omomorfismo di connessione nella successione esatta lunga che volevamo studiare.
Esempio. Su $\mathbb{P}^n = \{[z_0, \dots, z_n]\}$ consideriamo l'iperpiano $H = \{\sum_{i=0}^n a_i z_i\}$, dove $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Sia D il divisore dato da H. Su $U_j = \{z_j \neq 0\}$, D ha funzione di definizione locale $\sum_{i=0}^n a_i \frac{z_i}{z_j}$; su $U_i \cap U_j$, la funzione di transizione è $g_{ij} = \frac{z_j}{z_i}$, perciò $[D] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)]$ indipendentemente dagli a_i.
Allo stesso modo, se $p \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ è omogeneo di grado d, e D_p è il divisore dato dal luogo di zeri di p, allora su U_j D_p ha funzione di definizione locale $h_j = p\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right) = \frac{p}{z_j^d}$. Perciò su $U_i \cap U_j$, la funzione di transizione è $g_{ij} = \frac{z_j^d}{z_i^d}$, da cui $[D] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)]$, ancora indipendentemente da p.
I divisori in $\mathrm{Div}(M)$ che si scrivono come (f), per una certa $f \in \Gamma(M, \mathscr{M}_M^*)$, si dicono **divisori principali**.

Proposizione 2.3.4. *I divisori principali* $\mathrm{Im}((\cdot))$ *coincidono con* $\mathrm{Ker}([\cdot])$.

Dimostrazione. $\supseteq$) Sia $f \in H^0(M, \mathscr{M}_M^*)$, e denotiamo $D = (f)$. Su ogni aperto U di M, D ha funzione di definizione locale $f_{|U}$, dunque le funzioni di transizione relative a un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M sono $g_{\alpha\beta} = \frac{f_{|U_\alpha \cap U_\beta}}{f_{|U_\alpha \cap U_\beta}} = 1$, da cui $[D] = 0$.

$\subseteq$) Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$ con funzione di definizione locale h_α su U_α, tale che $[D] = 0$. $g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ è un 1-cobordo, quindi esistono $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_M^*)$ tali che $\frac{h_\alpha}{h_\beta} = \frac{f_\beta}{f_\alpha}$, cioè $h_\alpha f_\alpha = h_\beta f_\beta$, da cui le $h_\alpha f_\alpha$ definiscono una $f \in H^0(M, \mathscr{M}_M^*)$ tale che $(f) = (h_\alpha) = D$ localmente.

$\square$

Dunque, nell'esempio immediatamente sopra, la proposizione dice che, se $p, q \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ sono omogenei dello stesso grado, allora $\left(\frac{p}{q}\right) = D_p - D_q$ e dunque $[D_p - D_q] = 0$, cioè $[D_p] = [D_q]$.

Nel seguito potremmo abusare di alcune notazioni, nel caso in cui non diano luogo a fraintendimenti; in particolare potremmo confondere E con $\mathcal{O}(E)$, soprattutto in $H^0(M, E) = H^0(M, \mathcal{O}(E))$, o E con $[E]$, e addirittura potremmo scrivere $[D] \otimes [D']$ per $[D] + [D']$. Inoltre diremo che s è una sezione di $[D]$ quando s è una sezione di un rappresentante di $[D]$, e la scelta di tale rappresentante non influisce; allo stesso modo scriveremo $H^0(M, [D])$ per $H^0(M, \mathcal{O}(D)$, dove $D \in [D]$ è un rappresentante e la scelta di tale rappresentante non influisce.

Definizione 2.3.13. *E line bundle su M, $U \subseteq M$ aperto. Una* **sezione meromorfa** *di E su U è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di U banalizzante per E, e di $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{M}_M)$ per ogni $\alpha \in I$, tali che $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$ su ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.*

Indicheremo con $\mathscr{M}(E) = \mathcal{O}(E) \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathscr{M}_M$ il fascio dei germi delle sezioni meromorfe di E. Se $s, s' \in \Gamma(U, \mathscr{M}(E))$ sono due sezioni meromorfe, con $s' \not\equiv 0$, allora $\frac{s}{s'}$ è una funzione meromorfa su U, perchè se s, s' sono rappresentate rispettivamente da $\{f_\alpha\}$ e $\{f'_\alpha\}$ sul ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, allora $\frac{f_\alpha}{f'_\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta} f_\beta}{g_{\alpha\beta} f'_\beta} = \frac{f_\beta}{f'_\beta}$ su ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, cioè i dati locali si rincollano globalmente. Allo stesso modo si vede che, se $s \in \Gamma(U, \mathscr{M}(E))$ e $f \in \Gamma(U, \mathscr{M}_M)$, allora $fs \in \Gamma(U, \mathscr{M}(E))$.

Definizione 2.3.14. *Sia E un line bundle su M, e sia $s \in H^0(M, \mathscr{M}(E))$ una sezione meromorfa con dati locali f_α su U_α. Visto che i quozienti $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta}$ sono funzioni olomorfe mai nulle, allora, per ogni V ipersuperficie analitica irriducibile, è ben definito l'***ordine di annullamento** *$\mathrm{ord}_V(s) = \mathrm{ord}_{V \cap U_\alpha}(f_\alpha)$ (indipendente dalla scelta di $\alpha \in I$, a patto che $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$). Inoltre poniamo:*

$$(s) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{ord}_{V_i}(s) V_i \in \mathrm{Div}(M).$$

La precedente definizione ci consegna naturalmente una mappa $H^0(M, \mathscr{M}(E)) \to \mathrm{Div}(M)$. Inoltre la sezione $s \in \Gamma(M, \mathscr{M}(E))$ è olomorfa se e solo se $(s) \geq 0$.

Adesso spostiamo la nostra attenzione sullo studio dell'immagine $\mathrm{Im}([\cdot])$, che per esattezza della successione esatta lunga coincide con il nucleo della mappa successiva.

Proposizione 2.3.5. *Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$ e $L \in \mathrm{Pic}(M)$. Allora:*

1. *Esiste una sezione $s \in H^0(M, \mathscr{M}([D]))$ tale che $(s) = D$;*

2. *Per ogni $s \in H^0(M, \mathscr{M}(L)) \setminus \{0\}$, $L = [(s)]$;*

3. *$\mathrm{Im}([\cdot]) = \{L \in \mathrm{Pic}(M) \mid H^0(M, \mathscr{M}(L)) \neq 0\}$;*

4. *$L = [D]$, con $D \geq 0$ divisore effettivo, se e solo se $H^0(M, \mathcal{O}(L)) \neq 0$.*

Dimostrazione.
1. Siano h_α le funzioni di definizione locale di D su U_α, con $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M; visto che $\frac{h_\alpha}{h_\beta} = g_{\alpha\beta}$ su ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tali h_α danno una sezione meromorfa $s \in H^0(M, \mathscr{M}([D]))$ di $[D]$, con $(s) = D$.

2. Se s è rappresentato dai dati locali f_α su U_α, allora $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta}$ su ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, da cui $[(s)] = L$.

3. Segue immediatamente dai primi due punti.

4. La dimostrazione è analoga a quella svolta qua sopra.

$\square$

Definizione 2.3.15. Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$, $D = \sum_{i=1}^n a_i V_i$. Si denota:

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in H^0(M, \mathscr{M}_M^*) \mid f + (D) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

In altre parole, una $f \in \mathcal{L}(D)$ è una funzione meromorfa globale, olomorfa su $M \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$, tale che $\mathrm{ord}_{V_i}(f) \geq -a_i$ per ogni i. Perciò, se $a_i > 0$, f può avere un polo lungo V_i di indice al più a_i, mentre se $a_i < 0$, f deve avere uno zero lungo V_i di ordine almeno $-a_i$.

Proposizione 2.3.6. *Sia $s_0 \in H^0(M, \mathscr{M}([D]))$ tale che $(s_0) = D$. Allora la moltiplicazione per s_0 produce un isomorfismo:*

$$\mathcal{L}(D) \xrightarrow{\sim} H^0(M, \mathcal{O}([D])).$$

Dimostrazione. Se $s \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ è non nulla, detta $f_s = \frac{s}{s_0} \in H^0(M, \mathscr{M}_M^*)$, si ha $(f_s) = (s) - (s_0) = (s) - D \geq -D$, cioè $f_s \in \mathcal{L}(D)$. Viceversa, se $f \in \mathcal{L}(D)$, allora $fs_0 \in H^0(M, \mathscr{M}([D]))$ e $(fs_0) = (f) + (s_0) = (f) + D \geq 0$, cioè $fs_0 \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$. $\square$

Questa semplice proposizione ha subito una conseguenza importante:

Corollario 2.3.7. *Se M è compatta e $D \geq 0$ è un divisore effettivo, allora $H^0(M, \mathcal{O}([-D])) = 0$.*

Dimostrazione. Basta vedere che $\mathcal{L}(-D) = 0$. Se $f \in \mathcal{L}(-D)$, f non può avere poli, quindi è una funzione olomorfa globale su una varietà compatta, perciò è costante. Ma $D \neq 0$, quindi f deve annullarsi in qualche punto, e perciò $f \equiv 0$. $\square$

Nel caso di varietà di dimensione 1 si può avere un risultato ancora più preciso:

<u>*Esempio.*</u> Sia M compatta di dimensione 1. Se $D = \sum_{i=1}^m a_i P_i \in \mathrm{Div}(M)$, con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $P_i \in M$. Definiamo il **grado** del divisore come $\deg(D) = \sum_{i=1}^m a_i \in \mathbb{Z}$; chiaramente la mappa $\deg : \mathrm{Div}(M) \to \mathbb{Z}$ è un omomorfismo. Vediamo che, se $\deg(D) < 0$, allora il fibrato $[D]$ non ammette sezioni olomorfe. Infatti ogni $f \in H^0(M, \mathscr{M}_M)$ corrisponde a una mappa olomorfa $f : M \to \mathbb{P}^1$, che per il teorema dei residui ha tanti zeri quanti poli (contati con molteplicità), cioè $\deg(f) = 0$; ma allora, se scriviamo $D = \sum_i a_i P_i - \sum_j b_j q_j$, con $a_i, b_j \geq 0$ e $\sum_j b_j > \sum_i a_i$, per ogni $f \in \mathcal{L}(D)$ non nulla abbiamo:

$$\#\{\text{zeri di } f\} \geq \sum_j b_j > \sum_i a_i \geq \#\{\text{poli di } f\},$$

assurdo.

D'altra parte, esistono vari casi in cui i fibrati ottenuti da divisori ammettono sezioni olomorfe, come nel caso del toro e dei fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, per $d \geq 0$:

<u>*Esempio.*</u> Sia $M = T$ toro, e $P \in M$; allora $H^0(M, \mathcal{O}([P])) = \mathbb{C}$. Infatti, se $f \in \mathcal{L}([P])$, allora o è olomorfa globale, e quindi costante, o ha un polo semplice in P. Ma in questo caso $f : M \to \mathbb{P}^1$ avrebbe un solo zero, e usando le traslazioni in arrivo avremmo che f sarebbe una bigezione e quindi un omeomorfismo, assurdo.

<u>*Esempio.*</u> Calcoliamo adesso i gruppi delle sezioni olomorfe dei fibrati $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, con $d \in \mathbb{Z}$. Per quanto abbiamo visto, i gruppi sono nulli se $d < 0$; inoltre, se $d = 0$, abbiamo facilmente che $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0)) = H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = \mathbb{C}$. Passiamo adesso al caso interessante, il caso $d > 0$. Introduciamo un naturale line bundle su $\mathbb{P}^n$, chiamato **fibrato tautologico**:

$$J = \{(p, v) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \pi^{-1}(p) \cup \{0\}\},$$

dove $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n$ è la proiezione al quoziente. J è un fibrato su $\mathbb{P}^n$ con proiezione la proiezione sul primo fattore, e la struttura topologica di J ricorda molto la struttura degli scoppiamenti, in quanto $J = \{(\pi(v), v) \mid v \in \mathbb{C}^{n+1}\} \cup (\mathbb{P}^n \times \{0\})$ è topologicamente un $\mathbb{C}^{n+1}$ in cui è stato inserito un $\mathbb{P}^n$ al posto dello 0; riprenderemo questa osservazione in un secondo momento.
Adesso consideriamo le solite carte $U_i = \{z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, e prendiamo il frame del fibrato tautologico su U_i dato da $\left([z_0, \dots, z_n], \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)\right)$. La mappa $[z_0, \dots, z_n] \to \left([z_0, \dots, z_n], \left(1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)\right)$ è una sezione meromorfa s del fibrato J, olomorfa su U_0 e con un polo di ordine 1 su $H_0 = \{z_0 = 0\}$; d'altra parte ha dati locali $\left(\frac{z_0}{z_j}\right)^{-1} = \frac{z_j}{z_0}$ su U_j. Perciò $(s) = -H_0$, dunque $[J] = [-H_0] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)]$ (in realtà si potrebbe far vedere che J e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ coincidono come fibrati). Ne ricaviamo che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = [H_0] = J^*$, quindi se $p = \pi(v) \in \mathbb{P}^n$, la fibra di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ su p è data da $\text{Span}(v)^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\text{Span}(v); \mathbb{C})$.
Ora, ogni $f \in (\mathbb{C}^{n+1})^*$ dà per restrizione alle rette una sezione olomorfa di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$; in altre parole abbiamo una mappa:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{n+1})^* & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \\ f & \longmapsto & \sigma_f \end{array}$$

dove $\sigma_f(p) = f_{|\text{Span}(v)}$, seguendo le notazioni di sopra. Chiaramente tale mappa è $\mathbb{C}$-lineare e iniettiva. Più in generale, il fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = [dH_0]$ ha fibra su p il prodotto tensoriale $\bigotimes_{i=1}^d \text{Span}(v)^*$, che coincide col gruppo dei polinomi omogenei di grado d in una variabile, perciò come sopra possiamo costruire una mappa:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^d\left((\mathbb{C}^{n+1})^*\right) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \\ F & \longmapsto & \sigma_F \end{array}$$

dove $\text{Sym}^d\left((\mathbb{C}^{n+1})^*\right)$ indica il gruppo dei polinomi omogenei di grado d nelle variabili $z_0, \dots, z_n$. Vediamo che tale mappa è anche surgettiva.
Sia $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$; per ogni $F \in \text{Sym}^d\left((\mathbb{C}^{n+1})^*\right)$, $g = \frac{\sigma}{\sigma_F}$ è una sezione meromorfa globale, dunque, posta $G' = g \circ \pi$, G' è meromorfa su $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ e ha un polo semplice lungo $\{F = 0\}$. Ma allora $G = G'F$ è olomorfa su $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$, e dunque si estende a una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}^{n+1}$. G' è omogenea di grado 0, quindi G è omogenea di grado d; inoltre, restringendo G alla retta $l = \text{Span}(v)$, o $G_{|l}$ è identicamente nulla, o è olomorfa con uno zero di ordine d in 0 e un polo di ordine d in ∞, perciò $G_{|l}(t) = \mu t^d$ per un certo $\mu \in \mathbb{C}$. Ma allora lo sviluppo in serie di potenze di G centrato in 0 (che converge su tutto $\mathbb{C}^{n+1}$), ha solo termini di grado d, e cioè G è un polinomio monico omogeneo di grado d; la tesi segue osservando che $\sigma = \sigma_G$.
In particolare, abbiamo visto che, se $d > 0$, $\dim(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))) = \binom{n+d}{d}$.

Citiamo adesso un risultato che dimostreremo nell'ultima parte, da cui segue un importantissimo teorema riguardante le ipersuperfici analitiche proiettive.

Proposizione 2.3.8. $\text{Pic}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} = \{[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)] \mid d \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.3.9 (Chow). *Ogni ipersuperficie analitica $V \subseteq \mathbb{P}^n$ è algebrica.*

Dimostrazione. V dà un divisore $V = \sum_{i=1}^m V_i$, dove le V_i sono le componenti irriducibili di V; V è effettivo, quindi esiste un $d > 0$ per cui $[V] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)]$. Scegliamo σ sezione globale di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ tale che $(\sigma) = V$; per quanto visto esiste un polinomio F omogeneo di grado d tale che $\sigma = \sigma_F$, dunque $V = \{F = 0\}$, come voluto. □

Il precedente risultato vale anche per tutte le sottovarietà analitiche di $\mathbb{P}^n$ di dimensione $k < n - 1$. Diamo solo un'idea della dimostrazione:

Dimostrazione. Se $V \subseteq \mathbb{P}^n$ è una sottovarietà analitica di dimensione k, preso $p \notin V$ esiste un sottospazio $\mathbb{P}^{n-k-1}$ che passa da p e non interseca V. Proiettando V sul sottospazio $\mathbb{P}^{n-k-2} \subseteq \mathbb{P}^{n-k-1}$ che non contiene p, si ottiene $\pi(V) \subseteq \mathbb{P}^{k+1}$, che per il proper mapping è una ipersuperficie analitica di $\mathbb{P}^{k+1}$ (in quanto V è compatta); inoltre $\pi(p) \notin \pi(V)$. Scegliendo opportunamente coordinate in modo che $\mathbb{P}^n \backslash \mathbb{P}^{n-k-2} = \{z_0 = \ldots = z_{k+1} = 0\}$, $\mathbb{P}^{k+1} = \{z_{k+1} = \ldots = z_n = 0\}$ e la proiezione $\pi : \mathbb{P}^n \backslash \mathbb{P}^{n-k-2} \to \mathbb{P}^{k+1}$ si scriva $\pi([z_0, \ldots, z_n]) = [z_0, \ldots, z_{k+1}, 0, \ldots, 0]$, esiste un polinomio F_p monico e omogeneo nelle variabili $z_0, \ldots, z_{k+1}$ nullo su $\pi(V)$, ma non nullo su $\pi(p)$. Lo stesso F_p visto nelle variabili $z_0, \ldots, z_n$ è nullo su V ma non nullo su p, quindi si può scrivere $V = \bigcap_{p \in V} \{F_p = 0\}$. Si conclude per compattezza di V. □

Corollario 2.3.10. *Ogni funzione meromorfa $g \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{M}_{\mathbb{P}^n})$ è razionale, cioè si scrive $g = \frac{F}{G}$, con F, G polinomi omogenei dello stesso grado.*

Dimostrazione. (g) si decompone come $(g) = (g)_0 - (g)_\infty$, con entrambi i divisori $(g)_0, (g)_\infty$ effettivi. Ma allora esistono polinomi omogenei F, G tali che $(F) = (g)_0$ e $(G) = (g)_\infty$; il grado di F coincide con la cardinalità dell'intersezione $\{F \cap 0\} \cap l$, dove l è una retta generica, e dove contiamo con le dovute moltiplicità le componenti di F che compaiono in (F) con coefficiente maggiore di 1. Per G vale un discorso analogo. Ma visto che l'intersezione $\{F = 0\} \cap l$ è esattamente l'insieme degli zeri di g sulla retta l (contati con molteplicità), e l'intersezione $\{G = 0\} \cap l$ l'insieme dei poli di g sulla retta l, e osservando che il numero di poli e di zeri è lo stesso essendo la retta $l \cong \mathbb{P}^1$, possiamo concludere che $\deg(F) = \deg(G)$. Ma allora i divisori (g) e $\left(\frac{F}{G}\right)$ coincidono, e $\frac{g}{\frac{F}{G}}$ è olomorfa mai nulla su $\mathbb{P}^n$, da cui necessariamente è costante, quindi possiamo dire che $g = \mu \frac{F}{G}$ per un certo $\mu \in \mathbb{C}^*$. □

2.4 Classe di Chern e sistemi lineari di divisori

Consideriamo la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0.$$

Scrivendo la successione esatta lunga corrispondente, si ottiene una mappa:

$$H^1(M, \mathcal{O}_M^*) = \mathrm{Pic}(M) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Se L è un line bundle su M, l'elemento $c_1(L) = c_1([L])$ si chiama (**prima**) **classe di Chern** di L. Chiaramente si hanno le relazioni:

$$c_1(L + L') = c_1(L) + c_1(L'), \qquad c_1(L^*) = -c_1(L).$$

Spesso potremo considerare la mappa c_1 come a valori in $H^2_{DR}(M) = H^2(M, \mathbb{C})$, cioè composta con la naturale mappa $H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{C})$.
Nel caso $M = \mathbb{P}^n$, sappiamo che $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ è generato dal duale di Poincarè di un iperpiano, e dunque abbiamo un pezzetto di successione esatta del tipo:

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z}.$$

Vedremo tra non molto che il primo termine è sempre nullo, e dunque che c_1 è un isomorfismo (abbiamo già visto che è surgettiva).

Definizione 2.4.1. Due divisori $D, D' \in \mathrm{Div}(M)$ si dicono **linearmente equivalenti** (e si scrive $D \sim S'$) se esiste $f \in H^0(M, \mathscr{M}_M)$ tale che $D' = D + (f)$.
Equivalentemente, $D \sim D'$ se e solo se $D' - D \in \mathrm{Im}((\cdot))$, cioè se e solo se $[D' - D] = 0$.

Definizione 2.4.2. $D \in \text{Div}(M)$. La **serie lineare** $|D|$ data da D è:

$$|D| = \{D' \in \text{Div}(M) \mid D' \geq 0,\ D' \sim D\}.$$

Si osserva facilmente che $D' \in |D|$ se e solo se $D' = D + (f)$, con $f \in \mathcal{L}(D)$. Ma allora abbiamo una mappa

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(D) & \longrightarrow & |D| \\ f & \longmapsto & (f) + D \end{array}$$

surgettiva per costruzione, che si quozienta a una mappa

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \longrightarrow |D|$$

ancora surgettiva, dato che $(f) = (\lambda f)$ per ogni $f \in \mathbb{C}^*$.

Proposizione 2.4.1. *La mappa precedente è biunivoca se M è compatta.*

Dimostrazione. Se $(f) + D = (f') + D$, allora $(f) = (f')$ e quindi $\frac{f}{f'}$ è olomorfa globale mai nulla, perciò è costante, da cui $f' = \lambda f$. $\square$

Nel caso di M compatta, definiamo $\dim(|D|) = \dim(\mathcal{L}(D)) - 1$. Ricordiamo inoltre che, se s_0 è una sezione meromorfa di $[D]$ tale che $D = (s_0)$, si ha un isomorfismo $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \cong \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}([D])))$; quindi, componendo con la precedente corrispondenza biunivoca, si ottiene una bigezione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}([D]))) & \longrightarrow & |D| \\ [s] & \longmapsto & (s) \end{array}$$

che non dipende dalla scelta di s_0, in quanto $\left[\frac{s}{s_0}\right] \mapsto \left(\frac{s}{s_0}\right) + D = (s) - (s_0) + D = (s)$. Dunque $|D|$ è dato dai divisori di tutte le sezioni olomorfe globali di $\mathcal{O}([D])$.

Definizione 2.4.3. Un **sistema lineare di divisori** $\mathcal{S}$ è una famiglia di divisori effettivi corrispondenti a un sottospazio vettoriale $E \subseteq H^0(M, \mathcal{O}(L))$ non banale, con L line bundle su M. In altre parole, $\mathcal{S} = \{(s) \mid s \in E \backslash \{0\}\}$.

La mappa surgettiva

$$\begin{array}{ccc} E\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ s & \longmapsto & (s) \end{array}$$

passa al quoziente e dà una mappa $\mathbb{P}(E) \to \mathcal{S}$, che è biunivoca se M è compatta. In tal caso poniamo $\dim(\mathcal{S}) = \dim(E) - 1$. Diciamo che $\mathcal{S}$ è **completo** se corrisponde a $E = H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ per un certo divisore D di M; inoltre, se $\dim(\mathcal{S}) = 1$, $\mathcal{S}$ si dice **fascio** (o **pencil**) di divisori.

Esempi.

- Il fascio di rette in $\mathbb{P}^2$ passanti per $P = [1, 0, 0]$ è esattamente il sistema lineare dato da $\text{Span}(z_1, z_2) \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, e il sottospazio coincide con le sezioni di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ nulle su P.

- Il fascio di coniche passanti per quattro punti $P_1, \ldots, P_4 \in \mathbb{P}^2$ non allineati è dato dalla famiglia $\mathcal{S}$ di sezioni di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ (che sono polinomi omogenei di grado 2) nulle in $P_1, \ldots, P_4$. Visto che il sistema completo dato da $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ ha dimensione $\binom{4}{2} - 1 = 5$, segue che $\dim(\mathcal{S}) = 1$, in quanto l'imposizione di passare per un punto abbassa di 1 la dimensione, e si può vedere che l'imposizione di passare per k punti non allineati abbassa di k la dimensione. Perciò $\mathcal{S}$ è un pencil.

Definizione 2.4.4. Sia $\mathcal{S}$ un sistema lineare. Si definisce il **luogo dei punti base** di $\mathcal{S}$ l'insieme $\text{BL}(\mathcal{S}) = \bigcap_{D \in \mathcal{S}} \text{supp}(D)$, dove $\text{supp}(D)$ non è altro che l'unione delle ipersuperfici lungo cui D ha uno zero o un polo.

Se $s_0, \dots, s_N$ è una base di E, ed E corrisponde al sistema $\mathcal{S}$, allora gli elementi $D_i = (s_i)$ per $i = 1, \dots, N$ sono dei generatori per $\mathcal{S}$. In tale caso $\mathrm{BL}(\mathcal{S}) = \mathrm{supp}(D_0) \cap \dots \cap \mathrm{supp}(D_N)$.

Concludiamo la sezione con un teorema che non dimostriamo:

Teorema 2.4.2 (Bertini)**.** *Il generico elemento in un sistema lineare è liscio fuori dal luogo base.*

Esempi. Se riprendiamo l'esempio delle coniche di $\mathbb{P}^2$ passanti per 4 punti $P_1, \dots, P_4$, possiamo considerare due casi: quando $P_1, \dots, P_4$ formano i vertici di un quadrato, e quando P_1, P_2, P_3 sono allineati. Nel primo caso si ha che tutte le coniche passanti per i 4 punti sono lisce, tranne le 3 coniche date da due rette incidenti o da due rette parallele; nel secondo caso sono tutte non lisce ma solo nei punti base.

3 Immersioni proiettive

3.1 Immergere varietà complesse in $\mathbb{P}^N$ tramite line bundles

D'ora in poi assumeremo sempre M compatta.

Sia $L \in \mathrm{Pic}(M)$, ed E un sottospazio di dimensione finita di $H^0(M, \mathcal{O}(L))$. Se $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ è una base di E, e $U \subseteq M$ è un aperto banalizzante per L, indichiamo con $(s_i)_U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_M)$ il dato locale di σ_i su U. Se $x \in U$ è tale che $(\sigma_0(x), \dots, \sigma_N(x)) \neq (0, \dots, 0)$, allora l'elemento $[(s_0)_U(x), \dots, (s_N)_U(x)] \in \mathbb{P}^N$ non dipende dall'aperto U (in quanto se prendiamo un altro aperto V, nell'intersezione si ha che $(s_i)_V = g_{U,V}(s_i)_U$ per una certa funzione $g_{U,V}$ a valori in $\mathbb{C}^*$). Otteniamo perciò una mappa olomorfa:

$$i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N} : M \backslash \{x \in M \mid \sigma(x) = 0 \ \forall \sigma \in E\} \longrightarrow \mathbb{P}^N,$$

in quanto $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ è base di E.

Si osserva subito che, se $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathrm{Im}(i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N})$ non è contenuta in nessun iperpiano di $\mathbb{P}^N$. Inoltre, se cambiamo base di E, la mappa $i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$ cambia per una proiettività di $\mathbb{P}^N$, data dalla matrice del cambio di base.
Più intrinsecamente, sia $\mathcal{S} = \{(s) \in \mathrm{Div}(M) \mid s \in E \backslash \{0\}\} \cong \mathbb{P}(E)$; se $p \notin \mathrm{BL}(\mathcal{S})$, allora $H_p = \{\sigma \in E \mid \sigma(p) = 0\}$ è un iperpiano di E, perciò otteniamo una mappa:

$$i_E : M \backslash \mathrm{BL}(\mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{P}(E))^* = \mathbb{P}(E^*),$$

dove abbiamo identificato gli iperpiani di E come elementi di $(\mathbb{P}(E))^*$; essendo $i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$ una realizzazione olomorfa di i_E, anche i_E deve essere olomorfa. Nel caso in cui E coincida con $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ per un certo line bundle L, scriveremo i_L al posto di i_E.

Una prima fondamentale osservazione è che i_E è definita su tutto M se e solo se $\mathrm{BL}(\mathcal{S}) = \emptyset$, cioè se e solo se per ogni $p \in M$, esiste un $\sigma \in E$ tale che $\sigma(p) \neq 0$; invece i_E è iniettiva se e solo se per ogni coppia di punti $x \neq y \in M$, esiste un $\sigma \in E$ tale che $\sigma(x) = 0$ e $\sigma(y) \neq 0$. Riassumendo, i_E è definita su tutto M ed è iniettiva se e solo se per ogni coppia di punti $x \neq y \in M$, esiste un $\sigma \in E$ tale che $\sigma(x) = 0$ e $\sigma(y) \neq 0$.
Passiamo adesso a mostrare che tutte le mappe olomorfe $M \to \mathbb{P}^N$ non degeneri (cioè la cui immagine non è contenuta in nessun iperpiano) è di questo tipo; abbiamo prima bisogno di qualche definizione e osservazione preliminare.

Definizione 3.1.1. Sia $f : M \to N$ olomorfa, $\pi : L \to N$ fibrato vettoriale complesso. Il **pullback** di L è $f^*(L) = \{(p, v) \in M \times L \mid f(p) = \pi(v)\}$.

Il pullback $f^*(L)$ è un fibrato su N, e la fibra è $f^*(L)_p = L_{f(p)}$; inoltre, se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di N banalizzante per L, con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$, allora $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di M banalizzante per $f^*(L)$, con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} \circ f$. D'altra parte è chiaro che, se L è un fibrato olomorfo, anche $f^*(L)$ lo è, e se $L_1 \cong L_2$, anche $f^*(L_1) \cong f^*(L_2)$, perciò otteniamo una ben definita mappa:

$$f^* : \mathrm{Pic}(N) \to \mathrm{Pic}(M).$$

Similmente, se σ è una sezione di L su $U \subseteq N$ aperto, $\sigma \circ f$ è una sezione di $f^*(L)$ su $f^{-1}(U)$, quindi abbiamo una mappa:

$$f^* : H^0(N, \mathcal{O}(L)) \to H^0(M, \mathcal{O}(f^*(L))).$$

Infine, sia D un divisore su N, con funzione di definizione locale f_α su U_α. Se $\mathrm{Im}(f) \nsubseteq \mathrm{supp}(D)$, possiamo definire $f^*(D)$ come il divisore su M con funzione di definizione locale $f_\alpha \circ f$ su $f^{-1}(U_\alpha)$. Dunque, se $\mathrm{Im}(f)$ non è contenuta in nessuna sottovarietà analitica di N, è ben definita:

$$f^* : \mathrm{Div}(N) \to \mathrm{Div}(M).$$

Chiaramente si ha che $f^*([D]) = [f^*(D)]$ quando tutti i termini hanno senso.

Osserviamo anche che, se $p \in \mathbb{P}^N$, p è completamente determinato dal valore delle sezioni di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ date da $z_0, \dots, z_N$ su p.

Proposizione 3.1.1. *Ogni funzione olomorfa $f : M \to \mathbb{P}^N$ non degenere è del tipo i_E per qualche $E \subseteq H^0(M, \mathcal{O}(L))$, con $L = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$.*

Dimostrazione. $L = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ è un line bundle su M, e $L = [f^*(H)]$, dove $H \subseteq \mathbb{P}^N$ è un iperpiano. Ma allora $L = [f^*(H)] = [f^{-1}(H \cap \mathrm{Im}(f))]$. Poniamo $\sigma_i = f^*(z_i) \in H^0(M, \mathcal{O}(L))$ per $i = 0, \dots, N$; le σ_i sono linearmente indipendenti, perchè f^* è iniettiva su $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ (in quanto, se $f^*(\sigma) = 0$, allora $\mathrm{Im}(f) \subseteq (\sigma)$, e (σ) è un iperpiano perchè $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$).
Non è difficile vedere che $f = i_{\sigma_0, \dots, \sigma_N}$.
Posto $E = \mathrm{Span}(\sigma_0, \dots, \sigma_N)$, si ha che $E = f^*(H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)))$, in quanto le z_i generano $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$; perciò f è una realizzazione di i_E. □

Esempi.

- Sia $p \in \mathbb{P}^1$, e $k \geq 1$. Allora si può vedere che la mappa

$$\begin{array}{cccc} i_{[kp]} : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ & [z_0, z_1] & \longmapsto & [z_0^k, z_0^{k-1} z_1, \dots, z_1^k] \end{array}$$

  è un'immersione per ogni k.

- Se $H \subseteq \mathbb{P}^n$ è un iperpiano e $k \geq 1$, allora la mappa

$$i_{[kH]} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

  con $N = \binom{n+k}{n} - 1$, è un'immersione per ogni k, ed è detta **immersione di Veronese**.

Ispirandoci alle condizione algebriche individuate per capire quando una certa mappa i_E è iniettiva, vogliamo trovare delle condizioni analoghe per distinguere quando la stessa i_E è un embedding. Osserviamo innanzitutto che, essendo M compatta, affinchè i_E sia un embedding basta che sia un'immersione iniettiva. Per l'iniettività siamo a posto; inoltre i_E è un'immersione se e solo se $d(i_E)_x : T_{\mathbb{R},x}(M) \to T_{\mathbb{R},f(x)}(\mathbb{P}^N)$ è iniettiva per ogni x, cioè se $d(i_E)_x : T'_x(M) \to T'_{f(x)}(\mathbb{P}^N)$ è iniettiva per ogni x, cioè se e solo se ${}^t d(i_E)_x : T'_{f(x)}(\mathbb{P}^N)^* \to T'_x(M)^*$ è surgettiva per ogni $x \in M$. La prossima proposizione esemplifica ancora di più tale condizione:

Proposizione 3.1.2. *i_E è un'immersione se e solo se per ogni $v^* \in T'_x(M)^*$ esiste $\sigma \in E$, con dati locali s_α su U_α, tale che $s_\alpha(x) = 0$ e $d(s_\alpha)_x = v^*$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità $i_E(x) \in U_0 = \{z_0 \neq 0\}$; consideriamo in U_0 coordinate $y_i = \frac{z_i}{z_0}$ per $i = 1, \dots, N$ e, se $x_1, \dots, x_n$ sono coordinate olomorfe in un intorno di x, possiamo scrivere $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{s_i}{s_0}$ per certe funzioni olomorfe $s_0, \dots, s_N$. Scegliamo una base $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ di E con dati locali rispettivamente $s_0, \dots, s_N$ su U_α (possibile in quanto s_0, essendo non nulla in x, è non nulla in un intorno U_α di x).

$\Rightarrow$) Seguendo le notazioni appena introdotte, si ha che:

$${}^t d(i_E)_x(dy_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

Scritto $v^* = \sum_{j=1}^N A_j dx_j$, vogliamo imporre

$$v^* = {}^t d(i_E)_x \left(\sum_{j=1}^N \beta_j dy_j \right) = \sum_{i,j} \beta_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j,$$

da cui

$$A_j = \sum_i \beta_i \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(x) \frac{1}{s_0(x)} - \frac{s_i(x)}{s_0^2(x)} \frac{\partial s_0}{\partial x_j}(x) \right),$$

cioè

$$A_j s_0^2(x) = \sum_i \beta_i \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}(x) s_0(x) - s_i(x) \frac{\partial s_0}{\partial x_j}(x) \right).$$

Possiamo perciò porre

$$\sigma = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum_i \beta_i (s_0(x)\sigma_i - s_i(x)\sigma_0) \in E,$$

e in questo modo σ ha come dati locali su U_α le $s_\alpha = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum_i \beta_i (s_0(x) s_i - s_i(x) s_0)$, che soddisfano le relazioni volute $s_\alpha(x) = 0$ e $d(s_\alpha)_x = v^*$.

$\Leftarrow$) Se $\sigma = \sum_{i=0}^N \lambda_i \sigma_i$, con dati locali $s_\alpha = \sum_{i=0}^N \lambda_i s_i$ su U_α, da $s_\alpha(x) = 0$ ricaviamo che:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{s_0(x)} \sum_{i=1}^N \lambda_i s_i(x).$$

Scrivendo $\sigma = \frac{1}{s_0^2(x)} \sum_{i=1}^N \beta_i (s_0(x)\sigma_i - s_i(x)\sigma_0)$, con $\beta_i = \lambda_i s_0(x)$, e usando che $d(s_\alpha)_x = v^*$, si ricava facilmente che $v^* = {}^t d(i_E)_x \left(\sum_{i=1}^N \beta_i dy_i \right)$.

□

Corollario 3.1.3. *Se $E \subseteq E'$ è un sottofibrato e i_E è embedding, allora anche $i_{E'}$ lo è. In particolare, per vedere se M è immergibile in un $\mathbb{P}^N$, è sufficiente considerare i sistemi lineari completi, cioè vedere se almeno una fra le i_L, con L che varia fra i line bundles su M, è un'immersione.*

Riformuliamo dunque cose già dette nel linguaggio dei line bundles. Se $L \in \mathrm{Pic}(M)$, $p \in M$ e L_p indica la fibra di L su p, i_L è definita in p se e solo se la mappa

$$\begin{array}{rccc} r_p: & H^0(M, \mathcal{O}(L)) & \longrightarrow & L_p \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma(p) \end{array}$$

è surgettiva (cioè non nulla). Inoltre, se $x \neq y \in M$ e i_L è definito sia in x che in y, vale che $i_L(x) \neq i_L(y)$ se e solo se la mappa

$$r_x \oplus r_y : H^0(M, \mathcal{O}(L)) \longrightarrow L_x \oplus L_y$$

è surgettiva. Visto che la seconda condizione è più forte della prima, deduciamo che i_L è definita su tutto M ed è iniettiva se e solo se $r_x \oplus r_y$ è surgettiva per ogni $x \neq y \in M$.
Infine, se vale questo, denotato $I_x(L)$ il gruppo delle sezioni globali olomorfe di L nulle in x, si ha che, usando la precedente caratterizzazione, i_L è un embedding se e solo se il differenziale

$$d_x : I_x(L) \longrightarrow L_x \otimes T'_x(M)^*$$

è surgettivo (infatti d_x è surgettivo se e solo se $\mathrm{Im}(d_x)$ contiene $1 \otimes T'_x(M)^*$).

Per poter trattare in modo più algebrico la surgettività di queste mappe, vogliamo interpretare i gruppi precedenti come H^0 di particolari fasci. Per esempio, se, con abuso di notazione, indichiamo con $L_x \oplus L_y$ il fascio grattacielo con supporto $\{x, y\}$ e fibra L_x su x e L_y su y, chiaramente si ha che $L_x \oplus L_y = H^0(M, L_x \oplus L_y)$. Allo stesso modo si può ragionare per $L_x \otimes T'_x(M)^*$; inoltre, indicato con $\mathscr{I}_x(L)$ il fascio dei germi delle sezioni olomorfe di L nulle su x, abbiamo che $I_x(L) = H^0(M, \mathscr{I}_x(L))$. A questo punto, le due successioni

$$\mathcal{O}(L) \xrightarrow{r_x \oplus r_y} L_x \oplus L_y \longrightarrow 0, \qquad \mathscr{I}_x(L) \xrightarrow{d_x} L_x \otimes T'_x(M)^* \longrightarrow 0$$

sono esatte di fasci. Detto $\mathscr{I}_{xy}(L) = \mathrm{Ker}(r_x \oplus r_y)$ il fascio dei germi di sezioni di L nulle in x e y, e posto $\mathscr{I}^2_x(L) = \mathrm{Ker}(d_x)$, prendendo le rispettive successioni esatte lunghe otteniamo i seguenti pezzi esatti:

$$H^0(M, \mathcal{O}(L)) \xrightarrow{r_x \oplus r_y} L_x \oplus L_y \longrightarrow H^1(M, \mathscr{I}_{xy}(L)),$$

$$H^0(M, \mathscr{I}_x(L)) \xrightarrow{d_x} L_x \otimes T'_x(M)^* \longrightarrow H^1(M, \mathscr{I}^2_x(L)).$$

Quindi l'annullarsi di quei due H^1 è una condizione sufficiente affinchè i_L sia un embedding. Il problema che sorge, però, è che i fasci $\mathscr{I}_{xy}(L)$ e $\mathscr{I}^2_x(L)$ non sono fibrati, e perciò praticamente intrattabili. L'unico caso in cui quei due fasci sono fibrati è quando $\dim(M) = 1$, in quanto i punti sono divisori; perciò, osservato che $\mathscr{I}_{xy}(L) = \mathcal{O}(L - [x] - [y])$ e $\mathscr{I}^2_x(L) = \mathcal{O}(L - 2[x])$, si ha che l'annullamento dei gruppi $H^1(M, \mathcal{O}(L - [x] - [y]))$ per ogni $x, y \in M$ implica che i_L è un embedding. Tale criterio diventa estremamente potente in vista della prossima proposizione, di cui posticipiamo la dimostrazione:

Proposizione 3.1.4. *Sia M di dimensione 1, e $D \in \mathrm{Div}(M)$. Se $\deg(D) > 2g - 2$, dove g indica il genere di M, allora $H^1(M, \mathcal{O}([D])) = 0$.*

Corollario 3.1.5. *Sia M di dimensione 1, e $D \in \mathrm{Div}(M)$. Se $\deg(D) > 2g$, allora $i_{[D]}$ è un embedding, e la varietà $i_{[D]}(M)$è algebrica.*

<u>*Esempio*</u>. Sia M il toro. Il genere di M è 1, quindi, preso $P \in M$, $i_{[3P]}$ immerge M in $\mathbb{P}^N$, con N ovviamente maggiore o uguale a 2. Per quanto visto, sappiamo che $N = \dim(H^0(M, \mathcal{O}([3P]))) - 1 \geq 2$, dunque la dimensione di $H^0(M, \mathcal{O}([3P]))$ è almeno 3; vediamo che è esattamente 3. Infatti $\dim(H^0(M, \mathcal{O}([3P]))) = \dim(\mathcal{L}(3P))$, e ogni $f \in \mathcal{L}(3P)$ si scrive intorno a P come $f = \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + h$, con h una certa funzione olomorfa nulla in P; visto che due funzioni $f, g \in \mathcal{L}(3P)$ con gli stessi coefficienti $a_{-3}, \ldots, a_0$ sono uguali (in quanto la loro differenza è una funzione olomorfa globale con uno zero), allora la dimensione di $H^0(M, \mathcal{O}([3P]))$ è minore o uguale di 4. Ma se fosse 4, allora esisterebbe una funzione meromorfa su M con un unico polo semplice in P, assurdo.
L'ultima cosa che ci chiediamo è il grado del polinomio omogeneo che definisce l'ipersuperficie analitica (e algebrica) $i_{[3P]}(M) \subseteq \mathbb{P}^2$: il grado coincide con la cardinalità dell'intersezione fra $i_{[3P]}(M)$ e una retta generica, perciò è uguale a $\deg(3P) = 3$.

<u>*Esempio*</u>. Se il genere di M è 0 (e dunque M è omeomorfa a $\mathbb{P}^1$), e $P \in M$, $i_{[P]}$ immerge M in $\mathbb{P}^1$, e tale immersione deve essere un biolomorfismo. Questo ad esempio mostra che esiste un'unica struttura complessa su $\mathbb{P}^1$ a meno di biolomorfismo.

Prima di passare a generalizzare questi strumenti a varietà di dimensione almeno 2, introduciamo alcuni concetti e alcuni risultati importanti che ci potranno servire in seguito.

Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$ un divisore effettivo, $D = \sum_{i=1}^{m} a_i V_i$ con gli $a_i > 0$. Se $\sigma_0 \in H^0(M, \mathcal{O}([D]))$ è tale che $(\sigma_0) = D$, ed E è un line bundle su M, indichiamo con $\mathcal{E}(D)$ il fascio dei germi di sezioni meromorfe di E con poli lungo V_i di ordine al massimo a_i. Similmente, indichiamo con $\mathcal{E}(-D)$ il fascio dei germi di sezioni olomorfe di E con zeri lungo V_i di ordine almeno a_i. La mappa

$$\begin{array}{rccc} \otimes\sigma_0 : & \mathscr{M}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}(E \otimes [D]) \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \otimes \sigma_0 \end{array}$$

dove indichiamo con $\sigma \otimes \sigma_0$ il germe con dati locali il prodotto dei dati locali di σ e σ_0, si restringe ad un isomorfismo:

$$\otimes\sigma_0 : \mathcal{E}(D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(E \otimes [D]).$$

Spesso potremo confondere questi due fasci. Inoltre vale un discorso del tutto analogo per $\mathcal{E}(-D)$, che si vede essere isomorfo a $\mathcal{O}(E \otimes [-D])$ tramite $\otimes\sigma_0^{-1}$.

Esempio. Se $V \subseteq M$ è un'ipersuperficie analitica irriducibile, ed E è un line bundle su M, per quanto appena detto abbiamo una successione esatta corta di fasci su M:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M(E - [V]) \hookrightarrow \mathcal{O}_M(E) \xrightarrow{r_V} \mathcal{O}_V(E_{|V}) \longrightarrow 0,$$

dove r_V indica la restrizione a V (chiaramente l'ultimo fascio su V lo consideriamo esteso a 0 su M). La successione esatta lunga in coomologia inizia con

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}(E - [V])) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}(E)) \longrightarrow \dots,$$

perciò se il secondo è 0, anche il primo lo è.

Nel caso in cui M abbia dimensione 1, un qualunque punto $P \in M$ è un'ipersuperficie analitica di M, perciò abbiamo una successione esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(E - [P]) \hookrightarrow \mathcal{O}(E) \xrightarrow{r_P} L_P \longrightarrow 0,$$

dove L_P indica il fascio grattacielo con fibra L_P sopra P. Ma visto che L_P non è altro che $\mathbb{C}$, tutti i suoi gruppi di coomologia dopo lo 0-esimo sono nulli, e perciò la successione esatta lunga diventa:

$$0 \to H^0(M, \mathcal{O}(E - [P])) \to H^0(M, \mathcal{O}(E)) \to \mathbb{C} \to H^1(M, \mathcal{O}(E - [P])) \to H^1(M, \mathcal{O}(E)) \to 0.$$

Definita $\chi(E) = \dim(H^0(M, \mathcal{O}(E))) - \dim(H^1(M, \mathcal{O}(E)))$ la **caratteristica di Eulero-Poincarè** di E, l'esattezza della precedente successione implica che $\chi(E - [P]) = \chi(E) - 1$.

Teorema 3.1.6 (Riemann-Roch)**.** *Sia M di dimensione 1 e $L \in \mathrm{Pic}(M)$. Allora $\mathrm{Pic}(M) = \mathrm{Im}([\cdot])$ e vale la relazione:*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_M) + \deg(L),$$

dove poniamo $\deg(L) = \deg(D)$ se $L = [D]$.

Dimostrazione. Ci basta vedere che $\mathrm{Pic}(M) = \mathrm{Im}([\cdot])$, in quanto la relazione precedente è certamente valida per $L = 0$ (in quanto le sezioni olomorfe del line bundle banale non sono altro che funzione olomorfe $M \to \mathbb{C}$), e la formula $\chi(E - [P]) = \chi(E) - 1$ applicata ripetutamente produce la formula voluta. Per vedere la surgettività di $[\cdot]$, scegliamo un k abbastanza grande in modo che sia $L + [kP]$ che $[kP]$ diano immersioni proiettive. Allora, scelte $s \in H^0(M, \mathcal{O}([kP]))$ e $s' \in H^0(M, \mathcal{O}(L - [kP]))$ non nulle, si ha che $\frac{s'}{s} \in H^0(M, \mathscr{M}(L))$ è non nulla, da cui $L = [(s') - (s)]$. $\square$

Osservazione. Vedremo in seguito che $\chi(\mathcal{O}_M) = 1-g$, da cui si deduce la relazione di Riemann-Roch:
$$\chi(L) = \deg(L) - g + 1.$$
Adesso spostiamo finalmente la nostra attenzione allo studio delle immersioni proiettive di varietà di dimensione almeno 2. L'ultima osservazione che avevamo fatto a riguardo di esse era il problema che nasceva dal fatto che i punti non sono divisori. Per ovviare a tale inconveniente, usiamo un trucco noto in geometria algebrica: sfruttiamo gli scoppiamenti per trasformare un line bundle L in un line bundle $\widetilde{L}$ (in qualche senso) equivalente, in cui un fissato punto $x \in M$ diventa un divisore a tutti gli effetti.

Riprendiamo il fibrato tautologico:
$$J = \left\{ ((z_1, \dots, z_n), [l_1, \dots, l_n]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid z_i l_j = l_i z_j \ \forall i, j \right\} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1).$$
Consideriamo però la proiezione $\pi : J \to \mathbb{C}^n$ sulla prima coordinata. Chiaramente gli aperti $V_i = \{l_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ formano (intersecati con J) un atlante olomorfo per J, e poste coordinate $z_1, \dots, z_n, \frac{l_1}{l_i}, \dots, \widehat{\frac{l_i}{l_i}}, \dots, \frac{l_n}{l_i}$ su V_i, consideriamo le coordinate $z(i)_j = \frac{l_j}{l_i} = \frac{z_j}{z_i}$ per $i \neq j$ e $z(i)_i = z_i$ su $J \cap V_i$.
Su $J \cap V_i$, la proiezione si scrive come $\pi(z(i)_1, \dots, z(i)_n) = (z(i)_1 z(i)_i, \dots, z(i)_i, \dots, z(i)_n z(i)_i)$; inoltre si ha che:
$$\pi^{-1}(v) = \begin{cases} \{(v, [v])\} & \text{se } v \neq 0 \\ \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} & \text{se } v = 0 \end{cases}$$
La fibra di 0 si indica usualmente con E e si chiama **divisore eccezionale**. D'altra parte, la proiezione fuori dal divisore eccezionale si restringe a un biolomorfismo fra $J \backslash E$ e $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Infine, per lavorare in coordinate, si osserva che E ha equazione $z(i)_i = z_i = 0$ su $J \cap V_i$.

Adesso sia $V \subseteq \mathbb{C}^n$ un'ipersuperficie data dall'equazione $f(z_1, \dots, z_n) = 0$. Sicuramente $\pi^{-1}(V)$ ha equazione $f(z(i)_1 z(i)_i, \dots, z(i)_i, \dots, z(i)_n z(i)_i) = 0$ su $J \cap V_i$. Ispirandoci a quanto visto sopra, ci interessiamo al sottoinsieme $\overline{\pi^{-1}(V \backslash \{0\})}$ di J, che chiamiamo **trasformata stretta** di V; $\pi^{-1}(V \backslash \{0\})$ è biolomorfo a $V \backslash \{0\}$, ma la chiusura in J "ingrandisce" il punto 0. Per visualizzare meglio la costruzione che stiamo facendo, il prossimo esempio tratta un caso particolarmente semplice.

Esempio. Consideriamo le rette in $\mathbb{C}^2$ passanti per 0. Prendendo lo scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in 0, si ottiene una copia identica di $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ unita ad un $E = \mathbb{P}^1$ che possiamo identificare come una retta compattificata; inoltre una retta r di $\mathbb{C}^2$ passante per 0 diventa una retta dello scoppiamento che interseca E in un punto che dipende dal coefficiente angolare di r. In altre parole, rette diverse di $\mathbb{C}^2$ per 0 non si intersecano in E dentro allo scoppiamento. L'effetto ottenuto è quindi quello di aver "scoppiato" il punto di intersezione comune 0 a una retta compattificata, che è un divisore dello scoppiamento.

In modo analogo a come fatto nell'esempio precedente, possiamo identificare il divisore eccezionale $E = \mathbb{P}^{n-1}$ come il proiettivizzato del tangente $T'_0(\mathbb{C}^n)$, e se $\rho = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, si ha che $\pi^{-1}(\rho) = \{(\lambda v, [v]) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ e $\pi^{-1}(\rho) \cap E = \{(0, [v])\}$, cioè il punto di intersezione di una retta $r \subseteq \mathbb{C}^n$ passante per 0 con il divisore eccezionale (dentro allo scoppiamento) dipende dal tangente di r in 0.
Osserviamo infine che tutta la costruzione che abbiamo fatto finora è locale, cioè può essere fatta in qualunque intorno aperto di 0 in $\mathbb{C}^n$.

Più in generale, sia M una varietà complessa (compatta) di dimensione $n \geq 2$, e sia U un aperto di M intorno a un punto $x \in M$, dotato di una carta $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{C}^n$; assumiamo senza perdita di generalità che $\varphi(x) = 0$. Abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(V) \subseteq J \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\pi"] \\ M \supseteq U \arrow[r, "\varphi"'] & V \subseteq \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Rincollando tramite la mappa tratteggiata lo scoppiamento $\pi^{-1}(V)$ su M al posto di U, otteniamo lo **scoppiamento** di M in x, denotato $\mathrm{Bl}_x(M)$. Otteniamo anche una mappa $\widetilde{\pi} : \mathrm{Bl}_x(M) \to M$ olomorfa, tale che $\widetilde{\pi}^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Quest'ultimo insieme, indicato con E_x, si chiama **divisore eccezionale** (in x); come nel caso di $\mathbb{C}^n$, la restrizione di $\widetilde{\pi}$ fuori dal divisore eccezionale E_x produce un biolomorfismo fra $\mathrm{Bl}_x(M)\backslash E_x$ e $M\backslash\{0\}$.
Costruiti degli aperti $\widetilde{V_i}$ esattamente come nel caso di $\mathbb{C}^n$, si ha che E_x ha equazione $z_i = 0$ su $\widetilde{V_i}$. Perciò E_x è un divisore, localmente uguale a (z_i), dunque il line bundle $[E_x]$ ha funzioni di transizione $\frac{z_i}{z_j}$ su $\widetilde{V_i} \cap \widetilde{V_j}$; ma allora, detta π_2 la proiezione sul secondo fattore $\pi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$, si ha che $[E_x]_{|U} \cong \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)_{|\widetilde{V}}$. Si hanno perciò gli isomorfismi:

$$[E_x]_{|E_x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1), \qquad [-E_x]_{|E_x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1),$$

da cui ad esempio si ottiene che $H^0(E_x, [-E_x]_{|E_x}) \cong \{\text{iperpiani di } E_x\} \cong T'_x(M)^*$.

Sia adesso $L \in \mathrm{Pic}(M)$ un line bundle su M, e consideriamo il line bundle $\widetilde{L} = \pi^*(L)$ su $\widetilde{M}$. Fuori dal divisore eccezionale si ha che $\widetilde{L}_{|\widetilde{M}\backslash E_x} \cong L_{|M\backslash\{x\}}$, mentre $\widetilde{L}_{|E_x} = E_x \times L_x$.

Proposizione 3.1.7. $\pi^* : H^0(M, \mathcal{O}(L)) \to H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L}))$ *è un isomorfismo.*

Dimostrazione. L'iniettività è chiara, perchè se $\pi^*\sigma = 0$, allora σ è identicamente nulla su $M\backslash\{x\}$ e olomorfa, quindi $\sigma \equiv 0$. La surgettività è analoga, perchè ogni $\tau \in H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L}))$ dà per restrizione una sezione di L su $M\backslash\{x\}$, che si estende a tutto M. □

Come visto sopra, $\widetilde{L}$ è banale su E_x, quindi $H^0(E_x, \mathcal{O}(\widetilde{L}_{|E_x})) \cong \mathbb{C} \cong L_x$, in quanto $E_x \cong \mathbb{P}^{n-1}$ è compatta. Perciò si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L})) \arrow[r, "r_{E_x}"] \arrow[d, "\wr"'] & H^0(E_x, \mathcal{O}(\widetilde{L}_{|E_x})) \arrow[d, "\wr"] \\ H^0(M, \mathcal{O}(L)) \arrow[r, "r_x"'] & L_x \end{tikzcd}$$

In particolare, r_x è surgettiva se e solo se r_{E_x}. Siamo quindi riusciti a rimpiazzare il line bundle L con un altro line bundle, con le stesse sezioni e con le stesse proprietà algebriche, che però ha un divisore al posto del punto x. Riscriviamo per completezza le condizioni sufficienti che avevamo trovato affinchè i_L fosse un embedding, in questo nuovo setting.
La successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x]) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{L}) \xrightarrow{r_{E_x}} \mathcal{O}_{E_x}(\widetilde{L}_{|E_x}) \longrightarrow 0$$

è esatta di fasci su $\widetilde{M}$, e, se in coomologia $H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x]))$, allora r_{E_x} è surgettiva e quindi anche r_x lo è.
In modo del tutto analogo, se $x \neq y \in M, \widetilde{M} = \mathrm{Bl}_{x,y}(M)$ è lo scoppiamento in x e in y (cioè abbiamo scoppiato M in due intorni disgiunti di x e y) e $E = E_x + E_y$ è il divisore eccezionale, allora con lo stesso ragionamento si ha che, se $H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x] - [E_y])) = 0$ per ogni $x \neq y$, la mappa i_L è iniettiva.

Infine, consideriamo nuovamente lo scoppiamento $\mathrm{Bl}_x(M)$ dotato della proiezione π su M. Se σ è una sezione di L nulla in x, allora la sezione $\pi^*\sigma$ di $\widetilde{L}$ è nulla su tutto E_x, perciò π^* si restringe a un isomorfismo:

$$\pi^* : H^0(M, \mathscr{I}_x(L)) \xrightarrow{\sim} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x])).$$

A questo punto si ha la catena di isomorfismi:

$$H^0(E_x, \mathcal{O}((\widetilde{L} - [E_x])_{|E_x})) \cong L_x \otimes H^0(E_x, \mathcal{O}(-[E_x]_{|E_x})) \cong L_x \otimes T'_x(M)^*,$$

da cui si ottiene il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x])) \arrow[r, "r_{E_x}"] \arrow[d, "\wr"'] & H^0(E_x, \mathcal{O}((\widetilde{L} - [E_x])_{|E_x})) \arrow[d, "\wr"] \\
H^0(M, \mathscr{I}_x(L)) \arrow[r, "d_x"'] & L_x \otimes T'_x(M)^*
\end{tikzcd}$$

In particolare, d_x è surgettiva se e solo se r_{E_x} lo è. Dunque, lavorando come sopra, si ha una successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{L} - 2[E_x]) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{L} - [E_x]) \xrightarrow{r_{E_x}} \mathcal{O}_{E_x}((\widetilde{L} - [E_x])_{|E_x}) \longrightarrow 0$$

esatta di fasci su $\widetilde{M}$, e se in coomologia $H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - 2[E_x])) = 0$, allora r_{E_x} è surgettiva, e quindi d_x lo è. Il prossimo teorema riassume tutti i risultati ottenuti in questa sezione:

Teorema 3.1.8. *Un line bundle L su M dà un embedding $i_L : M \to \mathbb{P}^N$ se, per ogni $x, y \in M$, si annulla il gruppo $H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}(\widetilde{L} - [E_x] - [E_y]))$, dove $\widetilde{M}$ è $\mathrm{Bl}_{x,y}(M)$ o $\mathrm{Bl}_x(M)$ a seconda che $x \neq y$ o $x = y$, e $\widetilde{L} = \pi^*(L)$.*

Come abbiamo già sottolineato varie volte, non vale il viceversa del teorema precedente; in ogni caso siamo riusciti a riscrivere una condizione prettamente topologica tramite l'annullamento di particolari H^1, cosa molto più facile da verificare. La prossima sezione si occupa di studiare quando questi H^1 si annullano.

3.2 Forme differenziali su varietà complesse

Sia $U \subseteq M$ un aperto con coordinate olomorfe $z_1, \dots, z_n$, decomposte come al solito in $z_j = x_j + iy_j$.

Definizione 3.2.1. Una **k-forma differenziale a valori in** $\mathbb{R}$ è una sezione C^∞ del fibrato $\Lambda^k T_{\mathbb{R}}(M)^*$, cioè del tipo $dx_I \wedge dy_J$, con $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ e $|I| + |J| = k$.

Il fascio dei germi delle k-forme differenziali reali si indica con $\mathscr{A}^k_{\mathbb{R}}(M)$.

Definizione 3.2.2. Una **k-forma differenziale a valori in** $\mathbb{C}$ è una sezione C^∞ del fibrato $\Lambda^k T_{\mathbb{C}}(M)^*$, cioè del tipo $dz_I \wedge d\overline{z_J}$, con $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ e $|I| + |J| = k$.

Il fascio dei germi delle k-forme differenziali complesse si indica con $\mathscr{A}^k(M)$.
Una sezione di $\mathscr{A}^k(M)$ su un aperto V di M è il dato di un ricoprimento aperto $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ (con coordinate olomorfe z_α su V_α) di V e di sezioni $\omega_\alpha \in \Gamma(V_\alpha, \Lambda^k T_{\mathbb{C}}(M)^*)$, scritte come

$$\omega_\alpha(z_\alpha, \overline{z_\alpha}) = \sum_{|I|+|J|=k} (h_\alpha)_{IJ}(z_\alpha, \overline{z_\alpha}) dz_{\alpha I} \wedge d\overline{z_{\alpha J}},$$

per certe $(h_\alpha)_{IJ}$ C^∞ su V_α, che coincidano sulle intersezioni $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, cioè, detto $H_{\alpha\beta}$ il cambio di coordinate da z_α a z_β (da cui $dz_\beta = \sum_J \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial z_{\alpha J}} dz_{\alpha J})$), valga la relazione:

$$dz_{\beta_I} \wedge d\overline{z_{\beta_J}} = \sum_{\substack{|I'|=|I| \\ |J'|=|J|}} \frac{\partial H_{\alpha_{I'}\beta_I}}{\partial z_{\alpha I'}} \frac{\partial \overline{H_{\alpha_{J'}\beta_J}}}{\partial \overline{z_{\alpha J'}}} dz_{\alpha I'} \wedge d\overline{z_{\alpha J'}}.$$

Per poter studiare forme differenziali su varietà complesse, viene naturale considerare forme a valori in $\mathbb{C}$. In tale caso, abbiamo che $T_{\mathbb{C}}(M) = T'(M) \oplus T''(M)$, dunque $T_{\mathbb{C}}(M)^* = T'(M)^* \oplus T''(M)^*$ e perciò:

$$\Lambda^k T_{\mathbb{C}}(M)^* = \bigoplus_{p+q=k} (\Lambda^p T'(M)^* \otimes \Lambda^q T''(M)^*).$$

Il termine all'interno della somma diretta è detto **fibrato delle (p,q)-forme a valori in $\mathbb{C}$**, e il corrispondente fascio dei germi si indica $\mathscr{A}^{p,q}(M)$. Le sezioni di $\mathscr{A}^{p,q}(M)$ si dicono (p,q)-**forme**, e localmente sono scrivibili (indipendentemente dalle coordinate):

$$\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ}(z,\overline{z}) dz_I \wedge d\overline{z_J}.$$

Facilmente si deduce che $\mathscr{A}^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \mathscr{A}^{p,q}(M)$, e se decomponiamo $\omega = \sum_{p+q=k} \omega^{(p,q)}$, possiamo considerare la proiezione:

$$\begin{array}{rccc} \pi^{(p,q)}: & \mathscr{A}^k(M) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p,q}(M) \\ & \omega & \longmapsto & \omega^{(p,q)} \end{array}$$

In modo analogo alle forme reali, vogliamo introdurre un differenziale d che agisca fra i gruppi delle forme complesse; definiamo perciò $d : \mathscr{A}^k(M) \to \mathscr{A}^{k+1}(M)$ localmente:

$$d\left(\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} a_{IJ}(z,\overline{z}) dz_I \wedge d\overline{z_J}\right) = \sum_{I,J,r} \frac{\partial a_{IJ}}{\partial z_r} dz_r \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J} + \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \overline{z_r}} d\overline{z_r} \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J}.$$

Non è difficile verificare che vale l'usuale relazione $d^2 = 0$, e restringendo la mappa d alla (p,q)-forme otteniamo un'altra mappa:

$$d_{|\mathscr{A}^{p,q}(M)} : \mathscr{A}^{p,q}(M) \longrightarrow \mathscr{A}^{p+1,q}(M) \oplus \mathscr{A}^{p,q+1}(M).$$

Inoltre, proiettando la mappa precedente su ciascun fattore in arrivo, otteniamo due nuove mappe $\partial_{p,q} = \pi^{p+1,q} \circ d_{|\mathscr{A}^{p,q}(M)}$ e $\overline{\partial_{p,q}} = \pi^{p,q+1} \circ d_{|\mathscr{A}^{p,q}(M)}$. Estendendo per linearità $\partial_{p,q}$ e $\overline{\partial_{p,q}}$ a $\mathscr{A}^k(M)$, si hanno due mappe

$$\partial, \overline{\partial} : \mathscr{A}^k(M) \longrightarrow \mathscr{A}^{k+1}(M),$$

tali che $d = \partial + \overline{\partial}$. Inoltre $d^2 : \mathscr{A}^{p,q}(M) \to \mathscr{A}^{p+2,q}(M) \oplus \mathscr{A}^{p+1,q+1}(M) \oplus \mathscr{A}^{p,q+2}(M)$ si decompone come $0 = d^2 = (\partial^2, \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial, \overline{\partial}^2)$, dunque si ottiene che $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

Definizione 3.2.3. Una **p-forma olomorfa** ω su un aperto U di M è una sezione olomorfa su U del fibrato $\Lambda^p T'(M)^*$.

Localmente, una p-forma olomorfa ω si scrive come $\omega = \sum_{|I|=p} a_I dz_I$, ovvero ω è una p-forma olomorfa se e solo se è di tipo $(p,0)$ e $\overline{\partial}\omega = 0$. Il fascio dei germi delle p-forme olomorfe si indica $\Omega^p(M)$; chiaramente $\Omega^0(M) = \mathcal{O}_M$.

Definizione 3.2.4. Definiamo il sottofascio $Z_{\overline{\partial}}^{p,q}(M) = \mathrm{Ker}(\overline{\partial}_{p,q})$, e definiamo la **coomologia di Dolbeault** (p,q)**-esima** di M

$$H_{\overline{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{H^0(M, Z_{\overline{\partial}}^{p,q}(M))}{\overline{\partial}_{p,q-1}\left(H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))\right)},$$

dove le forme globali al numeratore sono dette (p,q)**-forme** $\overline{\partial}$**-chiuse**, mentre quelle al denominatore sono dette (p,q)**-forme** $\overline{\partial}$**-esatte**.

Si osserva subito che $H_{\overline{\partial}}^{0,0}(M) = H^0(M, \mathcal{O}_M)$ e che $H_{\overline{\partial}}^{p,0}(M) = H^0(M, Z_{\overline{\partial}}^{p,0}(M)) = H^0(M, \Omega^p(M))$. Inoltre i fasci $\mathscr{A}^{p,q}(M)$ sono aciclici, in quanto $C^\infty(M)$-moduli. Abbiamo un complesso:

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \longrightarrow \mathscr{A}^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathscr{A}^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots.$$

Non dimostriamo il seguente importante risultato:

Teorema 3.2.1 ($\overline{\partial}$-Poincarè)**.** *$\Delta_r \subseteq \mathbb{C}^n$ disco di raggio $r \leq +\infty$. Allora $H_{\overline{\partial}}^{p,q}(\Delta_r) = 0$ per ogni $q \geq 1$. Lo stesso vale per i dischi puntati $\Delta_r^* = \Delta_r \backslash \{0\}$ e per i prodotti $\Delta_r^k \times (\Delta_{r'}^*)^h$, con $k + h = n$.*

Dimostrazione. DIMOSTRAZIONE? □

Corollario 3.2.2. *Il complesso precedente è una risoluzione aciclica (secondo la coomologia di Dolbeault) di $\Omega^p(M)$.*

Corollario 3.2.3. *Sia M una varietà di dimensione n. Allora:*

- $H^q(M, \Omega^p(M)) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q}(M)$;
- $H^0(M, \Omega^p(M)) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,0}(M) = 0$ *per ogni* $p > n$;
- $H^q(M, \mathcal{O}_M) \cong H_{\overline{\partial}}^{0,q}(M) = 0$ *per ogni* $q > n$;
- $H^q(M, \Omega^p(M)) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q}(M) = 0$ *per ogni* $p + q > 2n$.

In particolare abbiamo che $H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ per ogni $q \geq 1$. Consideriamo perciò la successione esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^* \longrightarrow 0,$$

e analizziamo la corrispondente successione esatta lunga. Per ogni $q \geq 1$ si hanno dei pezzi di successione esatta del tipo:

$$H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*) \longrightarrow H^{q+1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}),$$

con il primo e l'ultimo termine nulli, da cui anche $H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*) = 0$. Da questo ricaviamo:

Corollario 3.2.4. *Ogni ipersuperficie analitica $V \subseteq \mathbb{C}^n$ è luogo di zeri di una funzione olomorfa intera.*

Dimostrazione. Consideriamo un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di $\mathbb{C}^n$ per cui V ammette una funzione di definizione locale f_α su U_α. Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*)$ è un 1-cociclo di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*$, dunque esistono delle $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^*)$ tali che $g_{\alpha\beta} = \delta(h_\alpha)$ su U_α, da cui $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = \frac{h_\beta}{h_\alpha}$ e quindi le $f_\alpha h_\alpha = f_\beta h_\beta$, che sono ancora funzioni di definizione locale per V su $U_\alpha \cap U_\beta$, si rincollano a una funzione di definizione locale intera. □

Corollario 3.2.5. *Ogni ricoprimento aperto di una varietà complessa M fatto con aperti biolomorfi a $(\mathbb{C}^n)^k \times ((\mathbb{C}^n)^*)^h$, per cui tutte le intersezioni sono dello stesso tipo, è aciclico per $\Omega^p(M)$ e dunque adatto a calcolare la sua coomologia.*

Dimostrazione. Da $\overline{\partial}$-Poincarè si ha che $H^q(\mathbb{C}^n, \Omega^p(\mathbb{C}^n)) = H^q((\mathbb{C}^n)^*, \Omega^p((\mathbb{C}^n)^*)) = 0$ per ogni $q \geq 1$. □

Come applicazione del corollario precedente possiamo calcolare la coomologia di Dolbeault di $\mathbb{P}^n$ usando le carte coordinate. Si può vedere che:

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\mathbb{P}^n) = H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p(\mathbb{P}^n)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } p = q \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3.3 Metriche hermitiane su varietà complesse

Indichiamo con $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un prodotto hermitiano. La matrice H di φ nella base canonica è tale che ${}^tH = \overline{H}$ e $\varphi(z, w) = {}^tzH\overline{w}$ per ogni $z, w \in \mathbb{C}^n$; inoltre $\varphi(z, z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Considerando $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, φ induce una mappa bilineare $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}$, tale che $\mathfrak{Re}(\varphi)$ è simmetrica (cioè è un prodotto scalare) e $\mathfrak{Im}(\varphi)$ è alternante. Si osserva che, se φ è definita positiva, anche $\mathfrak{Re}(\varphi)$ lo è.
Scriviamo $H = A + iB$, con A, B matrici reali rispettivamente simmetrica e antisimmetrica; decomponendo inoltre $z = x + iy$, $w = u + iv$, abbiamo che:

$${}^tzH\overline{w} = ({}^tx \; {}^ty) \left[\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} B & -A \\ A & B \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

dove la prima matrice a blocchi è la matrice di $\mathfrak{Re}(\varphi)$ e la seconda di $\mathfrak{Im}(\varphi)$.

Definizione 3.3.1. M varietà complessa. Una **metrica hermitiana** su M è il dato di un prodotto hermitiano $(,)_z$ definito positivo su $T'_z(M)$ per ogni $z \in M$, che varia in modo liscio con z. In altre parole, usando il frame $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ di $T'(M)$ su un aperto $U \subseteq M$ con coordinate olomorfe z_i, vale che le $h_{ij}(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j} \right)_z$ sono lisce su U.

Si nota subito che le metriche hermitiane esistono sempre, in quanto esistono localmente (come pullback del prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$ tramite una carta), e si rincollano con una partizione dell'unità.

In generale, se V è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, possiamo considerare lo spazio vettoriale $\overline{V}$ su $\mathbb{C}$ dato da $(V, +, \bar{\cdot})$, dove $\lambda \bar{\cdot} v = \overline{\lambda} v$. Se $v_1, \ldots, v_n$ è una base di V, è sicuramente anche una base di $\overline{V}$, e la denotiamo $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n}$. Analogamente, se $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$, poniamo $\overline{v} = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \overline{v_i} \in \overline{V}$. Otteniamo in questo modo un isomorfismo $\overline{\bullet} : V \to V^*$ $\mathbb{C}$-lineare.
Infine, lo spazio $V \otimes \overline{V}$ ha la proprietà universale che, per ogni $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ sesquilineare, esiste un'unica funzione $\mathbb{C}$-lineare $f : V \otimes \overline{V} \to \mathbb{C}$ tale che:

$$\begin{tikzcd} V \otimes \overline{V} \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ V \times V \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Da questo breve richiamo di algebra lineare, otteniamo che ogni prodotto hermitiano $(,)_z$ di una metrica hermitiana corrisponde a un $ds^2_z : T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \to \mathbb{C}$ lineare, e visto che $\overline{T'_z(M)} \cong T''_z(M)$, allora $ds^2_z \in (T'_z(M) \otimes T''_z(M))^* = T'_z(M)^* \otimes T''_z(M)^*$. Dato che ds^2_z varia in modo liscio con z, possiamo dire che ds^2 è una sezione C^∞ di $T'(M)^* \otimes T''(M)^*$. In termini del frame $\{dz_i \otimes d\overline{z_j}\}_{i,j=1,\dots,n}$ di $T'(M)^* \otimes T''(M)^*$ su un aperto $U \subseteq M$ con coordinate olomorfe $z_1, \dots, z_n$, ds^2 si può scrivere

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\overline{z_j}$$

su U, con le h_{ij} lisce e antisimmetriche (cioè $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$).

Definizione 3.3.2. Un **frame unitario** per la metrica hermitiana su $U \subseteq M$ aperto è un frame $\rho_1, \dots, \rho_n$ per $T'(M)$ su U tale che $(\rho_i, \rho_j)_z = \delta_{ij}$ per ogni $z \in U$. Un **coframe unitario** per la stessa metrica è un frame $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ per $T'(M)^*$ che diagonalizza ds^2, cioè tale che $ds^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \varphi_i$.

É immediato accorgersi che $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono i duali di $\rho_1, \dots, \rho_n$; inoltre localmente frame e coframe unitari esistono per Gram-Schmidt. Osserviamo anche che $\mathfrak{Re}(ds^2)$ dà un prodotto scalare definito positivo su $T'_z(M) \cong T_{\mathbb{R},z}(M)$ per ogni $z \in M$, e induce una metrica riemanniana su M.
Invece $\mathfrak{Im}(ds^2)$ dà per ogni $z \in M$ una forma bilineare alternante su $T'_z(M)$, e induce una 2-forma globale reale; poniamo $\omega = -\frac{1}{2}\mathfrak{Im}(ds^2)$, chiamata **$(1,1)$-forma associata alla metrica hermitiana**. Per vedere che è effettivamente una $(1,1)$-forma, scriviamo tutto in coordinate: se nella base $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$ ds^2 ha coefficienti $h_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}$, nella base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}$ $\mathfrak{Im}(ds^2)$ è data da (riscrivendo la relazione matriciale vista sopra):

$$\mathfrak{Im}(ds^2) = \sum_{i,j} [b_{ij}(dx_i \otimes dx_j + dy_i \otimes dy_j) + a_{ij}(-dx_i \otimes dy_j + dy_j \otimes dx_i)].$$

Usando la relazione $v \wedge w = \frac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)$, possiamo riscriverla:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}(ds^2) &= 2\sum_{i<j} [b_{ij}(dx_i \wedge dx_j + dy_i \wedge dy_j) + a_{ij}(dy_j \wedge dx_i + dy_i \wedge dx_j)] + 2\sum_i a_{ii} dy_i \wedge dx_i = \\ &= \sum_{i<j} [b_{ij}(dz_i \wedge d\overline{z_j} - dz_j \wedge d\overline{z_i}) + i a_{ij}(dz_i \wedge d\overline{z_j} + dz_j \wedge d\overline{z_i})] - \sum_i a_{ii} dz_i \wedge d\overline{z_i}\end{aligned}$$

L'ultima riscrittura fa chiaramente capire che $\mathfrak{Im}(ds^2)$ è una $(1,1)$-forma, da cui anche ω lo è.
In termini di un coframe unitario $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, posto $\varphi_j = a_j + i\beta_j$ per ogni j, possiamo scrivere ds^2 come:

$$\begin{aligned}ds^2 &= \sum_{j=1}^n \varphi_j \otimes \overline{\varphi_j} = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) \otimes (\alpha_j - i\beta_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + i\sum_{j=1}^n (-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j),\end{aligned}$$

e chiaramente le ultime due somme sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di ds^2. Perciò, osservando che $\varphi_j \wedge \overline{\varphi_j} = -2i\alpha_j \wedge \beta_j$, otteniamo:

$$\omega = -\frac{1}{2}\mathfrak{Im}(ds^2) = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j = \frac{i}{2}\sum_j \varphi_j \wedge \overline{\varphi_j}.$$

Osserviamo che $\omega(v, \overline{v}) = \frac{i}{4} ds^2(v, v)$, quindi la forma ω è **positiva**, cioè $-i\omega(v, \overline{v}) > 0$ per ogni $v \in T'_z(M)$ non nullo. Inoltre la $(1,1)$-forma ω definisce univocamente una metrica ds^2.

Vediamo adesso alcuni esempi di metriche hermitiane.

Esempi.
- Su $\mathbb{C}^n$, la metrica euclidea $ds^2 = \sum_{i,j} dz_i \otimes d\overline{z_j}$ è hermitiana, e $\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j} dz_i \wedge d\overline{z_j}$ è tale che $d\omega = 0$.

- Su $\mathbb{P}^n$ induciamo una metrica con la $(1,1)$-forma $\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}(\log|z|^2)$, definita su ogni aperto $U \subseteq \mathbb{P}^n$ con sezione $z : U \to \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ olomorfa di $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n$. É fondamentale osservare che, se z' è un'altra sezione olomorfa di π su U, allora $z' = hz$ per una certa h olomorfa mai nulla, e dunque:

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}(\log \underbrace{|z'|^2}_{=h\overline{h}|z|^2}) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}(\log|z|^2 + \log h + \log\overline{h}) = \omega + \frac{i}{2\pi}\left(-\overline{\partial}\partial(\log h) + \partial\overline{\partial}(\log\overline{h})\right) = \omega,$$

in quanto $\partial(\log h)$ è olomorfa e $\overline{\partial}(\log\overline{h})$ è antiolomorfa. Tali ω si rincollano sulla carte affini di $\mathbb{P}^n$, e formano una $(1,1)$-forma globale. Vogliamo vedere che ω è positiva; visto che le matrici unitarie $U(n+1)$ agiscono transitivamente sulle carte affini di $\mathbb{P}^n$ e non alterano la norma, basta restringersi alla carta affine $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$. Sia dunque $P \in U_0$, e senza perdita di generalità $P = [1, 0, \ldots, 0]$. Se sulla carta U_0 poniamo le coordinate $w_1, \ldots, w_n$, allora $U_0 \ni z = [1, w_1, \ldots, w_n]$ e perciò:

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\left(\log\left(1 + \sum_i w_i\overline{w_i}\right)\right) = \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\sum_i w_i d\overline{w_i}}{1 + \sum_i w_i\overline{w_i}}\right) =$$
$$= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{\sum_i dw_i \wedge d\overline{w_i}}{1 + \sum_i w_i\overline{w_i}} - \frac{(\sum_i \overline{w_i}dw_i) \wedge \left(\sum_j w_j d\overline{w_j}\right)}{(1 + \sum_i w_i\overline{w_i})^2}\right),$$

da cui $\omega(P) = \frac{i}{2\pi}\sum_{i,j} dw_i \wedge d\overline{w_j}$ non è altro che la $(1,1)$-forma della metrica euclidea su $\mathbb{C}^n$ (a meno di un fattore $\frac{1}{\pi}$), che sappiamo essere positiva. ω definisce una metrica hermitiana su $\mathbb{P}^n$, detta **metrica di Fubini-Study**. Osserviamo che anche in questo caso $d\omega = 0$.

D'altra parte, anche la parte reale di ds^2 è interessante da studiare, in quanto fornisce informazioni quantitave sulle sottovarietà di M. Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ è un coframe unitario, decomposto come $\varphi_j = \alpha_j + i\beta_j$ per ogni j, allora $\mathfrak{Re}(ds^2) = \sum_j \alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j$. Detta $\phi = \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$ la forma di volume associata alla metrica riemanniana, è immediato osservare che $\omega^n = n!\phi$ (dove indichiamo con ω^n il prodotto esterno di ω con se stessa n volte), in quanto $\omega = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j$. Perciò, se $S \subseteq M$ è una sottovarietà complessa di dimensione k, la forma di volume su S è $\frac{\omega^k}{k!}{}_{|S}$, da cui:

$$\mathrm{vol}(S) = \frac{1}{k!}\int_S \omega^k.$$

É un fatto estremamente rimarchevole che il volume delle sottovarietà possa essere calcolato tramite un'unica forma globale! Similmente, se $V \subseteq M$ è una sottovarietà analitica irriducibile, con codimensione (reale) dei punti singolari almeno 2, è ben definito porre $\int_V \phi = \int_{V^*} \phi$ (in realtà integriamo solo gli addendi di ϕ di tipo (k,k), con k la dimensione della sottovarietà). Richiamiamo per completezza il noto teorema di Stokes:

Teorema 3.3.1 (Stokes)**.** *Sia $V \subseteq M$ una sottovarietà analitica irriducibile di dimensione k. Se φ è una $(2k-1)$-forma, allora $\int_V d\varphi = 0$.*

3.4 Teoria di Hodge

Ttramite la metrica hermitiana ds^2, vogliamo definire un prodotto hermitiano sulle (p,q)-forme, di cui vedremo subito l'importanza. Innanzitutto, definiamo un prodotto hermitiano definito positivo $\langle , \rangle_z$ su ogni fibra di $\Lambda^k T'(M)^* \otimes \Lambda^q T''(M)^*$, dichiarando che, se $\varphi, \dots, \varphi_n$ è un coframe unitario per ds^2 in un intorno di z, la base $\{\varphi_I(z) \otimes \overline{\varphi_J}(z)\}_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}$ sia ortogonale e di norma $(\sqrt{2})^{p+q}$. In questo modo, se come sopra $\phi = \frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\sum_j \varphi_j \wedge \overline{\varphi_j}\right)^n = \left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \overline{\varphi_1} \wedge \dots \wedge \overline{\varphi_n}$, allora:

$$\langle \phi, \phi \rangle_z = \left(\frac{i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{-i}{2}\right)^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \overline{\varphi_n}, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \overline{\varphi_n})_z = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n} 2^{2n} = 1.$$

Adesso poniamo il seguente prodotto hermitiano definito positivo sulle (p,q)-forme $H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$:

$$(\psi, \eta) = \int_M (\psi(z), \eta(z))_z \phi(z).$$

In pratica tale prodotto hermitiano è molto difficile da calcolare, quindi cerchiamo un modo di evitare il calcolo esplicito. Ad esempio, costruiamo un operatore $* : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{n-p,n-q}(M))$ tale che

$$(\psi(z), \eta(z))_z \phi(z) = \psi(z) \wedge *\eta(z), \quad \text{cioè} \qquad (\psi, \eta) = \int_M \psi \wedge *\eta$$

per ogni ψ, η (p,q)-forme. É una verifica vedere che, se η ammette la rappresentazione locale $\eta = \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \eta_{IJ} \varphi_I \wedge \overline{\varphi_J}$, allora:

$$*\eta = i^n 2^{p+q-n} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \varepsilon_{IJ} \overline{\eta_{IJ}} \varphi_{I^c} \wedge \overline{\varphi_{J^c}},$$

dove ^{c} indica il complementare in $\{1, \dots, n\}$ e ε_{IJ} è il segno della permutazione che trasforma $(1, \dots, n, 1', \dots, n')$ in (I, I^c, J, J^c) (e i quattro insieme I, I^c, J, J^c sono ordinati in senso crescente). La formula precedente può essere presa come una definzione locale di $*\eta$, e questi dati locali si rincollano creando una forma globale.
L'operatore $*$ è involutivo a meno del segno: $**\eta = (-1)^{p+q}\eta$. Inoltre, verificato che $*1 = \phi$, ne deduciamo che $*\phi = 1$.

A questo punto, costruito un prodotto hermitiano sulle forme, possiamo chiederci se esiste l'aggiunto dell'operatore $\overline{\partial}$, cioè un operatore $\overline{\partial}^* : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))$ tale che $(\overline{\partial}\psi, \eta) = (\psi, \overline{\partial}^*\eta)$ per ogni ψ $(p, q-1)$-forma e η (p,q)-forma.

Proposizione 3.4.1. *L'aggiunto di* $\overline{\partial}$ *è* $\overline{\partial}^* = - * \overline{\partial} *$.

Dimostrazione. Si ha la catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}(\overline{\partial}\psi, \eta) &= \int_M \overline{\partial}\psi \wedge *\eta = (-1)^{p+q} \int_M \psi \wedge \overline{\partial} * \eta + \int_M \overline{\partial}(\psi \wedge *\eta) = \\ &= (-1)^{p+q} \int_M \psi \wedge \overline{\partial} * \eta + \int_M d(\psi \wedge *\eta) = - \int_M \psi \wedge (* * \overline{\partial} * \eta) = (\psi, - * \overline{\partial} * \eta),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $d = \overline{\partial}$ su $\psi \wedge *\eta$, essendo essa una $(n, n-1)$-forma. □

Definizione 3.4.1. Definiamo il $\overline{\partial}$-laplaciano come l'operatore $\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$.

Chiaramente l'operatore $\Delta_{\overline{\partial}}$ è autoaggiunto.

Definizione 3.4.2. $\psi \in H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$ si dice **armonica** se $\Delta_{\overline{\partial}}\psi = 0$. Le (p,q)-forme armoniche si indicano con $\mathscr{H}^{p,q}(M)$.

Lemma 3.4.2. *ψ è armonica se e solo se $\overline{\partial}\psi = \overline{\partial}^*\psi = 0$.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia. Per l'altra, basta osservare che:

$$(\Delta_{\overline{\partial}}\psi, \psi) = (\overline{\partial}\overline{\partial}^*\psi, \psi) + (\overline{\partial}^*\overline{\partial}\psi, \psi) = (\overline{\partial}^*\psi, \overline{\partial}^*\psi) + (\overline{\partial}\psi, \overline{\partial}\psi) = \|\overline{\partial}^*\psi\|^2 + \|\overline{\partial}\psi\|^2.$$

□

Proposizione 3.4.3. *$\psi \in H^0(M, Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M))$ è armonica se e solo se ψ ha norma minima nella sua classe di coomologia di Dolbeault.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Per il lemma precedente, presa una qualunque $\eta \in H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))$, si ha che:

$$\|\psi + \overline{\partial}\eta\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2 + 2\mathfrak{Re}(\psi, \overline{\partial}\eta) = \|\psi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2 + 2\mathfrak{Re}(\overline{\partial}^*\psi, \eta) = \|\psi\|^2 + \|\overline{\partial}\eta\|^2.$$

$\Leftarrow$) Presa $\eta \in H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))$, e derivando due volte in 0 le funzioni $t \mapsto \|\psi + t\overline{\partial}\eta\|^2$ e $t \mapsto \|\psi + t\overline{\partial}(i\eta)\|^2$, si devono ottenere due numeri positivi. Ma dalla formula precedente si vede facilmente che i due numeri sono $\mathfrak{Re}(\overline{\partial}^*\psi, \eta)$ e $\mathfrak{Re}(\overline{\partial}^*\psi, i\eta)$; visto che lo stesso ragionamento può essere fatto per $-\eta$, si ha che $\overline{\partial}^*\psi$ è ortogonale a tutto $H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))$, cioè è 0.

□

Corollario 3.4.4. *Se in una classe di coomologia di Dolbeault esiste un rappresentante armonico, allora è unico.*

Arrivati a questo punto della teoria di Hodge, avremmo bisogno di tanto lavoro per mostrare il seguente centrale teorema, che richiede alcuni risultati non banali sugli operatori compatti su spazi di Hilbert; essendo tali argomenti non strettamente legati alla geometria algebrica, evitiamo di trattarli. In ogni caso una trattazione completa può essere trovata all'interno del *Griffiths-Harris*.

Teorema 3.4.5 (Hodge)**.** *Il nucleo dell'operatore $\Delta_{\overline{\partial}}$ ha dimensione finita.*

Corollario 3.4.6.

- $\dim(\mathscr{H}^{p,q}(M)) < \infty$*;*
- *É ben definita la proiezione ortogonale $\mathscr{H} : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to \mathscr{H}^{p,q}(M)$;*
- *Esiste un operatore $G : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$, detto **operatore di Green**, tale che $G_{|\mathscr{H}^{p,q}(M)} \equiv 0$, $G\overline{\partial} = \overline{\partial}G$, $G\overline{\partial}^* = \overline{\partial}^*G$ e $\mathscr{H} + \Delta_{\overline{\partial}}G = \mathrm{id}$;*
- *Ogni $\psi : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$ si decompone come $\psi = \mathscr{H}(\psi) + \overline{\partial}(\overline{\partial}^*G\psi) + \overline{\partial}^*(\overline{\partial}G\psi)$, ovvero:*

$$H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) = \mathscr{H}^{p,q}(M) \oplus^{\perp} \overline{\partial}\left(H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M))\right) \oplus^{\perp} \overline{\partial}^*\left(H^0(M, \mathscr{A}^{p,q+1}(M))\right);$$

- *Se ψ è $\overline{\partial}$-chiusa, $\psi = \mathscr{H}(\psi) + \overline{\partial}(\overline{\partial}^*G\psi)$, e dunque $[\psi] = [\mathscr{H}(\psi)]$ in $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$.*
- *$\mathscr{H}^{p,q}(M) \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \cong H^q(M, \Omega^p(M))$.*

Dimostrazione. É praticamente tutto ovvio; per l'ultimo punto basta osservare che la proiezione $\mathscr{H} : H^0(M, Z^{p,q}(M)) \to \mathscr{H}^{p,q}(M)$ è surgettiva, ha come nucleo $\overline{\partial}(H^0(M, \mathscr{A}^{p,q-1}(M)))$ e passa al quoziente grazie al penultimo punto. □

Un'altra conseguenza importante del teorema di Hodge riguarda la simmetria dei gruppi di coomologia di Dolbeault. Infatti si verifica facilmente che $*\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\overline{\partial}}*$, da cui si ottiene:

Corollario 3.4.7. $* : \mathscr{H}^{p,q}(M) \to \mathscr{H}^{n-p,n-q}(M)$ *è un isomorfismo.*

Corollario 3.4.8. $H^p(M, \Omega^q(M)) \cong H^{n-p}(M, \Omega^{n-q}(M))$.

In particolare $\mathscr{H}^{n,n}(M) \cong \mathscr{H}^{0,0}(M) = \mathbb{C}$, e $\mathbb{C}$ è generato da 1, perciò $\mathscr{H}^{n,n}(M)$ è generato da $*1 = \phi$. Dunque la forma di volume ϕ è sempre armonica, per qualunque forma hermitiana su M.

Con questo lavoro siamo giunti finalmente alla:

Teorema 3.4.9 (Dualità di Kodaira-Serre)**.** $H^n(M, \Omega^n(M)) \cong \mathbb{C}$. *Inoltre l'accoppiamento di dualità*

$$\wedge : H^q(M, \Omega^p(M)) \otimes H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(M)) \longrightarrow H^n(M, \Omega^n(M))$$

è non degenere.

Dimostrazione. La prima affermazione segue subito da quanto visto. Per la seconda, è facile riscrivere l'accoppiamento $\wedge$ come la mappa $\Phi : \mathscr{H}^{p,q} \otimes \mathscr{H}^{n-p,n-q}(M) \to \mathbb{C}$ tale che $\Phi(\psi, \eta) = \int_M \psi \wedge \eta$, e, visto che $*$ dà un isomorfismo fra $\mathscr{H}^{p,q}(M)$ e $\mathscr{H}^{n-p,n-q}(M)$, per concludere basta notare che $\Phi(\psi, *\psi) = \|\psi\| > 0$ per ogni $\psi \in \mathscr{H}^{p,q}(M)$. □

Si può fare la stessa teoria di Hodge per ∂ e $d = \partial + \overline{\partial}$, senza sostanziali differenze. D'altra parte, in generale, non esistono relazioni fra i tre laplaciani Δ_∂, $\Delta_{\overline{\partial}}$ e Δ_d.

Definizione 3.4.3. Una metrica hermitiana su M si dice **di Kähler** se la $(1,1)$-forma ω è chiusa, cioè $d\omega = 0$. M si dice **di Kähler** se ammette una metrica di Kähler.

Sappiamo che $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{P}^n$ sono di Kähler, dunque anche tutte le loro sottovarietà complesse sono di Kähler. Inoltre, se M si immerge iniettivamente in $\mathbb{P}^n$, allora anche M deve essere di Kähler.

La richiesta di Kähler è locale, ed è equivalente a richiedere che intorno a ogni $p \in M$ ci siano coordinate olomorfe $z_1, \dots, z_n$ tali che localmente la metrica ds^2 osculi la metrica euclidea al secondo ordine, cioè tali che $ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\overline{z_j}$, con $h_{ij}(z) = \delta_{ij}(z) + O(|z|^2)$. Equivalentemente, se intorno a ogni $p \in M$ esiste un coframe unitario $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tale che $d\varphi_i(p) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Proposizione 3.4.10. *M di Kähler. Allora:*

1. $H^0(M, \Omega^q(M)) \hookrightarrow H^q_{DR}(M)$ *per ogni* $q \geq 0$*;*

2. $b_{2m}(M) = \dim H^{2m}(M, \mathbb{C}) > 0$ *per ogni* $1 \leq m \leq \dim(M)$.

Dimostrazione. 1. Sia $\eta \in H^0(M, \Omega^q(M))$. Dico che, se η è esatta, allora η è nulla. Per ogni $p \in M$, in termini di un coframe unitario $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ intorno a p, si ha che $\eta = \sum_{|I|=q} \eta_I \varphi_I$. Allora:

$$\eta \wedge \overline{\eta} = \sum_{I,J} \eta_I \overline{\eta_J} \varphi_I \wedge \overline{\varphi_J}.$$

La $(1,1)$-forma ω della metrica è $\omega = \frac{i}{2} \sum_i \varphi_i \wedge \overline{\varphi_i}$, da cui $\omega^{n-q} = c \sum_{|K|=n-q} \varphi_K \wedge \overline{\varphi_K}$ e perciò:

$$\int_M \eta \wedge \overline{\eta} \wedge \omega^{n-q} = c \int_M \left(\sum_{|I|=q} \eta_I \overline{\eta_I} \right) \phi = c' \operatorname{vol}(M) \neq 0$$

se $\eta \neq 0$. Ma se $\eta = d\psi$ è esatta, allora $d\eta = d\overline{\eta} = d\omega = d\omega^{n-q} = 0$, da cui $d(\psi \wedge \overline{\eta} \wedge \omega^{n-q}) = \eta \wedge \overline{\eta} \wedge \omega^{n-q}$ e l'integrale sopra non può essere $\neq 0$ per Stokes.
Rimane da mostrare che ogni $\eta \in H^0(M, \Omega^q(M))$ è chiusa. Visto che $d\eta = \partial\eta \in H^0(M, \Omega^{q+1}(M))$ è esatta, per l'osservazione precedente $d\eta = \partial\eta = 0$.

2. ω^m è una $2m$-forma chiusa e non esatta, perchè se per assurdo $\omega^m = d\psi$, allora:

$$0 \neq n! \operatorname{vol}(M) = \int_M \omega^n = \int_M \omega^m \wedge \omega^{n-m} = \int_M d\psi \wedge \omega^{n-m} = \int_M d(\psi \wedge \omega^{n-m}) = 0.$$

□

Adesso sia M di Kähler con $(1,1)$-forma ω. Possiamo considerare la mappa:

$$\begin{array}{rccc} L: & H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M)) & \longrightarrow & H^0(M, \mathscr{A}^{p+1,q+1}(M)) \\ & \eta & \longmapsto & \eta \wedge \omega \end{array}$$

Inoltre indichiamo con Λ l'aggiunto di L. Valgono le seguenti relazioni di commutazione:

Proposizione 3.4.11. *1.* $[L, d] = 0$ *e* $[\Lambda, d^*] = 0$*;*

2. $[L, d^*] = i(\overline{\partial} - \partial)$ *e* $[\Lambda, d] = i(\overline{\partial}^* - \partial^*)$*, ovvero* $[\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*$ *e* $[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*$*;*

3. $[L, \Lambda] = (p + q - n)\,\mathrm{id}$*;*

4. $[L, \Delta_d] = 0$ *e* $[\Lambda, \Delta_d] = 0$*;*

5. $\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial = 0$ *e* $\overline{\partial}\partial^* + \partial^*\overline{\partial} = 0$*;*

6. $\Delta_d = 2\Delta_{\overline{\partial}} = 2\Delta_\partial$*.*

Dimostrazione. Per dimostrare i primi 3 punti si fa vedere che quelle relazioni valgono in $\mathbb{C}^n$ con la metrica euclidea e si osserva che contengono solo derivate prime degli operatori in questione; a quel punto è facile generalizzare tali relazioni a M scegliendo localmente la metrica che oscula la metrica euclidea al secondo ordine.

4. Per la prima, vale la catena di uguaglianze:

$$L(dd^* + d^*d) = dLd^* + (d^*L + i(\overline{\partial} - \partial))d = d(d^*L + i(\overline{\partial} - \partial)) + d^*dL + i(\overline{\partial} - \partial)d = (dd^* + d^*d)L,$$

in quanto $(\overline{\partial} - \partial)(\overline{\partial} + \partial) = \overline{\partial}^2 - \partial^2 = 0$. Per l'altra è analogo.

5. Dalla relazione $\Lambda\partial - \partial\Lambda = i\overline{\partial}^*$, si ha che:

$$i(\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) = \partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\partial = 0.$$

Per l'altra basta passare ai coniugati.

6. Scrivendo $d = \partial + \overline{\partial}$ all'interno di Δ_d e usando le due relazioni precedenti, si vede facilmente che $\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}$. Inoltre:

$$-i\Delta_\partial = \partial(\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda) + (\Lambda\overline{\partial} - \overline{\partial}\Lambda)\partial = \partial\Lambda\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}\Lambda + \Lambda\overline{\partial}\partial - \overline{\partial}\Lambda\partial,$$

$$i\Delta_{\overline{\partial}} = \overline{\partial}(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\overline{\partial} = \overline{\partial}\Lambda\partial - \overline{\partial}\partial\Lambda + \Lambda\partial\overline{\partial} - \partial\Lambda\overline{\partial},$$

da cui $-i\Delta_\partial + i\Delta_{\overline{\partial}} = 0$, e cioè $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$.

□

Visto che ∂ e $\overline{\partial}$ commutano con la proiezione $\pi^{p,q}$, si ha che $[\Delta_d, \pi^{p,q}] = 0$. Possiamo perciò porre $\mathscr{H}_d^{p,q}(M) = \mathrm{Ker}(\Delta_d) \cap H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(M))$, e definire $H_d^{p,q}(M)$ come il quoziente fra le (p,q)-forme d-chiuse globali e le (p,q)-forme d-esatte globali. Defininendo in modo analogo $\mathscr{H}_\partial^{p,q}(M)$, dall'ultimo punto della proposizione precedente si ha che $\mathscr{H}_d^{p,q}(M) = \mathscr{H}_\partial^{p,q}(M) = \mathscr{H}_{\overline{\partial}}^{p,q}(M)$. Inoltre, detto $\mathscr{H}_d^r(M) = \mathrm{Ker}(\Delta_d) \cap H^0(M, \mathscr{A}^r(M))$, vale la decomposizione:

$$\mathscr{H}_d^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \mathscr{H}_d^{p,q}(M).$$

Un'altra considerazione importante è che, essendo Δ_d reale, vale la simmetria $\mathscr{H}_d^{p,q}(M) = \mathscr{H}_d^{q,p}(M)$.
Non è difficile accorgersi che la teoria di Hodge (e in particolare il teorema di Hodge) vale anche per l'operatore Δ_d; dunque abbiamo l'isomorfismo $H_d^{p,q}(M) = \mathscr{H}_d^{p,q}(M)$. Inoltre, detto $H_d^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} H_d^{p,q}(M)$ il quoziente fra le r-forme d-chiuse globali e le r-forme d-esatte globali, si osserva che $H_d^r(M) \cong H_{DR}^r(M)$. Come conseguenza della teoria di Hodge per Δ_d otteniamo:

Teorema 3.4.12 (Decomposizione di Hodge)**.** *Sia M di Kähler. Allora vale la decomposizione:*

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^q(M, \Omega^p(M)).$$

Inoltre $H_{\overline{\partial}}^{p,q}(M) = H^q(M, \Omega^p(M)) \cong H^p(M, \Omega^q(M)) = H_{\overline{\partial}}^{q,p}(M)$.

Perciò, organizzando i gruppi $H_d^{p,q}(M)$ nel cosiddetto **diamante di Hodge**:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & H_d^{0,0}(M) & & & \\
 & & H_d^{1,0}(M) & & H_d^{0,1}(M) & & \\
 & H_d^{2,0}(M) & & H_d^{1,1}(M) & & H_d^{0,2}(M) & \\
\iddots & & & & & & \ddots \\
 & & & \bullet & & & \\
\ddots & & & & & & \iddots \\
 & H_d^{n-2,n}(M) & & H_d^{n-1,n-1}(M) & & H_d^{n,n-2}(M) & \\
 & & H_d^{n-1,n}(M) & & H_d^{n,n-1}(M) & & \\
 & & & H_d^{n,n}(M) & & &
\end{array}$$

si ha una simmetria centrale (rispetto al centro $\bullet$) grazie alla dualità di Kodaira-Serre, mentre la teoria di Hodge per Δ_d fornisce una simmetria rispetto all'asse verticale.

Corollario 3.4.13. *M di Kähler. Allora $b_{2m+1}(M)$ è pari per ogni $m \geq 0$.*

Dimostrazione. Si ha che:

$$b_{2m+1} = \dim H^{2m+1}(M, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=2m+1} \dim H^{p,q}(M, \mathbb{C}) \equiv 0 \pmod 2,$$

in quanto i termini nella sommatoria sono uguali a due a due. □

Riotteniamo anche che:

$$H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p(\mathbb{P}^n)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } p = q \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti sappiamo che $H^r(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ è non nullo e uguale a $\mathbb{C}$ se e solo se r è pari e minore o uguale a n, dunque dalla decomposizione di Hodge si ha che $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega^p(\mathbb{P}^n)) = 0$ se $p + q$ è dispari, mentre, se $r = 2k$ è pari, si ha che $H^r(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ e nella decomposizione di Hodge $H^r(M, \mathbb{C})$ si scrive come $H^{k,k}_d(M)$ più altri termini uguali a coppie, da cui $H^{k,k}_d(M) \cong \mathbb{C}$ ed è l'unico fra gli $H^{p,q}_d(M)$ con $p + q = 2r$ non nullo.

3.5 I teoremi di Kodaira

Ormai siamo vicini alle dimostrazioni dei due celebri teoremi di Kodaira; prima però abbiamo bisogno di ridefinire la teoria di quest'ultimo capitolo sui fibrati olomorfi di M.

Definizione 3.5.1. Sia E un fibrato complesso su M. Una k**-forma** ω **a valori in** E è una sezione liscia del fibrato $\Lambda^k T_{\mathbb{C}}(M)^* \otimes E$, cioè localmente $\omega = \sum_{i=1}^k \eta_i \otimes \rho_i$, dove le η_i sono k-forme su M e $\rho_1, \dots, \rho_n$ è un frame locale per E.

Il fascio dei germi delle k-forme a valori in E si indica $\mathscr{A}^k(E)$; inoltre si possono definire analogamente le (p, q)**-forme a valori in** E, e il fascio dei germi delle (p, q)-forme a valori in E si indica $\mathscr{A}^{p,q}(E)$. In analogia con il prodotto $\wedge$, si può definire la mappa:

$$\begin{array}{rccc} \wedge_E : & \mathscr{A}^{p,q}(E) \otimes \mathscr{A}^{p',q'}(E^*) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p+p',q+q'}(M) \\ & (\eta \otimes s, \eta' \otimes s') & \longmapsto & (\eta \wedge \eta')s'(s) \end{array}$$

Se E è un fibrato olomorfo, si può anche definire il **differenziale** $\overline{\partial}_E : \mathscr{A}^{p,q}(E) \to \mathscr{A}^{p,q+1}(E)$ tale che, se $e_1, \dots, e_k$ è un frame locale olomorfo per E, e localmente $\eta = \sum_{j=1}^k \omega_j \otimes e_j$, allora $\overline{\partial}_E \eta = \sum_{j=1}^k \overline{\partial}\omega_j \otimes e_j$. É una buona definizione, perchè cambiando frame le funzioni olomorfe di cambio di base hanno differenziale $\overline{\partial}_E$ nullo. Per questo motivo è perciò impossibile dare una buona definizione di un differenziale ∂_E su E.

Definizione 3.5.2. E fibrato olomorfo. Una p**-forma olomorfa a valori in** E è una sezione olomorfa ω di $\Lambda^p T'(M)^* \otimes E$. In termini di un frame locale olomorfo $e_1, \dots, e_k$, ω si può scrivere localmente come $\omega = \sum_{j=1}^k \omega_j \otimes e_j$, con ω_j p-forme olomorfe su M.

Se $\Omega^p(E)$ indica il fascio dei germi delle p-forme olomorfe su E, si ha che $\Omega^p(E) = \mathrm{Ker}(\overline{\partial}_E) \cap \mathscr{A}^{p,0}(E)$.
Inoltre, grazie all'uguaglianza $\overline{\partial}_E^2 = 0$, possiamo creare una **coomologia di Dolbeault a valori in** E, indicata $H^{p,q}_{\overline{\partial}_E}(E)$ o $H^{p,q}_{\overline{\partial}_E}(M)$. Dal teorema di De Rham astratto si ha che:

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}_E}(E) \cong H^q(M, \Omega^p(E)).$$

Definizione 3.5.3. Una **metrica hermitiana** su E è il dato di un prodotto hermitiano $(,)_p$ definito positivo su E_p per ogni $p \in M$, che sia liscio rispetto a p.

Definizione 3.5.4. Un frame $\rho_1, \dots, \rho_k$ su E si dice **unitario** se dà una base ortonormale di E_p per ogni $p \in M$.

Data una metrica hermitiana su M e una su E, esse inducono prodotti hermitiani definiti positivi su $H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(E))$: sia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ un coframe unitario per la metrica su M, e $e_1, \dots, e_k$ un frame unitario per la metrica su E, definiti su un aperto $U \subseteq M$. Prese $\psi, \eta \in \Gamma(U, \mathscr{A}^{p,q}(E))$, tali che $\psi = \frac{1}{p!q!} \sum_{I,J,\alpha} \psi_{I,J,\alpha} \varphi_I \wedge \overline{\varphi_J} \otimes e_\alpha$ e $\eta = \frac{1}{p!q!} \sum_{I,J,\alpha} \eta_{I,J,\alpha} \varphi_I \wedge \overline{\varphi_J} \otimes e_\alpha$, definiamo per ogni $x \in U$:

$$(\psi(x), \eta(x))_x = \frac{2^{p+q-n}}{p!q!} \sum_{I,J,\alpha} \psi_{I,J,\alpha}(x) \overline{\eta_{I,J,\alpha}(x)}.$$

A questo punto, se $\psi, \eta \in H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(E))$, siamo in grado di definire:

$$\langle \psi, \eta \rangle = \int_M (\psi(x), \eta(x))_x \phi(x).$$

In modo del tutto analogo al caso di M, si può vedere che $\overline{\partial}_E$ ha un aggiunto $\overline{\partial}_E^* = (-1)^{p+q} *_E^{-1} \overline{\partial}_E *_E$, dove $*_E : H^0(M, \mathscr{A}^{p,q}(E)) \to H^0(M, \mathscr{A}^{n-p,n-q}(E^*))$ è la mappa tale che $(\psi, \eta) = \int_M \psi \wedge_E *_E \eta$. Se $e_1, \ldots, e_k$ è un frame unitario per E, $e_1^*, \ldots, e_k^*$ è il frame duale, e $\eta = \sum_{j=1}^k \eta_j \otimes e_j$, allora non è difficile verificare che:

$$*_E \eta = \sum_{j=1}^k *\eta_j \otimes e_j^*.$$

Otteniamo perciò un **laplaciano** $\Delta_{\overline{\partial}_E}$, e definite le **$(p,q)$-forme armoniche a valori in** E come $\mathscr{H}^{p,q}(E) = \mathrm{Ker}(\Delta_{\overline{\partial}_E})$, si ottiene un isomorfismo $\mathscr{H}^{p,q}(E) \cong H^{p,q}_{\overline{\partial}_E}(E)$. Infine si ha:

Teorema 3.5.1 (Dualità di Kodaira-Serre per fibrati)**.** $H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^*))$.

Osserviamo che, se $p = 0$ nella dualità, otteniamo un isomorfismo $H^q(M, \mathcal{O}(E)) \cong H^{n-q}(M, \Omega^n(E^*))$. Se $K_M = \det T'(M)^* = \Lambda^n T'(M)^*$ è il fibrato canonico, allora $\mathcal{O}(K_M) = \Omega^n(M)$ e $\mathcal{O}(E \otimes K_M) = \Omega^n(E)$, dunque:

Corollario 3.5.2. $H^q(M, \mathcal{O}(E)) \cong H^{n-q}(M, \mathcal{O}(E^* \otimes K_M))$.

Osserviamo che $K_{\mathbb{P}^n} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$. Infatti, detta ω la sezione meromorfa su $K_{\mathbb{P}^n}$ tale che $\omega = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_n}{x_n}$ su U_0 (e analoga su U_i a meno del segno), si ha che ω ha un polo semplice sui $\{z_i = 0\}$ per $i = 0, \ldots, n$, da cui $[\omega] = (-n-1)H$, dove H è un iperpiano di $\mathbb{P}^n$.

Definizione 3.5.5. Una **connessione** per E è un morfismo di fasci $D : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^1(E)$ tale che $D(f\sigma) = df \otimes \sigma + fD\sigma$ per ogni σ sezione di E e f liscia.

Decomponendo $\mathscr{A}^1(E) = \mathscr{A}^{1,0}(E) \oplus \mathscr{A}^{0,1}(E)$, possiamo decomporre $D = D' + D''$. Se E è olomorfo, si dice che D è **compatibile con la struttura complessa** se $D'' = \overline{\partial}_E$. Inoltre, se su E è data una metrica hermitiana $(,)_x$, D si dice **compatibile con la metrica** se $d(\sigma, \tau)_x = (D\sigma, \tau)_x + (\sigma, D\tau)_x$ per ogni $x \in M$ e ogni σ, τ sezioni di E intorno a x.

Come nel caso riemanniano, vale la seguente:

Proposizione 3.5.3. *Esiste un'unica connessione compatibile con la struttura complessa e con la metrica, detta* ***connessione metrica****.*

Viene naturale estendere la connessione D a $D : \mathscr{A}^p(E) \to \mathscr{A}^{p+1}(E)$, in modo che $D(\psi \otimes \sigma) = d\psi \otimes \sigma + (-1)^p \psi \wedge D\sigma$ per ogni p-forma ψ su M e ogni sezione σ di E, dove denotiamo (e lo faremo anche in seguito) con $\psi \wedge D\sigma$ il prodotto esterno fra ψ e la parte di forma di $D\sigma$. Come nel caso base, possiamo decomporre $D = D' + D''$ seguendo la decomposizione $D : \mathscr{A}^{p,q}(E) \to \mathscr{A}^{p+1,q}(E) \oplus \mathscr{A}^{p,q+1}(E)$. Si può verificare che, se D è la connessione metrica, allora $D'' = \overline{\partial}_E$.

Definizione 3.5.6. L'operatore $D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^2(E)$ è detto **operatore di curvatura**.

Proposizione 3.5.4. *L'operatore di curvatura $D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^2(E)$ è C^∞-lineare.*

Dimostrazione. $D^2(f\sigma) = D(df \otimes \sigma + fD\sigma) = d^2 f \otimes \sigma - df \otimes D\sigma + df \otimes D\sigma + fD^2\sigma = fD^2\sigma$. $\square$

Se $e_1, \dots, e_k$ è un frame per E, si può scrivere $D^2 e_i = \sum_{j=1}^k \theta_{ij} \otimes e_j$ per certe 2-forme θ_{ij}; la matrice $\Theta = (\theta_{ij})_{i,j}$ è detta **matrice di curvatura**. Se $e'_1, \dots, e'_k$ è un altro frame per E, e il cambio di base è espresso da $e'_i = \sum_{j=1}^k g_{ij} e_j$, si vede facilmente che la matrice di curvatura cambia per coniugio: $\Theta' = g \Theta g^{-1}$, con $g = (g_{ij})_{i,j}$.
Inoltre, in coordinate si ha che, se θ è la matrice associata a D rispetto al frame $e_1, \dots, e_k$:

$$D^2 e_i = D\left(\sum_{i=1}^k \theta_{ij} \otimes e_j\right) = \sum_{j=1}^k \left(d\theta_{ij} + \sum_{l=1}^k \theta_{ij} \wedge \theta_{jl}\right) \otimes e_j, \quad \text{cioè} \quad \Theta = d\theta + \theta \wedge \theta.$$

Proposizione 3.5.5.
- *Se D è la connessione metrica, allora Θ è di tipo $(1,1)$, cioè $D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^{1,1}(E)$, cioè $D'^2 = 0$;*
- *Se E è un line bundle, allora:*
  1. *Θ è una 2-forma globale;*
  2. *Θ è chiusa;*
  3. *$D^2 \eta = \eta \wedge \Theta$ per ogni $\eta \in \mathscr{A}^0(E)$;*
  4. *$\left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right] = c_1(E) \in H^2_{DR}(M)$.*

Cenno di dimostrazione. Il primo punto segue dalla relazione $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$ trovata sopra, in quanto D è antihermitiana (la relazione $D' = -\overline{D''}$ segue dal fatto che D è compatibile con la metrica) e perciò anche D^2 lo è, cioè $(D')^2 = -\overline{(D'')^2} = -\overline{\overline{\partial}_E^2} = 0$. Per gli altri punti, ci soffermiamo solo sui primi due (il punto 4 è particolarmente tecnico, e una sua dimostrazione si trova come al solito sul *Griffiths-Harris*); per il primo, basta osservare che g è una funzione a valori in $\mathbb{C}^*$, e dunque Θ, essendo invariante per cambio di frame, si rincolla a una 2-forma globale. Per il secondo, si ha facilmente che $d\Theta = d^2\theta + d\theta \wedge \theta + \theta \wedge d\theta = 0$. $\square$

La prossima proposizione, che non dimostriamo, fornisce una sorta di viceversa per l'ultimo punto della proposizione precedente:

Proposizione 3.5.6. *M di Kähler, $L \in \mathrm{Pic}(M)$. Per ogni $(1,1)$-forma $\omega \in c_1(L) \in H^2_{DR}(M)$ esiste una metrica su L con curvatura della connessione metrica $\Theta = \frac{2\pi}{i}\omega$.*

Definizione 3.5.7. Un line bundle $L \in \mathrm{Pic}(M)$ si dice **positivo** se esiste su L una metrica hermitiana la cui connessione metrica ha curvatura Θ, tale che $\frac{i}{2\pi}\Theta$ è una $(1,1)$-forma positiva.

Esiste una caratterizzazione dei line bundle positivi, che deriva immediatamente dai precedenti risultati:

Proposizione 3.5.7. *$L \in \mathrm{Pic}(M)$ è positivo se e solo se $c_1(L)$ si rappresenta con una $(1,1)$-forma reale, chiusa e positiva.*

É importante osservare che ogni $(1,1)$-forma ω intera e chiusa è la classe di Chern di un line bundle. Infatti, per vedere che $\omega \in \mathrm{Im}(c_1) \subseteq H^2(M,\mathbb{Z})$, basta vedere che ω viene mappato a $0 \in H^2(M, \mathcal{O}_M)$ dalla mappa successiva nella succesione esatta lunga. Ma visto che il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(M) \arrow[r, "c_1"] & H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^2(M,\mathcal{O}_M) \arrow[d, "\wr"] \\
& H^2(M,\mathbb{C}) \cong H^2_{DR}(M) \arrow[r, "\pi^{0,2}"] & H^{0,2}_{\overline{\partial}}(M)
\end{tikzcd}$$

commuta, e $\pi^{0,2}(\omega) = 0$, otteniamo che effettivamente $\omega \in \mathrm{Im}(c_1)$.

Per completare la generalizzazione della teoria su M a ogni fibrato olomorfo E, ci rimane da definire un analogo della mappa L e del suo aggiunto; supponendo sempre M di Kähler con $(1,1)$-forma ω, possiamo definire:

$$\begin{array}{rccc} L_E: & \mathscr{A}^{p,q}(E) & \longrightarrow & \mathscr{A}^{p+1,q+1}(E) \\ & \varphi \otimes \sigma & \longmapsto & (\eta \wedge \omega) \otimes \sigma \end{array}$$

Se su E abbiamo una metrica H, denotiamo con Λ_E l'aggiunto di L_E, e come al solito con D la connessione metrica. In modo analogo al caso di M, si mostrano le relazioni di commutazione:

$$[\Lambda_E, \overline{\partial}_E] = -\frac{i}{2}(D')^*, \qquad [\Lambda_E, L_E] = (n-p-q)\,\mathrm{id}\,.$$

Teorema 3.5.8 (Kodaira-vanishing)**.** *M di Kähler, $L \in \mathrm{Pic}(M)$ line bundle positivo. Allora $H^q(M, \Omega^p(L)) = 0$ se $p+q>n$.*

Dimostrazione. Sia ω una $(1,1)$-forma reale, chiusa e positiva che rappresenta $c_1(L)$. Su L fissiamo una metrica H con connessione metrica D e curvatura $\Theta = \frac{2\pi}{i}\omega$. Su M, invece, poniamo la metrica di Kähler H data dalla $(1,1)$-forma ω; rispetto a tali metriche, si ha che $H^q(M,\Omega^p(L)) \cong \mathscr{H}^{p,q}(L)$. Visto che $D^2\eta = \eta \wedge \Theta = \frac{2\pi}{i}L_L$ per ogni $\eta \in \mathscr{H}^{p,q}(L)$, e visto che $D^2 = D'\overline{\partial}_E + \overline{\partial}_E D'$, si ha che $D^2\eta = \overline{\partial}_E D'\eta$, in quanto η è armonica. Adesso:

$$2i(\Lambda_E D^2\eta, \eta) = 2i(\Lambda_E\overline{\partial}_E D'\eta, \eta) = 2i\left(\left(\overline{\partial}_E\Lambda_E - \frac{i}{2}(D')^*\right) D'\eta, \eta\right) = ((D')^*D'\eta,\eta) = (D'\eta, D'\eta) \geq 0,$$

in quanto $\overline{\partial}_E^*\eta = 0$, e per lo stesso motivo:

$$2i(D^2\Lambda_E\eta,\eta) = 2i(\frac{i}{2}(D')^*\eta,\eta) + (\overline{\partial}_E D'\Lambda_E\eta,\eta) = -((D')^*\eta,(D')^*\eta) \leq 0,$$

da cui $2i([\Lambda_E, D^2]\eta,\eta) \geq 0$. Ma $D^2 = \frac{2\pi}{i}L_L$, perciò:

$$0 \leq 4\pi([\Lambda_L, L_L]\eta,\eta) = 4\pi(n-p-q)\|\eta\|^2,$$

e cioè $\eta = 0$ perchè $n-p-q<0$. $\square$

Teorema 3.5.9 (Teorema B)**.** *$L \in \mathrm{Pic}(M)$ positivo. Per ogni $E \in \mathrm{Pic}(M)$, esiste $\mu_0 > 0$ tale che, per ogni $\mu \geq \mu_0$, $H^q(M, \mathcal{O}(E \otimes L^\mu)) = 0$.*

Cenno di dimostrazione. Scegliendo μ_0 in modo che $L^{\mu_0} \otimes E \otimes K_M^*$ sia positivo (tale μ_0 esiste perchè $c_1(L^{\mu_0} \otimes E \otimes K_M^*) = \mu_0 c_1(L) + c_1(E) - c_1(K_M)$), si ha che $H^q(M, \mathcal{O}(E\otimes L^\mu)) = H^q(M, \Omega^n(L^{\mu_0} \otimes E \otimes K_M^*)) = 0$ per il vanishing. $\square$

Corollario 3.5.10. *$M \subseteq \mathbb{P}^n$ sottovarietà complessa. Allora* $\mathrm{Pic}(M) = \mathrm{Im}([\cdot])$.

Dimostrazione. Sia H la restrizione di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ su M. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ è positivo, perchè prendendo su di esso la metrica duale, si ottiene la metrica di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, che è positiva perchè data da $\mathbb{C}^n$; inoltre la $(1,1)$-forma indotta su $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ è proprio Fubini-Study. Dunque anche H è positivo. Sia μ abbastanza grande; vediamo che se $L+\mu H$ ammette una sezione olomorfa s non nulla, avremmo la tesi. Infatti, se t è una sezione olomorfa di H non nulla, allora $\frac{s}{t^\mu}$ è una sezione meromorfa globale di L non nulla, come voluto.
Per vedere l'esistenza di s, procediamo per induzione su $\dim(M)$, essendo il caso base ovvio.

Per il passo induttivo, il teorema di Bertini assicura che esiste un iperpiano $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ tale che $V = M \cap \mathbb{P}^{n-1}$ è liscia; visto che $[V] = H$, abbiamo la successione esatta di fasci su M:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M(L + (\mu - 1)H) \longrightarrow \mathcal{O}_M(L + \mu H) \xrightarrow{r_V} \mathcal{O}_V((L + \mu H)_{|V}) \longrightarrow 0,$$

che in coomologia dà la successione esatta:

$$H^0(M, \mathcal{O}(L + \mu H)) \longrightarrow H^0(V, \mathcal{O}((L + \mu H)_{|V})) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}(L + (\mu - 1)H)).$$

Ma l'ultimo termine è nullo per μ abbastanza grande per il teorema B, e quello centrale è non nullo per ipotesi induttuva, da cui anche $H^0(M, \mathcal{O}(L + \mu H)) \neq 0$. □

Concludiamo con il teorema di embedding di Kodaira, che dà un invariante completo affinchè una varietà complessa compatta sia immergibile iniettivamente in uno spazio proiettivo:

Teorema 3.5.11 (Kodaira-embedding)**.** *Sia $L \in \mathrm{Pic}(M)$ positivo. Se μ è abbastanza grande, μL immerge iniettivamente M in $\mathbb{P}^N$.*

Dimostrazione. Presi x, y in M, consideriamo lo scoppiamento $\pi : \widetilde{M} \to M$ in x, y, e denotiamo $E = E_x + E_y$ il divisore eccezionale (il caso $x = y$ viene trattato scoppiando solo in x e ponendo $E = 2E_x$); vogliamo mostrare che $H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\pi^*(\mu L) - [E])) = 0$. Si può far vedere che esiste un μ_1 tale che $\pi^*(\mu L) - n[E]$ è positivo per ogni $\mu \geq \mu_1$; inoltre, in modo analogo a come fatto nella dimostrazione del teorema B, esiste un μ_2 tale che $\mu L - K_M$ è positivo per ogni $\mu \geq \mu_2$. Detto $\mu_0 = \mu_1 + \mu_2$, si ha che per ogni $\mu \geq \mu_0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\pi^*(\mu L) - [E]) &= \Omega^n_{\widetilde{M}}(\pi^*(\mu L) - [E] - K_{\widetilde{M}}) = \\
&= \Omega^n_{\widetilde{M}}(\pi^*(\mu L) - [E] - (\pi^*(K_M) + (n-1)[E])) = \\
&= \Omega^n_{\widetilde{M}}((\pi^*(\mu_2 L) - \pi^*(K_M)) \otimes (\pi^*((\mu - \mu_2)L) - n[E]))
\end{aligned}$$

e si conclude per il vanishing osservando che il fibrato dentro all'ultimo $\Omega^n_{\widetilde{M}}$ è positivo. □

Teorema 3.5.12. *Una varietà complessa e compatta M è algebrica (cioè è immergibile iniettivamente in $\mathbb{P}^N$) se e solo se M ammette una $(1,1)$-forma ω razionale, chiusa e positiva.*

Dimostrazione. Ovviamente ogni varietà algebrica ammette una tale $(1,1)$-forma grazie al pull-back della metrica di Fubini-Study. Per il viceversa, $\omega \in H^2(M, \mathbb{Q})$ può essere considerata intera (cioè in $H^2(M, \mathbb{Z})$) a meno di un opportuno multiplo, dunque, essendo ω intera, chiusa e positiva, esiste un line bundle L su M positivo tale che $c_1(L) = [\omega]$. Ma allora un multiplo positivo di L immerge M in $\mathbb{P}^N$. □