

Note del corso di Analisi 3

Giacomo Mezzedimi

2 febbraio 2016

Indice

Introduzione	2
1 Convergenza di serie di Fourier	3
2 L'equazione della corda vibrante	13
3 L'equazione del calore	17
4 Spazi di Hilbert	24
5 L'equazione di Poisson e l'equazione di Laplace	32
6 La trasformata di Fourier	49
7 Appendice	63
7.1 Forme differenziali e decomposizione di Helmholtz-Weyl	63
7.2 Trasporto di punti materiali	67
7.3 I polinomi di Hermite	69
7.4 Funzioni di Bessel	70

Introduzione

Queste note sono state scritte durante il primo semestre dell'anno accademico 2015-2016 e seguono abbastanza fedelmente i contenuti del corso Analisi 3 del professor Berselli. **NON** sono né vogliono essere una trascrizione delle lezioni, in quanto in primo luogo mancano alcune dimostrazioni (noiose o tecniche) e alcuni esempi (in particolare l'esempio di Du Bois-Raymond); in secondo luogo, ho modificato l'ordine della trattazione per seguire un filo logico (a me) più conveniente.

Nonostante il testo sia stato rivisto, é altamente probabile la presenza di errori più o meno gravi, che vi invito a segnalarmi al mio indirizzo mail *mezzedimi@mail.dm.unipi.it*.

Questi appunti si trovano sulla mia pagina web *http://poisson.phc.unipi.it/~mezzedimi/*.

Giacomo Mezzedimi

1 Convergenza di serie di Fourier

D'ora in poi indicheremo con $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ il toro; le funzioni considerate saranno (se non specificato diversamente) definite su \mathbb{T} , cioè periodiche di periodo 2π .

Supponiamo che una certa funzione f ammetta la scrittura in serie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

per certi coefficienti a_k e b_k . Osservato che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \delta_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx$$

se $m+n > 0$, mentre valgono rispettivamente 2π e 0 se $m=n=0$ e:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$, segue che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx = \pi a_n \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx = \pi b_n.$$

Definizione 1.1. Data una funzione $f(x)$, definiamo **serie di Fourier** di f la serie formale:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx},$$

dove:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

cioè gli a_k, b_k, c_k sono legati dalle relazioni $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ e $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k > 0$.

Ci occuperemo ora di trovare condizioni affinché la serie di Fourier converga e converga esattamente ad f .

Data f , denoteremo con $\hat{f}_k = \hat{f}(k)$ i coefficienti c_k .

Proposizione 1.1 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Sia $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. Allora $\hat{f}_n \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione. Denotata $S_N(f, x)$ la serie di Fourier di f troncata ai termini $-N$ e N , si ha:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f, x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right) \overline{\left(f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right)} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N c_n \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \overline{c_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \int_{-\pi}^{\pi} c_n \overline{c_m} e^{inx} e^{-imx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2, \end{aligned}$$

da cui si ricava mandando $N \rightarrow +\infty$ la **disuguaglianza di Bessel**, cioè:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Segue immediatamente che, essendo il membro a sinistra finito, $c_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e dunque $c_n \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow \infty$. \square

Corollario 1.2. *Se $f \in C^k(\mathbb{T})$, allora $|n|^k \widehat{f}_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$; in particolare $\widehat{f}_n = o(|n|^{-k})$ quando $|n| \rightarrow \infty$.*

Dimostrazione. Integrando per parti:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} = \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{-inx}}{in} = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} = \frac{1}{in} \widehat{f}'_n,$$

da cui ricorsivamente $\widehat{f}_n = \frac{1}{(in)^k} \widehat{f}_n^{(k)}$, cioè la tesi. \square

Corollario 1.3. *Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora la serie di Fourier converge assolutamente.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n| = |\widehat{f}_0| + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (n |\widehat{f}_n|) \leq |\widehat{f}_0| + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} n^2 |\widehat{f}_n|^2$$

per la disuguaglianza $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ma $|\widehat{f}_n|^2 = o(|n|^{-2})$, dunque la serie converge e segue che $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n| < +\infty$, cioè la serie di Fourier converge assolutamente. \square

Definizione 1.2. Definiamo **nucleo di Dirichlet**:

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikz}.$$

Proposizione 1.4. *Si ha l'uguaglianza:*

$$D_n(z) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Dimostrazione. Direttamente:

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikz} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikz} = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})ix} - e^{-(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

\square

Osservazione. $D_n(z)$ é pari; inoltre $\forall n$ si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 2\pi.$$

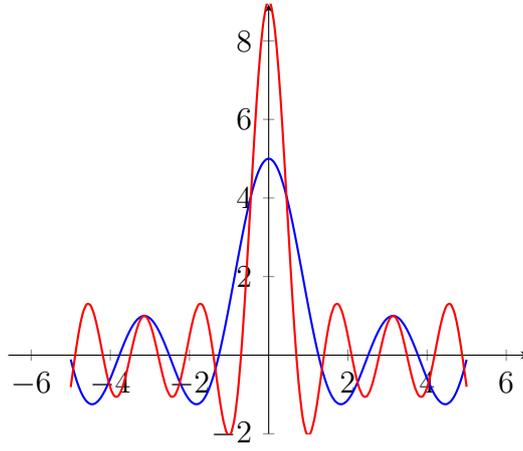


Figura 1: Nuclei di Dirichlet: in blu $D_2(z)$ e in rosso $D_4(z)$

Teorema 1.5. $f \in C^1(\mathbb{T})$. Allora $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty \forall x \in \mathbb{T}$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) &= \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz. \end{aligned}$$

Ma visto che $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz = 2\pi$, allora $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(z) dz$; segue quindi che:

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) D_n(z) dz.$$

Con semplici manipolazioni:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+z) - f(x)}{z}}_{\in C^0(\mathbb{T})} \underbrace{\frac{z}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\in C^0(\mathbb{T})} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) dz, \end{aligned}$$

in quanto la derivata di una funzione C^1 é continua, ma l'ultimo membro va a 0 quando $n \rightarrow \infty$ per il lemma di Riemann-Lebesgue (infatti basta scrivere $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) = \sin(nz) \cos(z/2) + \cos(nz) \sin(z/2)$ e scomporre l'integrale in due parti, di cui ciascuna infinitesima).

Segue dunque che $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$. \square

Interessiamoci ora a quanto si possano indebolire le ipotesi di questo teorema mantenendolo vero; facciamo prima un'osservazione.

Osservazione. Sia $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \in C^0$. Definiamo la funzione:

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \pi] \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

e sia F_P il prolungamento 2π -periodico di f_P . Per il lemma di Riemann-Lebesgue:

$$0 \leftarrow \int_{-\pi}^{\pi} F_P \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Analogamente posso ragionare con il prolungamento per disparitá di f e ottenere lo stesso risultato per $\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Teorema 1.6. $f \in C^1(\mathbb{T})$ a tratti, cioè $f \in C^0(\mathbb{T})$ e la derivata esiste dovunque tranne che in un numero finito di punti, nei quali $\exists f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate destre e sinistre. Allora $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Per la parità del nucleo di Dirichlet

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz,$$

quindi nei punti di discontinuità della derivata (negli altri la convergenza è già stata dimostrata) vale:

$$\begin{aligned} S_n(f, x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+z) - f(x_0) + f(x_0-z) - f(x_0))D_n(z)dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (f(x_0+z) - f(x_0))D_n(z)dz + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (f(x_0-z) - f(x_0))D_n(z)dz. \end{aligned}$$

Considerando separatamente i due integrali, si procede come nella dimostrazione del teorema analogo già visto, usando che derivata destra e sinistra esistono e sono finite; con il trucco già usato per spezzare il seno di $(n+1/2)z$ e con l'osservazione precedente si giunge alla tesi. \square

Teorema 1.7. $f \in C^1(\mathbb{T})$ a tratti con x_1, \dots, x_n punti di salto. Se:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{x_i\}_i \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \in \{x_i\}_i \end{cases}$$

dove $f(x^{\pm}) = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} f(x+h)$, allora $S_n(f, x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Dobbiamo controllare la convergenza solo nei punti x_i , in quanto negli altri punti la convergenza segue da teoremi precedenti. Si ha:

$$S_n(f, x_i) - \tilde{f}(x_i) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (f(x_i+z) - f(x_i^+))D_n(z)dz + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (f(x_i-z) - f(x_i^-))D_n(z)dz$$

e si conclude come fatto precedentemente sfruttando che f è C^1 su $[x_i^+, x_i + \delta]$. \square

Diamo per buono il seguente teorema di densità:

Teorema 1.8. $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. $\forall \varepsilon > 0, \exists f_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(a, b)$ tale che:

$$\|f - f_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^1} = \int_a^b |f - f_{\varepsilon}| dx < \varepsilon.$$

Proposizione 1.9 (Lemma di Riemann-Lebesgue). $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$. Allora $\int_a^b f(x) \sin(nx) dx \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow \infty$ (per il coseno è analogo).

Dimostrazione. Sia f_{ε} data dal teorema precedente. Allora:

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - f_{\varepsilon}(x)) \sin(nx) dx \right| + \left| \int_a^b f_{\varepsilon}(x) \sin(nx) dx \right| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon$$

da cui segue la tesi. \square

Teorema 1.10 (Dini). $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\exists \delta$ per cui:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|} dz < +\infty.$$

Allora $S_n(f, x) \rightarrow f(x)$ (o eventualmente a $\tilde{f}(x)$ definita come sopra).

Dimostrazione. Dall'ipotesi segue che $g(z) = \frac{f(x+z)-f(x)}{z} \frac{z}{2\pi \sin(\frac{z}{2})} \in \mathcal{L}^1$, dunque si conclude per il lemma di Riemann-Lebesgue (dopo aver spezzato $\sin((n+1/2)z)$ come al solito). \square

Osservazione. Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$. Proviamo a stimare $S_n(f, x) - f(x)$:

$$S_n(f, x) - f(x) = \int_{|z| < \delta} (f(x+z) - f(x)) D_n(z) dz + \int_{\delta \leq |z| < \pi} (f(x+z) - f(x)) D_n(z) dz = I_1 + I_2;$$

studiamo separatamente i due integrali.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |z| < \pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{\sin(z/2)} \sin((n+1/2)z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

per il lemma di Riemann-Lebesgue, in quanto la funzione di cui stiamo calcolando i coefficienti di Fourier é C^1 .

$$|I_1| \leq \int_{|z| < \delta} \underbrace{|f(x+z) - f(x)|}_{< \varepsilon} \cdot |D_n(z)| dz \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |D_n(z)| dz$$

per continuitá di f in un compatto (e dunque per uniforme continuitá di f).

Dunque, se vediamo che l'integrale di $|D_n(z)|$ in un intorno di 0 rimane limitato per $n \rightarrow \infty$, allora avremmo che la serie di Fourier di f converge a f per ogni funzione f continua. Purtroppo però questo non é vero.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)| dz &= 2 \int_0^{\pi} |D_n(z)| dz = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)z)|}{\sin(z/2)} dz \geq 4 \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)z)|}{z} dz = \\ &= 2\pi \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq 2\pi \int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq \\ &\geq 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi} dt = \frac{4\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = O(\ln(n)). \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\sin(z/2) > z/\pi \forall z \in (0, \pi)$.

Infatti Du Bois-Raymond costruí una funzione $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $S_n(f, x)$ non converge a f per qualche x .

Lemma 1.11. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora:

1. $|\hat{f}_k - \hat{g}_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx;$
2. $|S_n(f, x) - S_n(g, x)| \leq \frac{2n+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx.$

Dimostrazione. 1. Direttamente:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx.$$

2. Grazie al primo punto:

$$\left| \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikx} - \sum_{k=-n}^n \widehat{g}_k e^{ikx} \right| \leq \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| \leq (2n+1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx.$$

□

Osservazione. Analogamente, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \widehat{f}_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Osservazione. Se $\{c_n\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, allora la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a un certo $g(x) \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $c_n = \widehat{g}_n \forall n$.

Infatti la serie converge assolutamente, e detto g il suo limite, si ha:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq N} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-imx} dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx = \widehat{g}_m.$$

A questo punto, l'idea per costruire un'approssimante $\forall f \in C^0(\mathbb{T})$ é passare per la convergenza secondo Cesaro.

Proposizione 1.12. $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ successione. Se $a_n \rightarrow L$ allora $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \rightarrow L$ (e a_n si dice sommabile secondo Cesaro).

Dimostrazione. $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per $n > N$. Dunque:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k - L = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - L) \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - L) \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N}^{n-1} (a_k - L) \right| \leq \frac{M}{n} + \frac{n\varepsilon}{n}$$

con M fissato, cioè la tesi. □

Definizione 1.3. Definiamo $\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f, x)$.

Osservazione. Con calcoli simili a quelli già fatti per $S_n(f, x)$, si ottiene:

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(z) \right) dz.$$

Definizione 1.4. Definiamo **nucleo di Fejer**:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(z).$$

Proposizione 1.13. Il nucleo di Fejer ha un'espressione esplicita:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2.$$

Osservazioni. • $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = 1$.

- $\phi_n(z) = \phi_n(-z)$, cioè é pari.
- $\phi_n(z) \geq 0$.

- $\forall \varepsilon, \delta > 0, \exists N$ tale che $\phi_n(z) < \varepsilon \forall z \notin [-\delta, \delta] \forall n > N$.

Infatti:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{(z/\pi)^2} \leq \frac{\pi}{2\delta^2} \frac{1}{n}$$

quando $z \in [\delta, \pi]$.

- $\phi_n(0) = O(n)$.

Teorema 1.14. $f \in C^0(\mathbb{T})$. Allora $\sigma_n(f, x) \rightarrow f(x)$ uniformemente quando $n \rightarrow \infty$, cioè:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(f, x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. Spezziamo l'integrale:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\left| \int_{|z| < \delta} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right|}_{=I_1} + \underbrace{\left| \int_{\delta \leq |z| < \pi} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right|}_{=I_2}. \end{aligned}$$

f é continua in $|z| < \delta$ che é un compatto, dunque é uniformemente continua ed $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x+z) - f(x) < \varepsilon$ per $z \in [-\delta, \delta]$. Dunque:

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |\phi_n(z)| dz \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = \varepsilon,$$

mentre:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\delta \leq |z| < \pi} |f(x+z) - f(x)| \phi_n(z) dz \leq \int_{\delta \leq |z| < \pi} (|f(x+z)| + |f(x)|) \phi_n(z) dz \leq \\ &\leq 2 \int_{\delta \leq |z| < \pi} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \phi_n(z) dz = 4 \int_{\delta}^{\pi} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \phi_n(z) dz \leq 4 \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \frac{\pi^2}{2\delta^2} \frac{1}{n} < \varepsilon' \end{aligned}$$

per un certo ε' quando $n \rightarrow \infty$.

Visto che la maggiorazione é indipendente da x , si ha anche che la convergenza é uniforme. \square

Definizione 1.5. Una successione di funzioni $\{Q_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}\}$ si dice **successione di Dirac** se soddisfa le proprietá:

- $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) dx = 1$;
- $Q_n(-x) = Q_n(x)$;
- $Q_n \geq 0$;
- $\int_{\delta \leq |x|} Q_n(x) dx \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty \forall \delta > 0$.

Osservazione. In maniera del tutto analoga alla dimostrazione del teorema precedente, se $Q_n(x)$ é una successione di Dirac, allora:

$$f * Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) Q_n(z) dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Osservazione. $(\widehat{f * g})_n = \widehat{f}_n \cdot \widehat{g}_n$, infatti:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}_n &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y)}{2\pi} e^{-in(x-y)} \cdot \frac{g(y)}{2\pi} e^{-iny} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny} dy = \widehat{f}_n \cdot \widehat{g}_n. \end{aligned}$$

Osservazione. $f * g = g * f$ facendo un cambio di variabili.

Osservazione. $\|f * g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}$.

Proposizione 1.15. $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora:

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Dimostrazione. Per $p = 1$ lo abbiamo già visto; inoltre per $p = \infty$ é del tutto evidente.

La funzione $y \mapsto \underbrace{|f(x-y)|}_{\in \mathcal{L}^1} \underbrace{|g(y)|^p}_{\in \mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1$, quindi $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in \mathcal{L}^p$. Se p' é tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

abbiamo:

$$|f(x-y)g(y)| = \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{\in \mathcal{L}^{p'}} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|}_{\in \mathcal{L}^p},$$

cioé, per la disuguaglianza di Holder:

$$|f * g(x)| \leq \int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{\frac{1}{p'}} \left(\int |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int |f * g(x)|^p dx &\leq \int \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{\frac{p}{p'}} \left(\int |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right) dx = \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \iint |f(x-y)| |g(y)|^p dx dy = \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{L}^1} \int |g(y)|^p dy, \end{aligned}$$

da cui la tesi estraendo la radice p -esima. □

Osservazione. La formula per \widehat{fg}_n é molto piú complicata, infatti:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k \widehat{f}_k e^{ikx} \sum_l \widehat{g}_l e^{ilx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,l} \widehat{f}_k \widehat{g}_l e^{i(k+l)x} e^{-inx} dx,$$

dunque $\widehat{fg}_n = \widehat{c}_n$, dove $c = \sum_{k,l} \widehat{f}_k \widehat{g}_l e^{i(k+l)x}$.

Ma c é già scritta con la sua serie di Fourier, dunque il suo coefficiente di Fourier n -esimo non é altro che:

$$\widehat{c}_n = \sum_{k+l=n} \widehat{f}_k \widehat{g}_l.$$

Si ottiene:

$$\widehat{fg}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k \widehat{g}_{n-k} =: \widehat{f}_k * \widehat{g}_k(n).$$

Enunciamo la seguente proposizione, che useremo spesso in seguito, ma di cui tralasciamo la dimostrazione:

Proposizione 1.16. $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e:

$$D^\alpha(f * g)(x) = (D^\alpha f * g)(x).$$

Proposizione 1.17. *Si ha:*

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}_k e^{ikx}.$$

Proposizione 1.18. *Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}_k = 0 \forall k$. Allora $f \equiv 0$.*

Dimostrazione. Per quanto visto, la successione:

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \underbrace{\widehat{f}_k}_{=0} e^{ikx} \Rightarrow f,$$

dunque $0 \Rightarrow f$, cioè $f \equiv 0$. □

Teorema 1.19. *$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f, x) - f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lusin, $\exists g_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{T})$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$. Scrivendo $\sigma_n(f, x) - f(x) = \sigma_n(f - g_\varepsilon, x) + \sigma_n(g_\varepsilon, x) - g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) - f(x)$, si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f, x) - f(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f - g_\varepsilon, x)| dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(g_\varepsilon, x) - g_\varepsilon(x)| dx}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(x) - f(x)| dx}_{< \varepsilon}.$$

Inoltre, visto che $\sigma_n(f - g_\varepsilon, x) = ((f - g_\varepsilon) * \phi_n)(x)$ e $\|\varphi * \psi\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1} \|\psi\|_{\mathcal{L}^1}$, si conclude che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f - g_\varepsilon, x)| dx = \|(f - g_\varepsilon) * \phi_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f - g_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} \|\phi_n\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon.$$

□

Corollario 1.20. *$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}_k = 0 \forall k$. Allora $f \equiv 0$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \varepsilon \forall \varepsilon > 0$, cioè $f \equiv 0$ quasi ovunque. □

Osservazione. Prendiamo $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e consideriamo le somme parziali $S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$. La successione $\{S_n(x)\} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ é di Cauchy, in quanto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x) - S_M(x)|^2 dx \leq \sum_{M \leq |k| \leq N} |c_k|^2 < \varepsilon,$$

poiché $\sum_{M \leq |k| \leq N} |c_k|^2$ é la coda di una serie convergente.

Ma $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ é completo, dunque $\exists f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ tale che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0.$$

Proposizione 1.21 (Identità di Parseval). *Sia $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ con $\{\widehat{f}_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (in modo che l'uguaglianza precedente sia giustificata). Allora vale l'uguaglianza:*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

Dimostrazione. Con facili calcoli:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}_k} e^{-ikx} dx = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n \overline{\widehat{f}_n} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

□

Proposizione 1.22. *C curva chiusa, semplice e C^1 . Allora l'area della zona interna a C é massima quando C é la circonferenza.*

Dimostrazione. Sia $C : \alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, 2\pi)$, α PLA. Scrivendo x e y in serie di Fourier:

$$x(s) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ns) + B_n \sin(ns), \quad y(s) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(ns) + D_n \sin(ns)$$

e:

$$x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} -nA_n \sin(ns) + nB_n \cos(ns), \quad y'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} -nC_n \sin(ns) + nD_n \cos(ns)$$

Per Gauss Green, l'area delimitata \mathcal{A} puó essere calcolata come:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{2\pi} x(s)y'(s) = \int_0^{2\pi} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ns) + B_n \sin(ns) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} -nC_n \sin(ns) + nD_n \cos(ns) \right) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n D_n - B_n C_n). \end{aligned}$$

Ma la curva é PLA, quindi per Parseval:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s))^2 + (y'(s))^2 ds = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2).$$

A questo punto:

$$\begin{aligned} \pi - \mathcal{A} &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n D_n - B_n C_n) = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n[(A_n - D_n)^2 + (B_n - C_n)^2]. \end{aligned}$$

Per massimizzare l'area si deve minimizzare il termine di destra, quindi $A_n = D_n$, $B_n = C_n \forall n$ e $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ per $n > 1$; si ottiene:

$$\alpha(s) = (A_0 + A_1 \cos(s) + B_1 \sin(s), C_0 + B_1 \cos(s) + A_1 \sin(s)).$$

Ma α é PLA, quindi si ricava $A_1^2 + B_1^2 = 1$, cioè $A_1 = \cos(\theta)$ e $B_1 = \sin(\theta)$; per le formule di addizione del seno e coseno si arriva a:

$$\alpha(s) = (A_0 + \cos(s - \theta), C_0 + \sin(s - \theta)),$$

cioé la tesi.

□

2 L'equazione della corda vibrante

In questa sezione ci occuperemo di risolvere l'equazione della corda vibrante, definita da:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Vogliamo capire per quali condizioni iniziali $u(0, x) = f(x)$ esiste la soluzione e se é unica.

Osservazione. Le funzioni $u_n(t, x) = \sin(nx) \cos(cnt)$ risolvono l'equazione; dunque ogni serie della forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \cos(ckt)$$

per certi $b_k \in \mathbb{R}$ la soddisfano. All'istante $t = 0$ la funzione precedente diventa:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Ma quali funzioni $f(x)$ si possono scrivere in questa forma?

Proviamo a risolvere l'equazione separando le variabili; scriviamo dunque $u(t, x) = T(t)X(x)$. Sostituendo si ha:

$$u_{tt} = T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ma la due funzioni uguagliate sono in variabili diverse, dunque:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ci siamo dunque ricondotti a studiare il sistema:

$$\begin{cases} X''(x) + \frac{\lambda}{c^2} X(x) = 0 \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

in quanto vogliamo che la corda sia fissata alle estremitá. Supponiamo d'ora in poi $c = 1$. Vediamo che $\lambda > 0$. Infatti:

$$X''(x)X(x) + \lambda(X(x))^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} X''(x)X(x)dx + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} X(x)^2 dx = 0,$$

ma integrando per parti:

$$\underbrace{[X'(x)X(x)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} (X'(x))^2 dx + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} X(x)^2 dx = 0$$

in quanto $X(-\pi) = X(\pi) = 0$, quindi $\lambda > 0$ perché quoziente di due numeri positivi.

Alla fine l'equazione caratteristica é $\mu^2 + \lambda = 0$, le cui radici sono $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, che portano a una soluzione:

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

a cui imponendo le condizioni iniziali diventa:

$$X(x) = c_1 \sin(kx),$$

dove $k^2 = \lambda$ in quanto $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, e dunque $c_2 = 0$. Dunque l'equazione é risolubile solo nel caso in cui λ sia un quadrato.

Mettiamoci ora nel caso generale in cui non si possono separare le variabili; se supponiamo che la soluzione sia esprimibile con la sua serie di Fourier:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

allora ci riconduciamo a risolvere:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(-\pi, x) = u(\pi, x) \\ u_t(-\pi, x) = u_t(\pi, x) \\ u(0, x) = u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \\ u_t(0, x) = u_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{inx} \end{cases}$$

Sostituendo le serie:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n''(t) e^{inx} + c^2 n^2 c_n(t) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_n''(t) + c^2 n^2 c_n(t)) e^{inx} = 0$$

da cui ogni coefficiente é 0 perché e^{inx} é base, cioè abbiamo dei sistemi ordinari:

$$\begin{cases} c_n''(t) + c^2 n^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = c_n \\ c_n'(0) = d_n \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema é:

$$c_n(t) = \frac{1}{2} \left(c_n + \frac{d_n}{icn} \right) e^{icnt} + \frac{1}{2} \left(c_n - \frac{d_n}{icn} \right) e^{-icnt}$$

per $n \neq 0$, mentre per $n = 0$ la soluzione é banalmente $c_0(t) = c_0 + d_0 t$. Quindi ci rimane da studiare la convergenza della somma:

$$u^N(t, x) = c_0 + d_0 t + \sum_{0 \neq |n| \leq N} \left(\frac{1}{2} \left(c_n + \frac{d_n}{icn} \right) e^{icnt} + \frac{1}{2} \left(c_n - \frac{d_n}{icn} \right) e^{-icnt} \right) e^{inx}.$$

Se avessimo che:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |c_n| < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |d_n| < +\infty,$$

allora avremmo che la serie convergerebbe assolutamente a una funzione in $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ che sarebbe la soluzione voluta. Se $u_0 \in C^3(\mathbb{T})$ e $u_1 \in C^2(\mathbb{T})$, abbiamo queste convergenze, che ci permettono di scrivere la soluzione dell'equazione della corda:

$$u^N(t, x) = c_0 + d_0 t + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{2} \left(c_n + \frac{d_n}{icn} \right) e^{icnt} + \frac{1}{2} \left(c_n - \frac{d_n}{icn} \right) e^{-icnt} \right) e^{inx}.$$

Proposizione 2.1. *Nelle ipotesi appena poste, la soluzione dell'equazione della corda é unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che ce ne siano due, u e v ; si $U = u - v$. U é una funzione periodica sul toro che soddisfa:

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} \\ U(0, x) = 0 \\ U_t(0, x) = 0 \\ U_x(0, x) = 0 \end{cases}$$

Allora $(U_{tt} - c^2 U_{xx})U_t = 0$, da cui integrando per parti:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (U_{tt} - c^2 U_{xx})U_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} |U_t|^2 dx + c^2 \int_{-\pi}^{\pi} U_x U_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} |U_t|^2 dx + \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} |U_x|^2 dx$$

quindi ho che la somma di due numeri positivi é 0, cioè:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |U_t|^2 dx + c^2 \int_{-\pi}^{\pi} |U_x|^2 dx \right) = 0,$$

quindi la somma fra parentesi é costante:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U_t(t, x)|^2 dx + c^2 \int_{-\pi}^{\pi} |U_x(t, x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |U_t(0, x)|^2 dx + c^2 \int_{-\pi}^{\pi} |U_x(0, x)|^2 dx = 0$$

perció $U_t \equiv 0$ e $U_x \equiv 0$, cioè $U = \text{costante}$, ma essendo 0 all'inizio é 0 sempre. \square

Consideriamo ora il caso bidimensionale, cioè consideriamo una membrana $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ fissata al bordo $\partial\Omega$ libera di vibrare.

Supponiamo che $\Omega = B(0, 1)$ e cerchiamo una funzione $u(t, x, y) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che in ogni momento t indichi l'altezza del punto (x, y) . Passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Dunque ho che $u = u(t, \rho, \theta) : \mathbb{R} \times [0, 1] \times \mathbb{T}$, con $u(t, 1, \theta) = 0 \forall t, \theta$.

L'equazione da risolvere (analogamente al caso 1-dimensionale) é:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,$$

dunque calcoliamo:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} = u_{xx} \cos^2(\theta) + 2u_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) + u_{yy} \sin^2(\theta) \\ u_{\theta\theta} = u_{xx} \rho^2 \sin^2(\theta) - 2u_{xy} \rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + u_{yy} \rho^2 \cos^2(\theta) - u_{x\rho} \cos(\theta) - u_{y\rho} \sin(\theta) \end{cases}$$

dunque:

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}.$$

Separiamo le variabili e supponiamo che $u(t, \rho, \theta) = T(t)R(\rho)\Theta(\theta)$. Con passaggi simili al caso 1-dimensionale si ottiene:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda,$$

con $\lambda > 0$. Ma:

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\lambda \Rightarrow \rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda \rho^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = n^2,$$

dunque $\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \lambda \rho^2 - n^2 = 0$, cioè $R''(\rho) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0$, con $\rho \in (0, 1)$. Questa é un'equazione di Bessel; una generica equazione di Bessel ha la forma:

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0,$$

con $p \geq 0$. Ci occupiamo solo del caso $p = 0$.

Con un cambio di variabili ci riconduciamo a un'equazione del tipo:

$$x^2 y''(x) + p x y'(x) + q y(x) = 0,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ (detta equazione equi-indiciale di Eulero). Ponendo $z = \ln(x)$, si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$ e $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dz} \frac{1}{x^2}$ e quindi:

$$y''(z) + (p - 1) y'(z) + q y(z) = 0.$$

L'equazione caratteristica é $\lambda^2 + (p - 1)\lambda + q = 0$; supponendo che $(p - 1)^2 - 4q^2 > 0$, ho due soluzioni distinte e reali λ_1, λ_2 , che mi danno una soluzione generale del tipo:

$$y(z) = c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z},$$

che riportata in funzione di x :

$$y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}.$$

Se invece il discriminante é 0, la soluzione generale é:

$$y(x) = c_1 x^\lambda + c_2 (\ln(x)) x^\lambda.$$

Nel caso generale, l'equazione é:

$$\begin{cases} y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

con $P(x), Q(x) \in C^0$. Per Cauchy-Lipschitz la soluzione esiste ed é unica, e la soluzione generale sará del tipo $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ con $y_1(x), y_2(x)$ soluzioni particolari linearmente indipendenti.

3 L'equazione del calore

Vogliamo trovare le funzioni $u(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che risolvono:

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx} \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

($\nu > 0$). Tale equazione descrive lo spostamento di calore dentro un segmento in cui la temperatura al tempo $t = 0$ é descritta dalla funzione $u_0(x)$.

Supponiamo innanzitutto che la soluzione $u(t, x)$ sia esprimibile come serie di Fourier:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}.$$

Denotiamo con $u^m(t, x)$ la somma troncata dal termine $-m$ -esimo al termine m -esimo di $u(t, x)$; anche queste funzioni risolvono il sistema e dunque sostituendo nell'equazione:

$$u_t^m(t, x) = \sum_{|n| \leq m} c_n'(t) e^{inx} = \nu \sum_{|n| \leq m} (-n^2) c_n(t) e^{inx} = \nu u_{xx}^m,$$

da cui:

$$\sum_{|n| \leq m} (c_n'(t) + \nu n^2 c_n(t)) e^{inx} = 0 \quad \forall x, \forall t,$$

che per quanto visto implica che $c_n'(t) + \nu n^2 c_n(t) = 0 \quad \forall t$.

Se scriviamo inoltre il dato iniziale:

$$u^m(0, x) = \sum_{|n| \leq m} u_n e^{inx}$$

tramite la somma associata di Fourier, viene fuori che:

$$\sum_{|n| \leq m} c_n(t) e^{inx} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sum_{|n| \leq m} c_n(0) e^{inx} = \sum_{|n| \leq m} u_n e^{inx},$$

cioé $c_n(0) = u_n \quad \forall n$.

Ci siamo quindi ricondotti a studiare $2m + 1$ equazioni ordinarie definite da:

$$\begin{cases} c_n'(t) + \nu n^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = u_n \end{cases}$$

che hanno le soluzioni $c_n(t) = u_n e^{-\nu n^2 t}$. Quindi possiamo scrivere:

$$u^m(t, x) = \sum_{|n| \leq m} u_n e^{-\nu n^2 t} e^{inx}.$$

Ci chiediamo ora se é possibile fare il limite $m \rightarrow \infty$; se il dato iniziale $u(0, x) = u_0(x)$ é continuo e $\delta > 0$, si ha:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| e^{-\nu n^2 \delta} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-\nu n^2 \delta})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

in quanto $u_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$; però se $\delta = 0$ la somma diverge.
 Se invece $u_0(x) \in \mathcal{L}^1$, si ha $|u_n| \leq c \forall n$, dunque:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| e^{-\nu n^2 \delta} \leq c \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\nu n^2 \delta} < +\infty,$$

ma sempre per $\delta > 0$.

In conclusione, se $u_0(x) \in \mathcal{L}^1$, la soluzione dell'equazione del calore esiste ed é:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-\nu n^2 t} e^{inx} \in C^0([\delta, T] \times \mathbb{R}),$$

per ogni fissato $\delta > 0$. Vediamo però che la soluzione $u(t, x)$ é molto piú regolare; infatti la sua derivata (formale) esiste in quanto:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |u_n| e^{-\nu n^2 t} < +\infty$$

poiché l'esponenziale va a ∞ piú veloce di qualsiasi n^d ; dunque anche la derivata di u é continua, e con un ragionamento del tutto analogo sulle derivate successive otteniamo che $u(t, x) \in C^\infty([\delta, T] \times \mathbb{R}) \forall \delta > 0$.

L'osservazione che $u(t, x)$ potrebbe anche non essere definita in 0 ci suggerisce che lo spostamento di calore é un processo irreversibile; conoscendo le temperature a un istante $t > 0$ non possiamo risalire alle temperature iniziali.

Proposizione 3.1. *Se $u_0 \in C^0(\mathbb{T})$, l'equazione del calore é unica.*

Dimostrazione. Siano u, v due soluzioni e sia $U = u - v$; U risolve:

$$\begin{cases} U_t = \nu U_{xx} \\ U(0, x) = 0 \\ U(-\pi, x) = U(\pi, x) \\ U_x(-\pi, x) = U_x(\pi, x) \end{cases}$$

Allora:

$$U_t - \nu U_{xx} = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (U_t - \nu U_{xx}) U dx = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} U_t U dx - \nu \int_{-\pi}^{\pi} U_{xx} U dx = 0.$$

Integrando per parti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{|U|^2}{2} dx - \nu \underbrace{[U_x U]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \nu \int_{-\pi}^{\pi} |U_x|^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} |U|^2 dx + \nu \int_{-\pi}^{\pi} |U_x|^2 dx = 0.$$

Otteniamo quindi che la funzione $\int_{-\pi}^{\pi} |U|^2 dx$ é decrescente e positiva, ma valendo 0 al tempo $t = 0$ é obbligata a valere 0 a tappeto, cioè $U \equiv 0$. \square

Teorema 3.2. $u_0 \in C^0(\mathbb{T})$. Se $\{u_n\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, allora $u(t, x) \rightarrow u_0(x) \forall x \in [-\pi, \pi]$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Dimostrazione. Come al solito, l'idea é quella di spezzare le frequenze. Si ha:

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u_0(x)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_n e^{-\nu n^2 t} - u_n) e^{inx} \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| (1 - e^{-\nu n^2 t}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| (1 - e^{-\nu n^2 t}) = \\ &= \underbrace{\sum_{|n| \leq N} |u_n| (1 - e^{-\nu n^2 t})}_{=I_1} + \underbrace{\sum_{|n| > N} |u_n| (1 - e^{-\nu n^2 t})}_{=I_2}. \end{aligned}$$

Ma ora:

$$I_2 \leq \sum_{|n|>N} |u_n| < \varepsilon,$$

in quanto $u_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$, mentre:

$$I_1 \leq \max_{|n|\leq N} u_n \sum_{|n|\leq N} (1 - e^{-\nu n^2 t}) < \varepsilon,$$

scegliendo t abbastanza piccolo affinché $1 - e^{-\nu n^2 t} < \frac{\varepsilon}{M(2N+1)}$, dove $M = \max_{|n|\leq N} u_n$. \square

Proviamo ad indebolire l'ipotesi sulla successione $\{u_n\}$ e vediamo quali dei precedenti risultati continuano a valere.

Osservazione. Con conti già fatti, abbiamo ottenuto (moltiplicando l'equazione del calore per u e integrando):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_{-\pi}^{\pi} |u_x(t, x)|^2 dx = 0,$$

quindi integrando rispetto a t si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} |u_x(s, x)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |u_0(x)|^2 dx,$$

in quanto l'ultimo membro é il valore dell'integrale al tempo $t = 0$.

Supponiamo di poter scrivere:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) e^{ikx};$$

e supponendo di poter usare l'identitá di Parseval si ha:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x)|^2 dx.$$

Inoltre, supponendo di poter applicare Parseval anche alla derivata, possiamo scrivere:

$$u_x(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) i k e^{ikx} \quad \text{e} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |u_k(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_x(t, x)|^2 dx.$$

Sostituendo a questo punto nella prima equazione ottenuta, ricaviamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k(t)|^2 + \nu \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |u_k(s)|^2 ds = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k(0)|^2.$$

Ma allora, se chiediamo per ipotesi che $u_k(0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, grazie a questa uguaglianza segue che $u_k(t) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e che:

$$\int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |u_k(s)|^2 ds < +\infty,$$

cioé la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |u_k(s)|^2$ é finita per quasi tutti gli $s \in [0, T]$.

Quindi la mappa lineare $u_k(0) \mapsto u_k(t)$ é limitata $\forall t > 0$, mentre la mappa lineare $u_k(0) \mapsto i k u_k(t)$ é limitata per quasi tutti i $t > 0$, ma per alcuni t può essere illimitata.

Teorema 3.3. *Se $u_k(0) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(0) e^{-\nu k^2 t} e^{ikx}$ é la soluzione dell'equazione del calore, allora $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ in $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ quando $t \rightarrow 0^+$, cioé:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x) - u_0(x)|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Dimostrazione. Per Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} |u(t, x) - u_0(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{u}_k(t) - \widehat{u}_k(0)|^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k|^2$; inoltre $u_0 \in \ell^2(\mathbb{Z})$, dunque $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2 < +\infty$.

Notiamo anche che $|u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k| \leq |u_k| e^{-\nu k^2 t} + |u_k| \leq 2|u_k|$, quindi, spezzando le frequenze:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k|^2 = \underbrace{\sum_{|k| < N} |u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k|^2}_{< \varepsilon} + \underbrace{\sum_{|k| \geq N} |u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k|^2}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon,$$

scegliendo t abbastanza piccolo affinché $|u_k e^{-\nu k^2 t} - u_k| < \frac{\varepsilon}{2N+1}$. \square

Osservazione. Definiamo **funzione di Green**:

$$G(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\nu n^2 t} e^{inx}}{2\pi},$$

per $t > 0$ e $x \in [-\pi, \pi]$ (la serie converge assolutamente). Supponiamo inoltre che la condizione iniziale dell'equazione del calore sia come sempre $u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{inx}$; allora notiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x-y) G(y, t) dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{in(x-y)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\nu k^2 t} e^{ikx} dy = e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n, k \in \mathbb{Z}} u_n e^{-\nu k^2 t} e^{-iny} e^{iky} dy = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-\nu n^2 t} e^{ikx} = u(t, x), \end{aligned}$$

cioé $u(t, x) = (u_0 * G)(x)$.

Osservazione. Supponiamo di voler risolvere la stessa equazione del calore ma con condizioni iniziali diverse; ad esempio risolviamo il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx} \\ u(-\pi, x) = u(\pi, x) = 0 \end{cases}$$

A differenza del problema già risolto, notiamo che qua non ci sono soluzioni costanti non banali. Separando le variabili, si ottiene che la soluzione deve essere scritta in somma di seni (infatti la soluzione di

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

é $X(x) = c_n \sin(nx)$, con $\lambda = n^2$); ma allora, se il dato iniziali é:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx),$$

allora in maniera analoga a come già fatto, si ottiene:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\nu n^2 t} \sin(nx)$$

e tale soluzione é unica (si dimostra con gli stessi calcoli fatti per l'altro problema).

A questo punto, risolvere il problema di Von Neumann:

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx} \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

é del tutto analogo.

Consideriamo adesso l'equazione del calore in piú dimensioni; sia dunque $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un chiuso limitato con parte interna non vuota e cerchiamo $u(t, x) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} u_t = \nu \Delta u \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{per } (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

Separiamo le variabili: $u(t, x) = T(t)X(x)$. Allora sostituendo nell'equazione:

$$T'(t)X(x) = \nu T(t)\Delta X(x) \Rightarrow \frac{T'(t)X(x)}{\nu T(t)X(x)} = \frac{\nu T(t)\Delta X(x)}{\nu T(t)X(x)} \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Dunque ci siamo ricondotti a studiare:

$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 \\ X(x) = 0 & \text{per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Anche in questo caso, vogliamo vedere che $\lambda > 0$. Per le formule di Gauss-Green:

$$-\int_{\Omega} \Delta X \cdot X = \lambda \int_{\Omega} X \cdot X \Rightarrow -\underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial X}{\partial n} X dS}_{=0} + \int_{\Omega} |\nabla X|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} |X|^2 dx,$$

e ancora concludiamo che $\lambda > 0$. A questo punto dobbiamo trovare una successione $\{\lambda_n\} \in \mathbb{R}^+$ crescente e una successione $\{X_n\} \in C^\infty(\Omega^\circ) \cap C_0^0(\bar{\Omega})$ tale che $-\Delta X_n = \lambda_n X_n$ e abbastanza densa da permettere di scrivere:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n;$$

infatti in questo modo potrei scrivere (in analogia al caso 1-dimensionale):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\nu \lambda_n t} X_n(x).$$

Purtroppo in generale queste X_n sono molto difficili da trovare e spesso non scrivibili esplicitamente; un caso abbastanza fortunato é quello di $\Omega = B(0, 1)$, in quanto in questa situazione le X_n sono le cosiddette funzioni di Bessel.

Proposizione 3.4 (Disuguaglianza di Poincaré). *Sia $f \in C^1(a, b)$ tale che $\int_a^b f(x) dx = 0$. Allora $\exists c_P$ costante universale tale che:*

$$\int_a^b |f|^2 dx \leq c_P \int_a^b |f'|^2 dx.$$

Dimostrazione. Per le disuguaglianze della media integrale, $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ ed $\exists \bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) = \int_a^b f dx$.

Abbiamo che $f(x) - \int_a^b f(x) dx = f(x) - f(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^x f'(t) dt$, dunque:

$$\left| f(x) - \int_a^b f(x) dx \right|^2 \leq \left| \int_{\bar{x}}^x 1 \cdot f'(t) dt \right|^2 \leq \left| \int_{\bar{x}}^x 1 \right| \cdot \int_{\bar{x}}^x |f'(t)|^2 dt \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt,$$

che é la tesi, in quanto $\int_a^b f = 0$. □

Riprendiamo l'equazione del calore $u_t = u_{xx}$ con periodicit  e con $u(0, x) \in u_0(x)$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) dx = 0$. Allora osserviamo che il valor medio di $u(t, x)$   0 in ogni momento, in quanto:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} u dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} dx = [u_x]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

dunque $\int_{-\pi}^{\pi} u dx$   costantemente 0.

Moltiplicando l'equazione del calore per u e integrando per parti si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|u_x(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0;$$

applicando la disuguaglianza di Poincar  si ricava:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \frac{1}{c_P} \|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq 0,$$

quindi:

$$\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 e^{\frac{2}{c_P} t} \right) \leq 0,$$

cio  $\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C e^{-\alpha t}$, per certi C, α ; ricaviamo che, se il valor medio di u all'istante $t = 0$   0, allora la soluzione dell'equazione del calore decade esponenzialmente in norma \mathcal{L}^2 .

Possiamo fare lo stesso ragionamento anche nel caso del problema di Dirichlet, usando:

Proposizione 3.5 (Disuguaglianza di Poincar  - variante). $f \in C_0^1(a, b)$, $f(a) = f(b) = 0$. Allora $\exists c_P$ costante universale tale che:

$$\int_a^b |f|^2 dx \leq c_P \int_a^b |f'|^2 dx.$$

Dimostrazione. $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) dt$ e si conclude come nella dimostrazione dell'altra disuguaglianza di Poincar . \square

Vogliamo ora estendere questo ragionamento all'equazione del calore in pi  dimensioni; innanzitutto dimostriamo la seguente:

Proposizione 3.6 (Disuguaglianza di Poincar  - caso multidimensionale). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $\Omega \subseteq L_a = \{|x_d| < \frac{a}{2}\}$ e sia $f \in C_0^1(\Omega)$. Allora:

$$\int_{\Omega} |f|^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx.$$

Dimostrazione. Sia $-\frac{a}{2} < x_d < 0$. $f(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\frac{a}{2}}^{x_d} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_d, \xi)}{\partial \xi} d\xi$, dunque:

$$|f(x_1, \dots, x_d)|^2 = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{x_d} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_d, \xi)}{\partial \xi} d\xi \right|^2 \leq \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{x_d} 1 \right) \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{x_d} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \right) \leq \frac{a}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^0 |\nabla f|^2 d\xi.$$

Ma allora:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \frac{a}{2} \int_{\Omega} dx \int_{-\frac{a}{2}}^0 |\nabla f|^2 d\xi = \frac{a}{2} \underbrace{\int_{-\frac{a}{2}}^0 dx_d}_{=\frac{a}{2}} \int dx_1 \dots dx_d \int_{-\frac{a}{2}}^0 |\nabla f|^2 d\xi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \int_{\Omega} |\nabla f|^2.$$

Ripetendo lo stesso argomento per $0 < x_d < \frac{a}{2}$ si ottiene la tesi. \square

Proposizione 3.7 (Integrazione per parti). *Siano $u, v \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato con bordo regolare. Allora:*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot v dx = \int_{\partial\Omega} uv \cdot ndS - \int_{\Omega} u \nabla \cdot v dx,$$

dove n é il vettore normale alla superficie.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema della divergenza all'uguaglianza (integrata):

$$\nabla \cdot (uv) = \nabla u \cdot v + u \nabla \cdot v.$$

□

Corollario 3.8. *Siano $u, v \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato con bordo regolare. Allora:*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot ndS - \int_{\Omega} u \Delta v dx.$$

A questo punto, prendiamo l'equazione del calore in piú variabili:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{per } (t, x) \in [0, T] \times \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{per } (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ limitato $\partial\Omega$ regolare.

Procedendo come al solito, si ricava:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\Omega} \Delta u u dx.$$

Applicando la seconda formula di integrazione per parti in piú variabili, si ottiene:

$$- \int_{\Omega} \Delta u u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

quindi usando la disuguaglianza di Poincaré si conclude:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0,$$

che comporta che $\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C e^{-\alpha t}$ per certi C, α , cioè anche in questo caso la soluzione dell'equazione del calore decade esponenzialmente in norma \mathcal{L}^2 .

4 Spazi di Hilbert

Definizione 4.1. X spazio vettoriale su \mathbb{R} (risp. su \mathbb{C}) si dice **spazio euclideo** se esiste un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ simmetrico (risp. hermitiano) che induce una norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \forall x \in X$.

Esempi. • $\ell^2(\mathbb{Z})$, con $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$;

• $C^0([a, b]; \mathbb{R})$, con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g dx$;

• $C^0([a, b]; \mathbb{C})$, con $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx$.

Proposizione 4.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). $\forall x, y \in X, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Dimostrazione. Se X é uno spazio vettoriale complesso, si usa il trucco solito applicato a $0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle$, con $\lambda = \rho e^{i\theta}$. \square

Proposizione 4.2 (Identitá del parallelogramma). $\forall x, y \in X, \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Osservazione. $\ell^p(\mathbb{Z})$ é euclideo $\iff p = 2$, infatti, se $p \neq 2$ i vettori della base canonica non soddisfano l'identitá del parallelogramma.

Definizione 4.2. Uno spazio euclideo si dice **spazio di Hilbert** se é completo.

Proposizione 4.3. $\ell^2(\mathbb{Z})$ é uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Sia $\{c^n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ una successione di Cauchy, cioé tale che $\|c^n - c^m\|_{\ell^2} < \varepsilon$ quando $n, m > N$ (cioé $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^n - c_k^m|^2 < \varepsilon^2$).

Ora, fissato $k \in \mathbb{Z}$, la successione $\{c_k^n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ é di Cauchy, quindi ha limite $c_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z}$. $\forall M \in \mathbb{N}$, si ha $\sum_{|k| \leq M} |c_k^n - c_k^m|^2 < \varepsilon^2$, quindi prendendo il limite per $m \rightarrow \infty$ otteniamo:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq M} |c_k^n - c_k^m|^2 = \sum_{|k| \leq M} |c_k^n - c_k|^2 \leq \varepsilon^2$$

$\forall M \in \mathbb{N}$, dunque:

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq M} |c_k^n - c_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k^n - c_k|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ci resta da vedere che $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$; ma per quanto visto:

$$\sum_{|k| \leq M} |c_k|^2 \leq \underbrace{\sum_{|k| \leq M} |c_k - c_k^n|^2}_{\leq \varepsilon^2} + \underbrace{\sum_{|k| \leq M} |c_k^n|^2}_{< C} < C + \varepsilon^2,$$

da cui la tesi. \square

Definizione 4.3. Definiamo **cubo di Hilbert** $Q = \{ \{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid |c_k| \leq \frac{1}{k} \}$.

Proposizione 4.4. Data una successione $\{c^n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Q$, esiste una sottosuccessione $\{c^{n_m}\} \subseteq \{c^n\}$ che converge a un $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Dimostrazione. Si procede con un argomento diagonale: visto che $|c_1^n| < 1$, allora $\exists \{c^{n_1}\} \rightarrow c_1 \in \mathbb{R}$ per Bolzano-Weierstrass; ma $|c_2^n| < \frac{1}{2}$, dunque $\exists \{c^{n_2}\} \supseteq \{c^{n_1}\} \rightarrow c_2 \in \mathbb{R}$ e così via. Sia $\{n^*\}$ la successione tale che $n^*(k) = n_k(k)$, dove n_k é la successione estratta al passaggio k -esimo; allora $c^{n^*} \rightarrow c = \{c_k\}$.
Se vediamo che $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$, avremmo la tesi.

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h^{n^*(k)} - c_h|^2 = \underbrace{\sum_{h=1}^M |c_h^{n^*(k)} - c_h|^2}_{< \varepsilon \text{ per } k \text{ grande}} + \underbrace{\sum_{h=M+1}^{\infty} |c_h^{n^*(k)} - c_h|^2}_{\leq \sum_{M+1}^{\infty} \frac{4}{h^2} < \varepsilon}$$

cioé la tesi. □

Allo stesso modo si dimostra:

Teorema 4.5 (di compattezza relativa). *Sia $\{c^j\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tale che $c_n^j \leq a_n \forall j$, con $\|a\|_{\ell^2} < +\infty$. Allora $\exists \{c^{j^*}\} \subseteq \{c^j\}$ che converge a un elemento $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$.*

Definizione 4.4. Una successione $\{e_n\}$ di vettori indipendenti di uno spazio di Hilbert H si dice **base hilbertiana** se $\forall x \in H \exists \varepsilon > 0$ e $\exists \sum_{n=1}^N c_n e_n$ tale che:

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n e_n - x \right\| < \varepsilon.$$

Osservazione. $\{e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ é una base hilbertiana, detta base canonica.

Nel seguito sia X un generico spazio euclideo.

Definizione 4.5. $B = \{x_\alpha\}$ si dice **sistema completo** per X se la chiusura delle combinazioni lineari di elementi di B é tutto X .

Esempio. Se $X = \{f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$, l'insieme $\{1, \sin(nx), \cos(mx)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ é un sistema completo per il teorema di approssimazione di Weierstrass.

Definizione 4.6. $\{x_\alpha\}$ sistema completo, $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0 \forall \alpha \neq \beta$. Allora $\{x_\alpha\}$ si dice **base ortogonale**.

Se vale anche che $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, allora il sistema si dice **base ortonormale**.

Definizione 4.7. X si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme denso al piú numerabile.

Esempio. $\ell^2(\mathbb{Z})$ é separabile, in quanto il sottoinsieme costituito dalle successioni finite di razionali é denso e numerabile.

Teorema 4.6. X separabile, $\{x_\alpha\}$ ortonormale. Allora $\{x_\alpha\}$ é al piú numerabile.

Dimostrazione. Si ha che $\|x_\alpha - x_\beta\| = \sqrt{\langle x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta \rangle} = \sqrt{2} \forall \alpha \neq \beta$, dunque $B(x_\alpha, \frac{1}{2}) \cap B(x_\beta, \frac{1}{2}) = \emptyset \forall \alpha \neq \beta$. Sia $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ il sottoinsieme denso numerabile; in ogni palla c'è un elemento y_k per densità, dunque le palle distinte sono in numero al piú numerabile. Segue che anche gli x_α sono al piú numerabili. □

Teorema 4.7 (Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt). $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ linearmente indipendenti. Allora $\exists \{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ortonormale con $\text{Span}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{Span}(f_1, \dots, f_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Corollario 4.8. X separabile $\Rightarrow \exists$ una base ortonormale numerabile.

Nel seguito X sarà sempre separabile.

Teorema 4.9. $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ortonormale (non necessariamente base), $f \in X$. Allora:

1. $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \left\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\| = \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right\|$, dove $c_j = \langle f, \varphi_j \rangle$ sono i **coefficienti di Fourier**.

2. $\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \left\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2$.

Dimostrazione. Si calcola:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \right\rangle = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle f, \varphi_j \rangle + \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \alpha_k \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j c_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 - 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j c_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2 + \sum_{j=1}^n (c_j - \alpha_j)^2 \end{aligned}$$

ed evidentemente il minimo si raggiunge con $\alpha_j = c_j$ e il minimo é quello voluto. \square

Osservazione. Dunque, passando il limite, si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j^2 \leq \|f\|^2, \quad \text{cioé} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \leq \|f\|^2,$$

che non é altro che la disuguaglianza di Bessel. Ci chiediamo se vale anche l'uguaglianza, cioè l'identità di Parseval.

Definizione 4.8. Un sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ si dice **chiuso** se $\forall f \in X$ vale l'identità di Parseval, cioè:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = \|f\|^2.$$

Teorema 4.10. $\{\varphi_n\}$ é chiuso \iff ogni $f \in X$ può essere scritto tramite la sua serie di Fourier, cioè:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j.$$

Dimostrazione. Deriva dalla relazione $\|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2$, dove $S_n(f)$ é la serie di Fourier troncata. \square

Osservazione. In uno spazio euclideo, scrivere $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ deve essere inteso come:

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n f_j \right\|_X \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Esempio. Se vediamo che $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ é chiuso, allora avremmo che:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^2,$$

o equivalentemente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Osservazione. Supponiamo di aver dimostrato che il sistema $\{1, \sin(nx), \cos(mx)\}$ é chiuso; sia $f(x) = x$ periodicizzata. Con un semplice conto otteniamo che la serie di Fourier di $f(x)$ é:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx),$$

quindi applicando la chiusura del sistema otteniamo:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx,$$

cioé:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Osservazione. Tramite la formula di polarizzazione, si può riscrivere l'identità di Parseval:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \langle g, \varphi_k \rangle.$$

Teorema 4.11. X é di Hilbert \iff ogni sistema ortonormale é chiuso.

Consideriamo il sottospazio proprio di ℓ^2 :

$$h^1 = \left\{ \{c_k\} \in \ell^2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < +\infty \right\}$$

con la norma:

$$\|c\|_{h^1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + k^2 c_k^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La palla $B = B_{h^1}(0, 1)$ é relativamente compatta in ℓ^2 , in quanto se $\{c_k\} \in B$, allora $k^2 c_k^2 \leq C$ e dunque $c_k \leq \frac{C'}{k}$ per una certa costante C' . Sia ora $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ e denotiamo con f_n la sua serie di Fourier troncata:

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

con $\{a_k\}, \{b_k\} \in \ell^2$. Sappiamo che $f_n \rightarrow f$ in norma \mathcal{L}^2 per $n \rightarrow \infty$; scriviamo inoltre:

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^n (-ka_k \sin(kx) + kb_k \cos(kx)).$$

Ora, se $\{ka_k\}, \{kb_k\} \in \ell^2$, cioè $\{a_k\}, \{b_k\} \in h^1$, allora $\exists g \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ tale che $f'_n \rightarrow g$ in norma \mathcal{L}^2 quando $n \rightarrow \infty$; chiamiamo tale g **derivata in senso debole** di f e notiamo che se $f \in C^1$, g non é altro che f' .

Definiamo anche $\mathcal{H}^1(-\pi, \pi) = \{f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \mid \{c_k\} \in h^1\}$.

In generale:

Definizione 4.9. Definiamo:

$$h^n = \left\{ \{c_k\} \in \ell^2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n} c_k^2 < +\infty \right\}$$

con la norma:

$$\|c\|_{h^n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + k^2 c_k^2 + \dots + k^{2n} c_k^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre si definisce:

$$\mathcal{H}^n(-\pi, \pi) = \{f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \mid \{c_k\} \in h^n\}.$$

Quindi, se ad esempio $f \in \mathcal{H}^2(-\pi, \pi)$, si ha che esistono $g, h \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ tali che $f_n \rightarrow f$, $f'_n \rightarrow g$, $f''_n \rightarrow h$ in norma \mathcal{L}^2 quando $n \rightarrow \infty$.

Deduciamo quindi che h^{n+1} é relativamente compatto in h^n .

Osservazione. In generale, si può definire lo spazio:

$$\mathcal{H}^s(-\pi, \pi) = \left\{ f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} c_k^2 < +\infty \right\}$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$ e, presa $f \in \mathcal{H}^s(-\pi, \pi)$ con serie di Fourier $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$, associargli la sua derivata debole s -esima definita come:

$$\frac{d^s}{dx^s} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s c_k e^{ikx},$$

che risulta convergente in \mathcal{L}^2 per definizione di \mathcal{H}^s .

Richiamiamo adesso il teorema di rappresentazione di Riesz: in \mathbb{R}^d , esso assicura che, data $A \in \mathcal{M}(d, \mathbb{R})$, esiste un unico vettore $y \in \mathbb{R}^d$ tale che $Ax = \langle x, y \rangle \forall x \in \mathbb{R}^d$. Vediamo che in ℓ^p (e più precisamente in ℓ^2) vale la stessa cosa.

Proposizione 4.12. $F \in \mathcal{L}(\ell^p, \mathbb{R})$ lineare e continua, $1 < p < \infty$. Allora esiste $y \in (\ell^p)^* = \ell^q$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tale che $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \forall x \in \ell^p$ (e dunque $F(x) = \langle x, y \rangle$ se $p = 2$).

Dimostrazione. Se $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, allora $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i F(e_i)$; denotando $x^N = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ e $y_i = F(e_i)$, si ha:

$$F(x^N) = \sum_{i=1}^N x_i y_i,$$

quindi ci rimane solo da passare al limite per $N \rightarrow \infty$ (cioé vedere che $y \in \ell^q$, poiché per Holder in questo caso si avrebbe $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i < +\infty$).

Poniamo:

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{se } y_i = 0 \\ |y_i|^{q-2} y_i & \text{se } y_i \neq 0 \end{cases}$$

osserviamo anche che $|z_i|^p = ||y_i|^{q-2} y_i|^p = |y_i|^{(q-1)p} = |y_i|^q$ e $|z_i|^{p-1} = |y_i|$.

Visto che F é continua, allora $\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_{\ell^p}} < +\infty$; inoltre si ha:

$$\left| F \left(\sum_{i=1}^N z_i e_i \right) \right| \leq \|F\| \|z^N\|,$$

dove $z^N = \sum_{i=1}^N z_i e_i$. Per linearità:

$$\left| F \left(\sum_{i=1}^N z_i e_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^N z_i y_i \right| = \sum_{i=1}^N |y_i|^q = \sum_{i=1}^N |z_i|^p = \|z^N\|_{\ell^p}^p \leq \|F\| \|z^N\|_{\ell^p},$$

quindi $\|z^N\|_{\ell^p}^{p-1} \leq \|F\|$ e passando al limite $\|y\|_{\ell^q} = \|z\|_{\ell^p}^{p-1} \leq \|F\|$.

Visto che la disuguaglianza $\|F\| \leq \|y\|_{\ell^q}$ é ovvia (in quanto $\frac{|F(y)|}{\|y\|_{\ell^q}} = \|y\|_{\ell^q}$), si conclude che $\|y\|_{\ell^q} = \|F\|$, da cui la tesi. \square

In maniera simile, si può mostrare:

Proposizione 4.13. $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^p(\Omega), \mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Allora esiste $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tale che $F(f) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

Proposizione 4.14. X spazio di Hilbert, $F \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ limitato e continuo non nullo. Allora $\text{codim}(\text{Ker}(F)) = 1$.

Dimostrazione. Sia $y \in X$ tale che $F(y) \neq 0$. Se $\lambda = \frac{1}{F(y)}$, allora $F(\lambda y) = 1$; sia $y_0 = \lambda y$.

Dato $x \in X$, si ha $x = x - F(x)y_0 + F(x)y_0$, con $x - F(x)y_0 \in \text{Ker}(F)$, e tale decomposizione é unica, in quanto se $x = x' + \alpha y_0 = x'' + \beta y_0$ con $x', x'' \in \text{Ker}(f)$, $F(x) = \alpha = \beta$ e dunque $x' = x''$. Concludiamo che $X = \text{Ker}(F) \oplus \text{Span}(y_0)$, cioé la tesi. \square

Teorema 4.15. X spazio di Hilbert, $K \subseteq X$ convesso chiuso. Allora $\forall x \in X \exists! P(x) \in K$ tale che $\|x - P(x)\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$.

Dimostrazione. $\|x - y\| \geq 0$, dunque $\exists y_n \in K$ tale che $\|x - y_n\| = d_n \rightarrow d = \inf_K \|x - y\|$. Se vedo che y_n é di Cauchy, y_n avrebbe limite per completezza di X .

Per l'identitá del parallelogramma, se $n, m > N$:

$$\left\| \frac{(x - y_n) + (x - y_m)}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{(x - y_n) - (x - y_m)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2),$$

cioé:

$$\left\| \underbrace{x - \frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2),$$

ma $\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| \geq d^2$ per definizione di estremo inferiore, dunque:

$$\left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2 < \varepsilon,$$

in quanto $d_n^2 - d^2 < \varepsilon$ e $d_m^2 - d^2 < \varepsilon$.

Quindi, a meno di estrarre una sottosuccessione, $y_n \rightarrow y \in K$, poiché K é chiuso.

Se per assurdo esistono due punti che realizzano il minimo, siano essi $P_1(x)$ e $P_2(x)$, sempre per l'identitá del parallelogramma si ha:

$$\left\| \underbrace{x - \frac{P_1(x) + P_2(x)}{2}}_{\in K} \right\|^2 + \left\| \frac{P_1(x) - P_2(x)}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x - P_1(x)\|^2 + \|x - P_2(x)\|^2) = d^2,$$

dunque $\left\| \frac{P_1(x) - P_2(x)}{2} \right\|^2 \leq d^2 - d^2 = 0$, cioé $P_1(x) = P_2(x)$. \square

Corollario 4.16. $M \subseteq X$ sottospazio chiuso. $\forall x \in X \exists! P(x) \in M$ tale che $\|x - P(x)\| = \min_{y \in M} \|x - y\|$

Definizione 4.10. La mappa $P : X \rightarrow K$ tale che $P(x)$ é il punto definito nel teorema si chiama **proiezione**.

Osservazione. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivabile e in a c' é un minimo, allora $f'(a) \geq 0$.

Dunque, se $f : \mathbb{R}^d \supseteq K \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 , e $\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$, per $t \in [0, 1]$, allora $\phi'(0) = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$.

Proposizione 4.17. $\forall w \in K$, K convesso chiuso, $\langle x - P(x), w - P(x) \rangle \leq 0$.

Dimostrazione. Se $\phi(t) = \|x - ((1-t)P(x) + tw)\|^2$, per l'osservazione precedente $\phi'(0) \geq 0 \forall w \in K$. Ma:

$$\phi(t) = \|x - P(x) + t(P(x) - w)\|^2 = \|x - P(x)\|^2 + 2t\langle x - P(x), P(x) - w \rangle + t^2\|P(x) - w\|^2,$$

dunque $\phi'(0) = 2\langle x - P(x), P(x) - w \rangle \geq 0 \forall w \in K$. \square

Osservazione. Si può vedere che in realtà vale anche il viceversa, cioè se il punto $P(x)$ ha quella proprietà, allora è il punto di K che minimizza la distanza con x .

Osservazione. Se $K = M$ è un sottospazio chiuso, sostituendo nella disuguaglianza precedente $w = 0$ e $w = 2P(x)$, si ottiene che $\langle x - P(x), P(x) \rangle = 0$. Ma allora, visto che la stessa disuguaglianza vale per w e per $-w$, segue che $\langle x - P(x), w \rangle = 0$ per ogni $w \in M$.

Corollario 4.18. *Se X è di Hilbert e $M \subseteq X$ è un sottospazio chiuso, allora $X = M \oplus M^\perp$.*

Dimostrazione. Dato $x \in X$, se P è la proiezione su M allora $x = x - P(x) + P(x)$; basta notare che $P(x) \in M$ e $x - P(x) \in M^\perp$. \square

Proposizione 4.19. *La proiezione P su un sottospazio chiuso M è lineare e $\|P\| = 1$.*

Dimostrazione. Per vedere che è lineare, osserviamo:

$$\begin{cases} \langle \alpha x + \beta y - P(\alpha x + \beta y), w \rangle = 0 & \forall w \in M \\ \langle \alpha x + \beta y - \alpha P(x) - \beta P(y), w \rangle = 0 & \forall w \in M \end{cases}$$

dunque $\langle P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y), w \rangle = 0 \forall w \in M$, ma $P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y) \in M$, quindi $\|P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y)\| = 0$, cioè $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$.

Inoltre $\|x\|\|P(x)\| \geq \langle x, P(x) \rangle = \langle P(x), P(x) \rangle = \|P(x)\|^2$, dunque $\|P\| \leq 1$; ma $P(m) = m \forall m \in M$, quindi $\|P\| \geq 1$. \square

Quindi, definendo $Q = I - P$, si ha:

$$x = P(x) + Q(x), \quad \langle P(x), Q(x) \rangle = 0, \quad \|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2,$$

$\forall x \in X$.

Teorema 4.20. $\mathcal{L}^2(a, b)$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy; a meno di estrarre una sottosuccessione, posso supporre $\|f_{n+1} - f_n\|_{\mathcal{L}^2} \leq \frac{1}{2^n}$.

Sia $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$; sicuramente $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ quasi ovunque $\forall n$. Visto che:

$$\|g_n\|_{\mathcal{L}^2} \leq \sum_{k=1}^n \|f_{k+1} - f_k\| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq 1,$$

allora per Beppo-Levi $g_n \rightarrow g$ in norma quadra, $\|g\|_{\mathcal{L}^2} < +\infty$.

Vediamo che la successione $\{f_n\}$ è di Cauchy nella norma $|\cdot|$; se $n, m > N$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{k+1} - f_k| < \varepsilon,$$

in quanto è la coda di una serie convergente. Ma allora $f_n(x) \rightarrow f(x)$ e $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq |g(x)| + |f_n(x)|$, quindi $f \in \mathcal{L}^2$.

Visto che $|f(x) - f_n(x)|^2 \leq g(x)^2$, per il teorema di convergenza dominata $f_n \rightarrow f$ anche in \mathcal{L}^2 . \square

Teorema 4.21 (Riesz-Fisher). $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ continuo e limitato, X spazio di Hilbert. Allora $\exists! y \in X$ tale che $f(x) = \langle x, y \rangle \forall x \in X$.

Dimostrazione. Se $f \equiv 0$ l'enunciato é banale; quindi supponiamo $f \neq 0$.

Sia $M = \text{Ker}(f)$; $M \subseteq X$ é un sottospazio chiuso di codimensione 1, e sia P la proiezione su M . Visto che $X = M \oplus M^\perp$ e $M^\perp = \text{Span}(y_0)$, con $f(y_0) = 1$, allora dato $x \in X$ si puó scomporre $x = \lambda y_0 + z$, dove $z \in \text{Ker}(f)$.

$f(x) = \lambda f(y_0) = \lambda$ e $\langle x, y_0 \rangle = \lambda \langle y_0, y_0 \rangle = \lambda \|y_0\|^2$, dunque $y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}$ dá l'esistenza.

Se poi esistessero due elementi y, w che rappresentano f , allora $\langle x, y - w \rangle = 0 \forall x \in X$, dunque in particolare $\|y - w\|^2 = 0$. \square

Corollario 4.22. Se $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^2(a, b)$, allora $\exists \{n_k\}$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f(x)$ quasi ovunque.

Discende dal teorema di Riesz-Fisher:

Teorema 4.23 (di isomorfismo). X, Y spazi di Hilbert. Allora $X \cong Y \cong \ell^2$.

Dimostrazione. Per il teorema di Riesz-Fisher, la funzione che manda un elemento di X (o di Y) nella successione dei propri coefficienti di Fourier é un isomorfismo. \square

Quindi possiamo considerare ℓ^2 come lo spazio di Hilbert universale.

5 L'equazione di Poisson e l'equazione di Laplace

Siano dati sul piano due punti (a, α) e (b, β) ; vogliamo trovare una funzione u tale che:

$$\begin{cases} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Supponiamo di aver trovato una tale f che minimizza l'energia; sia $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$, cioè tale che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Definiamo:

$$J(\varepsilon) = \int_a^b |f'(x) + \varepsilon\varphi'(x)|^2 dx;$$

allora, visto che f minimizza l'energia, abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\varepsilon) - J(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_a^b |f'(x) + \varepsilon\varphi'(x)|^2 dx - \int_a^b |f'(x)|^2 dx}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_a^b f'(x)\varphi'(x) dx + \varepsilon \int_a^b |\varphi'(x)|^2 dx = 2 \int_a^b f'(x)\varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Quindi, integrando per parti (e dunque supponendo $f \in C^2(a, b)$), abbiamo:

$$0 = \int_a^b f'(x)\varphi'(x) dx = \underbrace{[f''(x)\varphi(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b f''(x)\varphi(x) dx$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$.

Ora, se $f \in C^2(a, b)$ e se fosse $f''(x_0) > 0$ per un certo x_0 , allora si avrebbe $f''(x) > 0$ per $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, dunque prendendo φ che vale 1 su $[x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ e 0 fuori da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, si avrebbe che l'integrale non sarebbe 0, quindi concludiamo che $f''(x) \equiv 0$.

In altre parole, la funzione che minimizza l'energia è la retta.

Imponiamo adesso un'altra condizione, cioè che la funzione u debba superare un vincolo posto nell'intervallo $[a, b]$, cioè u deve essere tale che:

$$\begin{cases} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(x) \geq \psi(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Se ad esempio $\psi(x) = c\chi_{\{x_0\}}$, allora ci immaginiamo che la funzione u voluta sia la spezzata che unisce (a, α) a (x_0, c) e (x_0, c) a (b, β) ; però questa funzione non può essere ottenuta con il ragionamento precedente, in quanto tale u non sarebbe C^2 . Dobbiamo quindi metterci in un contesto in cui sia sempre possibile fare le derivate (che saranno quindi derivate in senso debole).

Occupiamoci ora del problema in d dimensioni; sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e consideriamo una membrana che si deve appoggiare sul bordo $\partial\Omega$ in modo da minimizzare l'energia: abbiamo quindi un problema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(x) = g(x) \text{ per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Come prima definiamo $J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$ e, presa $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, imponiamo a 0 il limite del rapporto incrementale di J lungo φ :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} = \dots = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx.$$

Integrando per parti:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \varphi(x) dS}_{=0},$$

quindi, se $u \in C^2$, si ha che $\int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx = 0 \forall \varphi$, dunque ragionando come prima $\Delta u = 0$.

Osservazione. Notiamo che in generale non é vero che esista una funzione u che minimizza l'energia; ad esempio consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \int_0^1 (u(x))^2 + (|u'(x)| - 1)^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione $u(x)$ é una funzione con derivata ± 1 in ogni punto piú vicina possibile all'asse x ; osserviamo che la successione di funzioni $\{u_n\}$ tale che u_n unisce i punti $(0, 0)$, $(1/n, 1/n)$, $(0, 2/n)$, $(1/n, 3/n)$, \dots , $(0, 1)$ rende l'integrale precedente piú piccolo di c/n , con c una certa costante. Dunque l'estremo inferiore di quell'integrale é 0, ma d'altra parte il limite della successione di funzioni minimizzanti, che é 0, non coincide con il minimizzante dell'integrale; si conclude che il minimo non esiste.

Quindi, per risolvere il problema, dobbiamo trovare una successione minimizzante $\{u_n\}$ tale che $u_n \rightarrow u$ e:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

cioé tale che $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$; questo non impedisce però a ∇u a essere illimitato in qualche punto.

Ritorniamo ora al problema variazionale considerato; senza supporre eccessiva regolarità su $u \in C^1(\Omega)$, avevamo trovato la condizione che:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = 0$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definiamo il prodotto scalare:

$$\mathcal{B}(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi;$$

sicuramente é bilineare e $\mathcal{B}(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq 0$, ma esso induce una seminorma (e non una norma), in quanto $\mathcal{B}(u, u) = 0 \iff u = c$ costante quasi ovunque.

Preferiamo dunque considerare il prodotto scalare:

$$\mathcal{C}(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx,$$

in quanto $\mathcal{C}(u, u) = 0 \iff u = 0$ quasi ovunque.

Osserviamo inoltre che \mathcal{C} é ben definito non appena $u, \nabla u, \varphi, \nabla \varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$; in altre parole é ben definito se, presa $u_n \rightarrow u$ in \mathcal{L}^2 , si ha che $\exists g \in \mathcal{L}^2$ tale che:

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - g|^2 \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Denoteremo tale $g = \nabla u$ in senso improprio.

Osservazione. Supponiamo di voler risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad \text{dove } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

Il problema non é ben definito in senso classico, in quanto f ha una discontinuitá di salto, quindi non puó esistere una y derivabile che abbia f come derivata; potremmo chiedere che valga $y'(t) = f(t)$ quasi ovunque, ma ciò puó causare problemi piuttosto importanti: se ad esempio chiediamo che $y'(t) = 0$ quasi ovunque, y puó essere la scala di Cantor, eliminando l'unicitá della soluzione del problema.

Quindi l'idea é approssimare $f(t)$ con funzioni piú regolari e risolvere i sistemi approssimati, per poi passare al limite; ad esempio, nel nostro caso, potremmo approssimare f con f_ε definita da:

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t-1}{\varepsilon} & \text{se } 1 \leq t \leq 1 + \varepsilon \\ 1 & \text{se } t \geq 1 + \varepsilon \end{cases}$$

per ottenere delle y_ε che approssimano y in modo quadratico.

Il precedente é un modo molto classico di ragionare per risolvere problemi di Cauchy; vediamo ora un altro esempio. Ci interessiamo all'equazione differenziale:

$$y''(t) + py(t) = f(t),$$

con $p \in \mathbb{R}$ non quadrato di un intero e $f(t) \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$.

Scriviamo le funzioni in gioco con le rispettive serie di Fourier (poiché siamo in $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$):

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \quad f_n(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}, \quad y(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k e^{ikt}, \quad y_n(t) = \sum_{|k| \leq n} y_k e^{ikt}.$$

Risolve $y_n''(t) + py_n(t) = f(t)$, cioè:

$$\sum_{|k| \leq n} -k^2 y_k e^{ikt} + p \sum_{|k| \leq n} y_k e^{ikt} = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt},$$

dunque $y_k(p - k^2) = c_k$, da cui $y_k = \frac{c_k}{p - k^2} \forall |k| \leq n$, con il denominatore sempre $\neq 0$. La soluzione troncata é perciò:

$$y_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \frac{c_k}{p - k^2} e^{ikt}.$$

Ma essendo in $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, $y_n \rightarrow y = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}} \frac{c_k}{p - k^2} e^{ikt}$; osserviamo che tale y sta in $\mathcal{H}^2(-\pi, \pi)$, in quanto le sue due prime derivate deboli:

$$y'(t) = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}} \frac{ikc_k}{p - k^2} e^{ikt}, \quad y''(t) = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}} -\frac{k^2 c_k}{p - k^2} e^{ikt}$$

stanno in $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ poiché i rispettivi coefficienti di Fourier stanno in $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Osserviamo che, quindi, partendo da una funzione $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, si ottiene una soluzione $y \in \mathcal{H}^2(-\pi, \pi)$; questo "guadagno" di due derivate in generale é falso se partiamo da $f \in C^0$ e vogliamo ottenere $y \in C^2$. Un esempio é il problema:

$$\begin{cases} u(x) - \Delta u(x) = f(x) \in C^0(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d > 1$ (infatti in una dimensione il problema ha una soluzione C^2).

Se ad esempio $d = 2$ e $f \in C^0(\Omega)$, in generale é falso che $u \in C^2(\Omega)$ (poiché se $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ é regolare, non si può dire niente sulla regolarità di ciascuno degli addendi); in realtà abbiamo che, se $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora $y \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, ma questo non ci risolve il caso generale.

Quindi cambiamo contesto e fissiamo $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$; vogliamo vedere che qua la soluzione “guadagna” due derivate. Poniamo inoltre $\Omega = \mathbb{T}^2$.

Scrivendo le funzioni in serie di Fourier:

$$u(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_k e^{ik \cdot x}, \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k e^{ik \cdot x},$$

otteniamo, ragionando come prima per approssimazioni successive:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} (c_k + \|k\|^2 c_k) e^{ik \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k e^{ik \cdot x},$$

cioé $c_k = \frac{f_k}{1 + \|k\|^2}$. Osserviamo che, come voluto, $u \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2)$.

Osservazione. Modificando leggermente l'equazione appena studiata, consideriamo $-\Delta u = f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. Allora:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)(-\Delta u) = \int_{\Omega} f(-\Delta u) \quad \Rightarrow \quad \|\Delta u\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \left| \int_{\Omega} f \Delta u \right| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|\Delta u\|_{\mathcal{L}^2},$$

cioé $\|\Delta u\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2}$; questo implica che $\partial_x^2 u, \partial_y^2 u \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. Ma cosa possiamo dire sulle derivate miste?

Integrando per parti, ponendo $\Omega = \mathbb{T}^2$, si ha:

$$\|\partial_{xy}^2 u\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} (\partial_{xy}^2 u)^2 dx = - \int_{\mathbb{T}^2} \partial_x u \partial_{xyy}^3 u dx = \int_{\mathbb{T}^2} \partial_x^2 u \partial_y^2 u dx \leq \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 dx,$$

cioé $\partial_{xy}^2 u \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$.

Interessiamoci adesso al caso unidimensionale della precedente equazione differenziale; vogliamo risolvere:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{per } x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Per la disuguaglianza di Poincaré abbiamo la stima dall'alto:

$$\int_0^1 |u|^2 \leq c \int_0^1 |u'|^2,$$

che ci permette di controllare $\int_0^1 |u|^2 + \int_0^1 |u'|^2$ con $\int_0^1 |u'|^2$.

Prendiamo lo spazio euclideo $H = C_0^2(0, 1)$, con prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'g'$; completiamo H a $\overline{H} = \mathcal{L}^2$.

Sia φ una generica funzione regolare, $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$; allora, se u é soluzione dell'equazione considerata, abbiamo integrando per parti:

$$- \int_0^1 u'' \varphi = \int_0^1 f \varphi \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 u' \varphi' = \int_0^1 f \varphi.$$

Riscriviamo la precedente relazione denotando F il funzionale tale che $F(\varphi) = \int_0^1 f \varphi$:

$$F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Osserviamo che, se $u \in C^2$ e $f \in C^0$, allora $-u'' = f \iff F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ per ogni funzione regolare φ ; se però non abbiamo queste ipotesi di regolarità, abbiamo visto che vale l'implicazione \Rightarrow , ma in generale non vale l'altra. Dunque estendiamo il concetto di soluzione di un'equazione differenziale dicendo che una funzione è 0 se e solo se è ortogonale a tutte le funzioni regolari C_0^∞ ; in altre parole, se $a_1, a_2 \in \mathcal{L}^2$, definiamo:

$$a_1 = a_2 \iff \langle a_1, \varphi \rangle = \langle a_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Risolvere l'equazione considerata è equivalente a trovare il minimo di:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 - \int_0^1 fu,$$

infatti $\frac{J(u+\varepsilon\varphi)-J(u)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0 \iff F(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$; un problema simile era stato introdotto all'inizio della sezione. Osserviamo che:

$$\left| \int_0^1 fu \right| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|u\|_{\mathcal{L}^2} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|u'\|_{\mathcal{L}^2},$$

dunque effettivamente l'estremo inferiore di $J(u)$ è finito.

Con lo stesso conto appena fatto, si vede che $|F(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$, dunque F è limitato e lineare, e perciò per il teorema di Riesz esiste un'unico v tale che $F(\varphi) = \langle v, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$. Ma allora $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \Rightarrow \langle u - v, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$, dunque la soluzione (unica) è $u = v$.

Osserviamo subito che il ragionamento appena fatto è molto importante, perché ci dimostra l'unicità della soluzione in questo senso esteso; però allo stesso tempo non ci dà nessuna informazione sulla soluzione, quindi cerchiamo un argomento più pratico che mostri esplicitamente una forma (anche approssimata) della soluzione.

Dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in una partizione $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ e denotiamo φ_i , $1 \leq i \leq n$, la funzione lineare che unisce i punti $(x_{n-1}, 0)$, $(x_n, 1)$, $(x_{n+1}, 0)$ ed è 0 fuori da $[x_{n-1}, x_{n+1}]$; supponiamo di poter scrivere la nostra funzione u come:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k.$$

Denotiamo $u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$; considerando l'equazione di Poisson troncata abbiamo:

$$\int_0^1 u_n' \varphi_k' = \int_0^1 f \varphi_k \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

cioè:

$$\int_0^1 \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m' \varphi_k' = \sum_{m=1}^n c_m \int_0^1 \varphi_m' \varphi_k' = \int_0^1 f \varphi_k \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

(in realtà l'integrale andrebbe spezzato in n integrali, in modo che in ciascuno sia ben definita la derivata dei φ_k).

Denotiamo $A_{km} = \int_0^1 \varphi_m' \varphi_k' \in \mathbb{R}$, $F_k = \int_0^1 f \varphi_k$, $A = (A_{km})$, $F = (F_k)$, $c = (c_k)$; allora il mio problema troncato si riduce al sistema:

$$Ac = F,$$

che è risolubile $\iff A$ è invertibile. Ma:

$$\int_0^1 fu_n = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 f \varphi_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m' \varphi_k' = \int_0^1 \sum_{k,m=1}^n c_m \varphi_m' c_k \varphi_k' = \int_0^1 |u_n'|^2,$$

dunque se $F = 0$, allora $\int_0^1 |u'_n|^2 = 0$, cioè $c = 0$; questo mostra l'iniettività (e dunque l'invertibilità) di A .

Risolvero quindi il sistema troncato e riesco ad ottenere una soluzione approssimata dell'equazione di Poisson unidimensionale (questo ragionamento utilizzato si chiama **tecnica degli elementi finiti**; ma cosa succede se cerco di passare al limite $n \rightarrow \infty$?

Usando argomenti più avanzati di analisi funzionale, si può vedere che, se $u, u' \in \mathcal{L}^2(0, 1)$, allora $u_n \rightarrow u$ converge effettivamente alla soluzione.

Inoltre si può verificare che u_n è la proiezione di u su $\text{Span}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Osservazione. Consideriamo l'equazione di Poisson unidimensionale nel caso in cui u, f sono 2π -periodiche. Risolvere l'equazione troncata $-u''_n = f_n$, con $u_n = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$ e $f_n = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}_k e^{ikx}$, significa trovare $u_n \in V_n = \text{Span}(\{e^{ikx} \mid |k| \leq n\})$ tale che $-u''_n = P_n(f)$ (dove $P_n : \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \rightarrow V_n$ è la proiezione), cioè tale che:

$$\langle -u''_n, e^{ikx} \rangle = \langle P_n(f), e^{ikx} \rangle \quad \forall |k| \leq n.$$

Quest'ultima condizione è equivalente a cercare $u_n \in V_n$ tale che $(u''_n + f) \perp V_n$.

Il precedente ragionamento non si può applicare in generale; vediamo un esempio.

Esempio. Supponiamo di voler risolvere l'equazione:

$$-u'' + u^2 = f$$

con periodicità; proiettando su V_n avremmo $-u''_n + P_n(u_n^2) = P_n(f)$, in quanto se $u_n \in V_n$, non è vero che $u_n^2 \in V_n$.

Quindi siamo obbligati a risolvere un'equazione ancora più approssimata, che è:

$$\langle -u''_n, \varphi \rangle + \langle u_n^2, \varphi \rangle = \langle P_n(f), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V_n,$$

cioè $(u''_n - u_n^2 + f) \perp V_n$.

Esempio. Interessiamoci all'equazione differenziale $-u'' + |u|^2 u = f$, con u periodica a media nulla. Troncando l'equazione, cerchiamo $u_n \in V_n$ tale che:

$$\langle -u''_n + |u_n|^2 u_n, \varphi \rangle = \langle P_n(f), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in V_n.$$

ma $u_n \in V_n$, quindi poniamo $\varphi = u_n$ e otteniamo:

$$\langle -u''_n, u_n \rangle + \langle |u_n|^2 u_n, u_n \rangle = \langle P_n(f), u_n \rangle,$$

cioè:

$$\frac{1}{2\pi} \|u'_n\|^2 + \frac{1}{2\pi} \int |u_n|^4 = \frac{1}{2\pi} \int P_n(f) \overline{u_n}.$$

Perciò, grazie alla disuguaglianza di Poincaré, otteniamo la **stima a priori** $\|u'_n\| \leq c \|P_n(f)\|$; grazie a questa stima ricaviamo che il prodotto scalare $\langle -u''_n, e^{ikx} \rangle$ ha senso, in quanto per la stima appena fatta la serie di u''_n converge.

Purtroppo, per passare al limite $n \rightarrow \infty$, l'unica cosa che rimarrebbe da fare sarebbe controllare l'addendo $\langle |u_n|^2 u_n, e^{ikx} \rangle$, ma per far questo avremmo bisogno del teorema di immersione di Sobolev, che afferma che \mathcal{H}^1 si immerge compattamente in $\mathcal{L}^q \forall q < +\infty$.

Ritorniamo al problema di inizio sezione, cioè cerchiamo di risolvere l'equazione di Laplace bidimensionale:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{in } \partial B(0, 1) \end{cases},$$

con $u \in C^2(B(0,1))$. Passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in [0,1), \theta \in [0,2\pi] \\ u(1,\theta) = g(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

con u periodica rispetto a θ . Separando le variabili, poniamo $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$, da cui:

$$R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta) \Rightarrow \rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ma $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ con Θ periodica é l'equazione dell'oscillatore armonico, quindi si deve avere $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$; si ottiene l'equazione:

$$\rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} = n^2, \quad \text{cioé} \quad \rho^2R'' + \rho R' - n^2R = 0.$$

Se $n = 0$, la soluzione sarebbe il logaritmo (oltre alle costanti), che però escludiamo perché va a ∞ in un intorno di 0; dunque in corrispondenza di $n = 0$ assegniamo la soluzione costante.

Se $n \neq 0$, la funzione $R(\rho) = c \cdot \rho^\alpha$ risolve l'equazione \iff :

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho\alpha\rho^{\alpha-1} - n^2\rho^\alpha = 0 \iff \alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \iff \alpha = \pm n.$$

Ma per regolarità di R in 0, si deve avere $\alpha \geq 0$; quindi $\alpha = |n|$. Abbiamo ottenuto le soluzioni $\Theta_n(\theta) = e^{in\theta}$ per $n \in \mathbb{Z}$ e $R_n = c_n\rho^{|n|}$ se $n \neq 0$; dunque se $P(\rho,\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{|n|} e^{in\theta}$, allora P converge assolutamente perché é maggiorata da una serie geometrica con $0 \leq \rho < 1$.

Abbiamo mostrato:

Proposizione 5.1. $P(\rho,\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{|n|} e^{in\theta} \in C^\infty(B(0,1)^\circ)$ é tale che $\Delta P = 0$ e, se $g(\theta) \in C^0(\mathbb{T})$, $g(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n e^{in\theta}$, $|\hat{g}_n| \leq c$, allora:

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}_n \rho^{|n|} e^{in\theta} \in C^\infty(B(0,1)^\circ)$$

é armonica e $u(\rho,\theta) \rightarrow g(\theta)$ quando $\rho \rightarrow 1^-$.

Ma se $g(\theta)$ non avesse i coefficienti limitati, cosa potremmo dire sulla convergenza di $u(\rho,\theta)$ per $\rho \rightarrow 1^-$? Osserviamo che:

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) \rho^{|n|} e^{-in\varphi} e^{in\theta} d\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) e^{-in(\varphi-\theta)} d\varphi = g(\theta) * P_\rho(\theta).$$

Se mostrassimo che P_ρ (detto **nucleo di Poisson**) é una successione di Dirac per $\rho \rightarrow 1^-$, avremmo la convergenza voluta.

Lemma 5.2. $P_\rho(\theta) = 1 + 2 \sum_{n>0} \rho^n \cos(n\theta) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos(\theta) + \rho^2}$.

Dimostrazione. Per la prima uguaglianza:

$$\begin{aligned} P_\rho(\theta) &= \sum_{n<0} \rho^{-n} e^{in\theta} + 1 + \sum_{n>0} \rho^n e^{in\theta} = \sum_{n>0} \rho^n e^{-in\theta} + 1 + \sum_{n>0} \rho^n e^{in\theta} = 1 + \sum_{n>0} \rho^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \\ &= 1 + 2 \sum_{n>0} \rho^n \cos(n\theta). \end{aligned}$$

Per la seconda:

$$P_\rho(\theta) = \frac{\rho e^{-i\theta}}{1 - \rho e^{-i\theta}} + 1 + \frac{\rho e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} = \frac{\rho e^{-i\theta} - \rho^2 + 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2 + \rho e^{i\theta} - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2}.$$

□

A questo punto verificare le quattro condizioni delle successioni di Dirac é semplice:

1. $P_\rho(\theta) \geq 0$, in quanto $1 - \rho^2 \geq 0$ e $1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2 = (1 - \rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2 > 0$ $\forall \rho \in [0, 1)$.
2. $P_\rho(\theta) = P_\rho(-\theta)$, in quanto é somma di funzioni pari.
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta) = 1$, in quanto l'integrale del coseno é 0 e rimane solo l'integrale di 1.
4. Se $|\theta| > \delta > 0$, allora $1 - \rho \cos(\theta) \geq 1 - |\cos(\theta)| \geq 1 - |\cos(\delta)|$, dunque $P_\rho(\theta) \leq \frac{1 - \rho^2}{(1 - |\cos(\delta)|)^2} \rightarrow 0$ uniformemente quando $\rho \rightarrow 1^-$.

Si conclude perció che:

$$u(\rho, \theta) = g(\theta) * P_\rho(\theta) \xrightarrow{\rho \rightarrow 1^-} g(\theta).$$

Ci rimane da discutere l'unicitá della soluzione. Sappiamo che, se avessimo che:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx < +\infty$$

allora la soluzione sarebbe unica, in quanto $U = u - v$ sarebbe tale che $\int_{B(0,1)} |\nabla U|^2 dx = 0$. Purtroppo, per una g generica non é vera quella stima; vediamo.

In coordinate polari si ha:

$$|\nabla u|^2 = |\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 = |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\partial_\theta u|^2,$$

dunque:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\partial_\theta u|^2 d\theta \rho d\rho.$$

Abbiamo:

$$|\partial_\rho u|^2 = (\partial_\rho u)(\overline{\partial_\rho u}) = \sum_n \widehat{g}_n |n| \rho^{|n|-1} e^{in\theta} \sum_l \overline{\widehat{g}_l} |l| \rho^{|l|-1} e^{-il\theta},$$

quindi:

$$\int_0^{2\pi} |\partial_\rho u|^2 d\theta = 2\pi \sum_n |\widehat{g}_n|^2 |n|^2 \rho^{2|n|-2},$$

da cui:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_\rho u|^2 d\theta \rho d\rho = 2\pi \sum_n |\widehat{g}_n|^2 |n|^2 \int_0^1 \rho^{2|n|-1} d\rho = \pi \sum_n |\widehat{g}_n|^2 |n|.$$

Allo stesso modo:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\theta u = \sum_n \widehat{g}_n (in) \rho^{|n|-1} e^{in\theta},$$

e dopo calcoli analoghi a quelli precedenti si ricava finalmente:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\partial_\theta u|^2 d\theta \rho d\rho = 2\pi \sum_n |\widehat{g}_n|^2 |n|.$$

Quindi, grazie a questi calcoli espliciti, abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione 5.3. *Se la condizione al bordo g ammette mezza derivata, cioé $g \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$, allora la soluzione dell'equazione di Laplace bidimensionale é unica.*

Peró, in generale, se g é solo continua e in \mathcal{L}^1 , cioè $\sum_n |\widehat{f}_n| < +\infty$, non é vero che $\sum_n |n| |\widehat{f}_n|^2 < +\infty$; vediamo un controesempio.

Esempio (Hadamard). Consideriamo la successione:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & \text{se } |n| = 2^{2^m} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$c_n \in \ell^1$, perché é maggiorata da $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} < +\infty$, ma:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| |c_n|^2 = 2 \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{2^m} \frac{1}{(2^m)^2} = +\infty.$$

Quindi $f(x) = \sum_n c_n e^{inx} \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$.

Passiamo adesso al caso multidimensionale; vogliamo risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e $u \in C^2(\Omega)$.

Se ψ é una funzione armonica che dipende solo dal raggio ρ , sappiamo che:

$$\Delta\psi(\rho) = \psi''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}\psi'(\rho) = 0 \quad \forall \rho > 0,$$

cióé:

$$\psi(\rho) = \begin{cases} c_n \frac{\rho^{2-n}}{2-n} & \text{se } n > 2 \\ c_2 \ln(\rho) & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

e in ogni caso $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ($|\psi(\rho)| \rightarrow +\infty$ se $\rho \rightarrow 0$).

Sia ora $\xi \in \Omega$ e poniamo $v(x) = \psi(|x - \xi|)$. Sia inoltre $\varepsilon > 0$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(\xi, \varepsilon)}$; sappiamo che $v \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $\Delta v = 0$ in Ω_ε .

Per Gauss-Green:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta v dx = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} u dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla v dx, \quad -\int_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u dx = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla v dx,$$

$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$, quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (v \Delta u - u \underbrace{\Delta v}_{=0}) dx &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS + \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS. \end{aligned}$$

Osserviamo che, su $\partial B(\xi, \varepsilon)$, $\frac{\partial v}{\partial n} = -\psi'(\varepsilon)$, perció:

$$-\int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \psi'(\varepsilon) \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} u dS = c_n \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} u dS = \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} u dS \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(\xi),$$

se $c_n = \frac{1}{\omega_n}$, dove ω_n é la misura della sfera unitaria in \mathbb{R}^n .

D'altra parte notiamo che:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot 1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot 1 - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u \nabla 1}_{=0},$$

quindi l'altro integrale può essere stimato:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} v dS &= \psi(\varepsilon) \int_{\partial B(\xi, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = c'_n \varepsilon^{2-n} \int_{B(\xi, \varepsilon)} \Delta u dx = c'_n \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} \int_{B(\xi, \varepsilon)} \Delta u dx = \\ &= c''_n \varepsilon^2 \int_{B(\xi, \varepsilon)} \Delta u dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Visto che:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v \Delta u dx,$$

abbiamo mostrato:

Proposizione 5.4 (Formula integrale di rappresentazione). $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v(x) = \psi(|x - \xi|)$.

Allora:

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS + u(\xi).$$

Corollario 5.5. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è armonica, cioè $\Delta u = 0$, e $v(x) = \psi(|x - \xi|)$, allora:

$$u(\xi) = \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Osserviamo che siamo liberi di aggiungere e togliere costanti alla funzione $\psi(|x - \xi|)$ senza cambiare i risultati appena ottenuti; poniamo dunque $G(x, \xi) = \psi(|x - \xi|) - \psi(\rho)$. Tale funzione ha le proprietà:

$$\begin{cases} \Delta G(x, \xi) = 0 \\ G|_{\partial B(\xi, \rho)} = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi, \rho)} u \frac{\partial G}{\partial n} - \underbrace{G(x, \xi)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \psi'(\rho) \int_{\partial B(\xi, \rho)} u dS = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(\xi, \rho)} u dS = \int_{\partial B(\xi, \rho)} u dS$$

$\forall \rho < d(\xi, \partial \Omega)$. Abbiamo appena mostrato la cosiddetta **proprietà della media**:

Teorema 5.6. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica, $B(\xi, \rho) \subseteq \Omega$. Allora:

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi, \rho)} u dS.$$

Corollario 5.7. Il valore assunto da u armonica in un punto ξ è la media dei valori assunti in un disco di centro ξ , cioè:

$$u(\xi) = \int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx.$$

Dimostrazione. Per Fubini-Tonelli:

$$\int_{B(\xi, \rho)} u(x) dx = \int_0^\rho r^{n-1} \underbrace{\int_{\partial B(\xi, r)} u dS}_{=u(\xi)} dr = m(B(\xi, \rho)) u(\xi).$$

□

Prima di concentrarci sulla risoluzione dell'equazione di Laplace, studiamo se essa ammette un'unica soluzione; per farlo abbiamo bisogno di qualche altro risultato sulle funzioni armoniche.

Definizione 5.1. u si dice **subarmonica** se $\Delta u \geq 0$.

Osservazione. Per le funzioni subarmoniche ovviamente non vale la proprietà della media, ma vale qualcosa di più debole; con calcoli analoghi a prima si ha:

$$u(\xi) = \int_{B(\xi, \rho)} \underbrace{\Delta u}_{\geq 0} \underbrace{(\psi(|x - \xi|) - \psi(\rho))}_{\leq 0} + \int_{\partial B(\xi, \rho)} \frac{\partial G}{\partial n} u dS \leq \int_{\partial B(\xi, \rho)} u dS.$$

Osserviamo adesso che la soluzione dell'equazione di Laplace, pur essendo la descrizione di un processo fisico, può non esistere; il seguente è un controesempio. Per fortuna però tale patologia avviene solo in presenza di domini Ω che sono stati privati di qualche punto isolato.

Esempio (Zaremba). Sia $\Omega = B(0, 1) \setminus \{0\}$; il problema di Laplace con condizione al contorno:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| = 1 \\ 1 & \text{se } \|x\| = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzione. Se infatti $u(\rho)$ è una funzione armonica radiale (in quanto la soluzione di un problema con simmetria rotazionale deve avere la simmetria rotazionale), allora $u(\rho) = A \log(\rho) + B$, ma $B = 0$ per la condizione su $\{\|x\| = 1\}$ e dunque non riesco a imporre A affinché u faccia 0 nell'origine.

Teorema 5.8 (Principio del massimo). *Sia Ω aperto connesso, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica. Allora:*

1. $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = M$;
2. se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M$, allora $u \equiv M$.

Dimostrazione. Ovviamente il secondo punto è più forte del primo. Si ha:

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(x) dx \leq \frac{M m(B(x_0, r))}{m(B(x_0, r))} = M,$$

dunque $u \equiv M$ nella palla $B(x_0, r)$; segue che l'insieme $\{x \in \Omega \mid u(x) = M\} \neq \emptyset$ è aperto e chiuso in Ω , cioè è tutto Ω . \square

Con questo risultato possiamo stabilire l'unicità della soluzione dell'equazione di Laplace in un caso abbastanza generale:

Teorema 5.9. *Se Ω è un aperto limitato e connesso, allora la soluzione dell'equazione di Laplace è unica.*

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 due soluzioni e sia $U = |u_1 - u_2|$. U è armonica e vale 0 al bordo, quindi è 0 a tappeto per il principio del massimo. \square

Osservazione. Grazie al principio del massimo (e al principio del minimo, che afferma che il minimo si trova al bordo), si ottiene che se u è armonica e $u|_{\partial\Omega} = g$, allora:

$$\min_{\partial\Omega} g(x) \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} g(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Il principio del massimo non vale solo nel caso delle funzioni armoniche, ma si estende ad esempio anche a quelle subarmoniche; questo significa che con gli stessi ragionamenti appena fatti si può dimostrare l'unicità di soluzioni di equazioni differenziali molto più complessi.

Lemma 5.10. *Se $\Delta u > 0$, non possono esistere massimi di u in Ω .*

Dimostrazione. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ punto di massimo per u . Posto:

$$\phi(t) = u(x_0 + t, y_0), \quad \psi(t) = u(x_0, y_0 + t),$$

si ha che $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ e $\phi''(t), \psi''(t) \leq 0$. Ma allora $\Delta u(x_0, y_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + u_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$, assurdo. \square

Proposizione 5.11. *Se $\Delta u \geq 0$, il massimo di u su $\bar{\Omega}$ (Ω aperto limitato) é ottenuto nel bordo $\partial\Omega$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo $w(x, y) = u(x, y) + \varepsilon x^2$. Se $\bar{x} = (x_0, y_0)$ é punto di massimo per u con ascissa x_0 massima fra i punti di massimo, e $d(\bar{x}, \partial\Omega) = \delta$, allora preso $\varepsilon < \frac{c}{R\delta + \delta^2}$ (dove c é una costante opportuna che dipende da quanto decresce u negli x compresi fra $x_0 + \delta$ e R é tale che $\Omega \subseteq [-R, R]^2$), si ha che la funzione w ha un massimo interno a Ω . Ma questo é assurdo perché $\Delta w \geq 2\varepsilon > 0$. \square

Proposizione 5.12. *$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ armonica. Per ogni α tale che $|\alpha| = k$, vale la maggiorazione:*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{c_k}{r^{n+k}} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x_0, r))}.$$

In particolare:

$$c_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)},$$

dove $\alpha(n) = m(B(0, 1))$.

Dimostrazione. Supponiamo innanzitutto $\alpha = e_i$. Dalla formula di rappresentazione si ha:

$$|\partial_i u(x_0)| = \left| \int_{B(x_0, r/2)} \partial_i u(x) dx \right| = \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \left| \int_{B(x_0, r/2)} \partial_i u(x) dx \right|,$$

quindi per Gauss-Green, detto ν il versore esterno:

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \left| \int_{\partial B(x_0, r/2)} \partial_i u \nu_i dS \right| \leq \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \max_{\partial B(x_0, r/2)} |u| \omega_n \frac{r^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{r} n \max_{\partial B(x_0, r/2)} |u|.$$

Ma se $x \in \partial B(x_0, r/2)$, $B(x, r/2) \subseteq B(x_0, r)$ e grazie alla formula di rappresentazione si ha:

$$|u(x)| \leq \frac{c}{r^n} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x, r/2))} \leq \frac{c}{r^n} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x_0, r))}.$$

A questo punto una semplice induzione ci permette di concludere. \square

Corollario 5.13. *Ogni funzione armonica é analitica.*

Corollario 5.14 (Teorema di Liuville). *Ogni $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ armonica limitata é costante.*

Dimostrazione. Preso $\alpha = e_i$, si ha $\forall r > 0$:

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{c_1}{r^{n+1}} \|u\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{c_1}{r^{n+1}} \frac{\omega_n}{n} r^n \max_{B(x_0, r)} u \leq \frac{c'}{r},$$

quindi $\partial_i u(x_0) = 0 \forall i$. \square

Arrivati a questo punto, prima di giungere a soluzioni esplicite (in casi particolari) per l'equazione di Laplace, abbiamo bisogno di qualche cenno alla teoria degli **integrali singolari**; l'esempio principe che spinge a studiare questi integrali é:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx.$$

Come ben sappiamo, questo integrale non ha senso perché non é convergente; ma se consideriamo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon} \frac{1}{x} dx,$$

questo limite esiste ed é 0 in quanto l'integrale vale 0 $\forall \varepsilon$. Osservato questo esempio, proviamo a generalizzare l'idea a integrali piú complessi.

Osservazione. La funzione $f(x) = \frac{1}{|x|^k}$ con $x \in \mathbb{R}^n$ é integrabile vicino a 0 $\iff k < n$. Infatti, passando in coordinate sferiche:

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} f(x) = c \int_0^\varepsilon \frac{1}{\rho^k} \rho^{n-1} = c \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \frac{1}{\rho^{1+k-n}}.$$

Esempio. Consideriamo il problema di Poisson $\Delta u = f$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con f a supporto compatto. Vogliamo vedere che la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \int \frac{f(y)}{|x-y|} dy = f(x) * \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|}$$

é soluzione del problema. Per calcolare Δu , abbiamo bisogno che $\Delta \frac{1}{|x-y|}$ sia ben definito e integrabile; si ha:

$$\partial_i \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-1/2} = -\frac{x_i - y_i}{|x - y|^3}$$

e:

$$\begin{aligned} \partial_j \partial_i \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-1/2} &= - \left(\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^3} - \frac{3}{2} (x_i - y_i) \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-5/2} 2(x_j - y_j) \right) = \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^3} + \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^5}. \end{aligned}$$

Ma allora $\Delta \frac{1}{|x-y|}$ va come $\frac{1}{|x-y|^3}$, che non sta in $\mathcal{L}^1(B(0, R))$, quindi u definita precedentemente non é una soluzione del problema in senso classico. Vediamo come sfruttare gli integrali singolari per risolvere il problema.

Data $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$, definiamo **potenziale newtoniano** di f la funzione:

$$\omega(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

Lemma 5.15. *Vale la formula:*

$$\partial_i \omega(x) = \int_{\Omega} f(y) \partial_i \frac{1}{|x-y|} dy.$$

Dimostrazione. Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta(x) = 0$ se $x \leq 1$, $\eta(x) = 1$ se $x \geq 2$ e $0 \leq \eta' \leq 2$; poniamo inoltre $\eta_\varepsilon = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Vogliamo vedere che, detti:

$$\omega_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} \eta_\varepsilon(|x-y|), \quad v(x) = \int_{\Omega} f(y) \partial_i \frac{1}{|x-y|} dy,$$

allora $v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$. Abbiamo:

$$v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_i \left(\frac{1 - \eta_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|} \right) f(y) dy,$$

quindi:

$$|v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x)| \leq \sup |f| \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_i \frac{1}{|x-y|} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} dy \leq \sup |f| 4\pi \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho\varepsilon} \right) < c\varepsilon,$$

(ho fatto un cambio di variabili $\rho = |x-y|$ e ρ^2 é il determinante del Jacobiano), e fuori da $\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon$ le due funzioni sono evidentemente uguali. \square

Osservazione. Il ragionamento precedente non si può applicare alla derivata seconda di $\omega(x)$, in quanto la derivata seconda di $|x|^{2-n}$ é $|x|^{-n}$ che non é integrabile.

Supponiamo adesso Ω compatto e $\Omega \Subset \Omega_0$ compattamente incluso (ad esempio $d(\Omega, \Omega_0) > 1$); inoltre, se f é una funzione definita su Ω , indichiamo con f anche la funzione che vale f su Ω e 0 fuori.

Poniamo inoltre $\psi(\rho) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \rho^{2-n}$, in modo che:

$$\omega(x) = \int \psi(|x-y|) f(y) dy$$

sia il potenziale newtoniano (a meno di costanti). Grazie al lemma precedente, generalizzando al caso $n > 3$ si ottiene in maniera analoga:

$$\partial_i \omega(x) = \int_{\Omega} \partial_i \psi(|x-y|) f(y) dy.$$

Proposizione 5.16. *Sia $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$; allora:*

$$\partial_{ji} \omega(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ji} \psi(|x-y|) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \psi(|x-y|) \nu_j dS,$$

dove ν é il vettore normale alla superficie. In particolare (in questo senso) $\omega(x) \in C^2(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia η_ε come nel lemma. Poniamo:

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \partial_i \psi(|x-y|) \eta_\varepsilon(|x-y|) f(y) dy.$$

L'integrale:

$$\partial_j v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \partial_j (\partial_i \psi \eta_\varepsilon) f(y) dy$$

é ben definito, quindi può essere esteso a Ω_0 senza alterarne il valore. In particolare:

$$\partial_j v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_0} \partial_j (\partial_i \psi \eta_\varepsilon) (f(y) - f(x) + f(x)) dy = \underbrace{\int_{\Omega_0} \partial_j (\partial_i \psi \eta_\varepsilon) (f(y) - f(x)) dy}_{=A} + \underbrace{f(x) \int_{\Omega_0} \partial_j (\partial_i \psi \eta_\varepsilon) dy}_{=B}.$$

Studiamo separatamente i due integrali:

$$B = -f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \psi \eta_\varepsilon \nu_j dS \rightarrow -f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \psi (|x-y|) \nu_j dS,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (usando Gauss-Green); invece:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_j ((1-\eta_\varepsilon) \partial_i \psi) (f(y) - f(x)) dy \right| \leq \\ & \leq \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon} \left(\underbrace{|\partial_j \eta_\varepsilon|}_{\leq \frac{c_1}{\varepsilon}} \underbrace{|\partial_i \psi|}_{\leq \frac{c_2}{|x-y|^{n-1}}} + |(1-\eta_\varepsilon)| \underbrace{|\partial_{ji} \psi|}_{\leq \frac{c_3}{|x-y|^n}} \right) \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\leq c_4 |x-y|^\alpha} dy \leq \\ & \leq c\varepsilon^{\alpha/2} \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha/2}} dy \leq c'\varepsilon^{\alpha/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Visto che fuori da $\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon$ c'è regolarità di tutte le funzioni e $\eta_\varepsilon \equiv 1$, si ha la tesi. \square

A questo punto, visto che siamo riusciti a motivare l'esistenza di $\Delta\omega$, possiamo scrivere:

$$\Delta \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n} \omega(x) \right) = \int_{\Omega_0} \Delta \psi (|x-y|) f(y) dy = \int_{\Omega_0} \delta(|x-y|) f(y) dy = f(x),$$

cioè $\frac{1}{(2-n)\omega_n} \omega(x)$ è effettivamente la soluzione del problema di Poisson quando $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ritorniamo al problema di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

e proviamo a risolvere il caso $\Omega = B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma 5.17. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vale la relazione:*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\|.$$

Dimostrazione. Basta dimostrarlo per vettori unitari per linearità. Ma per quelli è ovvio. \square

Sia dunque $x \in B = B(0, R)$; definiamo $\bar{x} = \frac{R^2}{\|x\|^2} x$. Riprendiamo la notazione:

$$\psi(|x-y|) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Se riesco a trovare una $G = \psi(|x-y|) + h$, con h armonica, tale che $G|_{\partial B} = 0$, avrei per la formula di rappresentazione:

$$u(x) = \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} u(y) dS - \underbrace{\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} G dS}_{=0} = \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} g(x) dS.$$

Affermo che la funzione G cercata è:

$$G(x, y) = \frac{1}{\omega_n(2-n)} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - c \frac{1}{|x-\bar{y}|^{n-2}} \right),$$

con c costante da determinare.

Per il lemma precedente, se $\|x\| = R$:

$$\begin{aligned}\|x - \bar{y}\| &= \left\| x - \frac{R^2}{\|y\|^2} y \right\| = R \left\| \frac{x}{R} - \frac{R}{\|y\|^2} y \right\| = R \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{\|x\|}{\|y\|^2} y \right\| = R \left\| \frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\| \frac{y}{\|y\|^2} \right\|} - \left\| \frac{y}{\|y\|^2} \right\| x \right\| = \\ &= R \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|y\|} \right\| = \frac{R}{\|y\|} \|x - y\|,\end{aligned}$$

dunque se $c = \left(\frac{R}{\|y\|}\right)^{n-2}$, G fa 0 sul bordo.

A questo punto, derivando G , con lunghi calcoli si arriva alla soluzione del problema di Laplace:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} g(y) dy = g(x) * P(x),$$

dove $P(x, y) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}$ é il **nucleo di Poisson**.

Vogliamo vedere adesso che effettivamente $u(x) \rightarrow g(x)$ quando $|x| \rightarrow R$.

L'integrale di $P(x, y)$ su ∂B é la soluzione del problema di Laplace con $g \equiv 1$. Quindi, per unicitá della soluzione, dovremmo avere che $\int_{\partial B} P(x, y) dy = 1$.

Lemma 5.18. *Vale:*

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} dy = 1.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che v é armonica, in quanto é un caso particolare di u ; dunque, $\forall 0 < r < R$:

$$\int_{\partial B(0,r)} v(x) dx = v(0) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2}{|y|^n} dy = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2}{R^n} dy = \frac{\mu(\partial B)}{\omega_n R^{n-1}} = 1.$$

Vediamo adesso che $v(x) = v(|x|)$ é radiale (e avremmo la tesi); questo segue dal fatto che, se $|x_1| = |x_2|$, esiste una rotazione che porta x_1 in x_2 e lascia invariato ∂B . \square

Siamo ora pronti per dimostrare che la formula trovata per u é effettivamente la soluzione del problema di Laplace.

Proposizione 5.19. *Sia $x_0 \in \partial B$; allora:*

$$u(x) \rightarrow g(x_0) \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

Dimostrazione. Visto che abbiamo dimostrato che l'integrale del nucleo di Poisson é 1, si ha:

$$\begin{aligned}u(x) - g(x_0) &= \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} (g(y) - g(x_0)) dy = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|x-y| \leq \delta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \underbrace{(g(y) - g(x_0))}_{< \varepsilon} dy + \\ &+ \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|x-y| > \delta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \underbrace{(g(y) - g(x_0))}_{\leq 2\|g\|} dy < \frac{\varepsilon}{\omega_n R} + c(R^2 - |x|^2) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $x \rightarrow x_0$. \square

Diamo solo un accenno a come si potrebbe risolvere il problema di Laplace in un aperto generico $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sia $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ subarmonica; prendiamo $x \in \Omega$ e consideriamo una palla $B = B(x, r) \subseteq \Omega$; definiamo:

$$u_1 = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \setminus B \\ u * P & \text{in } B \end{cases}$$

dove P é il nucleo di Poisson. Cambiando $x \in \Omega$ e prendendo l'estremo superiore di tutte le funzioni cosí ottenute, si puó mostrare che si ottiene la soluzione voluta.

In una dimensione, questo ragionamento é molto semplice da capire: supponiamo di voler trovare la funzione armonica che congiunge i punti (a, α) e (b, β) ; come abbiamo giá visto, essa é il segmento congiungente.

Se u é una qualunque funzione subarmonica (cioé convessa) che unisce i due punti, consideriamo $a < x_1 < x_2 < b$ e, (supponendo di saper risolvere il problema fra x_1 e x_2), lo risolviamo in $[x_1, x_2]$ (cioé uniamo x_1 e x_2 con un segmento), ottenendo una nuova funzione u_1 ancora subarmonica. Iterando questo ragionamento, la soluzione voluta (cioé il segmento) non é altro che l'estremo superiore di tutte queste funzioni ottenibili risolvendo il problema in $[x_1, x_2]$ e variando x_1, x_2 .

6 La trasformata di Fourier

Proposizione 6.1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $\{\varphi_n\}$ ortonormale base Hilbertiana di $\mathcal{L}^2(A)$, $\{\psi_n\}$ ortonormale base Hilbertiana di $\mathcal{L}^2(B)$. Allora, posto $f_{nm}(x, y) = \varphi_n(x)\psi_m(y)$, $\{f_{nm}\}$ é base ortonormale di $\mathcal{L}^2(A \times B)$.

Dimostrazione. Sicuramente sono ortonormali, perché:

$$\int_{A \times B} f_{nm} \overline{f_{n'm'}} dx dy = \int_A \int_B \varphi_n(x) \overline{\varphi_{n'}(x)} \psi_m(y) \overline{\psi_{m'}(y)} dx dy = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

É anche base perché, presa $f \in \mathcal{L}^2(A \times B)$, se $\langle f, f_{nm} \rangle_{\mathcal{L}^2(A \times B)} = 0 \forall n, m$, allora $f \equiv 0$ q.o.; infatti, denotata $F_n(y) = \int_A f(x, y) \varphi_n(x) dx$, si ha che che sta in $\mathcal{L}^2(B)$:

$$\int_B |F_n(y)|^2 dy \leq \int_B \left(\int_A |f(x, y)|^2 dx \right) \left(\int_A |\overline{\varphi_n}|^2 dx \right) dy,$$

e:

$$\int_B F_n(y) \overline{\psi_m(y)} dy = \int_{A \times B} f \overline{\varphi_n(x) \psi_m(y)} dx dy = 0,$$

dunque per completezza delle ψ_m $F_n(y) \equiv 0$ q.o., quindi per completezza delle φ_n si conclude $f \equiv 0$ q.o. \square

Osservazione. Si ha dunque che $\left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} e^{i(k, x)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é base Hilbertiana e ortonormale di $\mathcal{L}^2((-\pi, \pi)^n)$.

Corollario 6.2. $\{\varphi_n\}_n$ base ortonormale di $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, $\{\psi_{m,n}\}_m$ base ortonormale di $\mathcal{L}^2(B)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Allora $\{\varphi_n(x) \cdot \psi_{m,n}(y)\}_{m,n}$ é base ortonormale di $\mathcal{L}^2((-\pi, \pi) \times B)$.

Sia $f \in C^1$ periodica su $[-l, l]$; per la formula di addizione del coseno, in analogia al caso $l = \pi$ é facile vedere che:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{l}(t-x)\right) dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Sia inoltre $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; prendendo il limite per $l \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a_\lambda \cos(\lambda x) + b_\lambda \sin(\lambda x)) d\lambda;$$

in particolare, se $F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt$:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx}_{=0} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\pi}{l}}_{=\Delta\lambda} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{l}(t-x)\right) dt = \sum \Delta\lambda F(\lambda_k),$$

dunque al limite:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda t) dt, \quad b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt.$$

Si giunge finalmente alla formula:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt \right) d\lambda.$$

Ma questa formula in quali casi ha senso, cioè quando effettivamente l'integrale vale $f(x)$?

Lemma 6.3. Per ogni $A > 0$, vale:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che, a meno di un cambio di variabili, si può supporre $A = 1$. Dalla teoria del nucleo di Dirichlet, sappiamo che:

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)z)}{\sin(z/2)} dz = \pi.$$

Poniamo:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t/2} - \frac{1}{\sin(t/2)} & \text{se } 0 < t \leq \pi \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

g é continua in $[0, \pi]$, quindi per Riemann-Lebesgue:

$$0 \leftarrow \int_0^\pi g(t) \sin((n+1/2)t) dt = \int_0^\pi \left(\frac{\sin((n+1/2)t)}{t/2} - \underbrace{\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}}_{=\pi} \right) dt,$$

da cui:

$$\pi \leftarrow 2 \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{t} dt = 2 \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx,$$

cioé la tesi. □

Teorema 6.4. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la scrittura formale precedente é esatta, cioé:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt \right) d\lambda.$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\begin{aligned} I(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \int_0^A \cos(\lambda(t-x)) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \left[\frac{\sin(\lambda(t-x))}{t-x} \right]_0^A. \end{aligned}$$

Se $t-x = z$:

$$\begin{aligned} I(A) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x+z) \frac{\sin(Az)}{z} dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(Az)}{z} dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(x+z) - f(x)) \frac{\sin(Az)}{z} dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\underbrace{\int_{-N}^N (f(x+z) - f(x)) \frac{\sin(Az)}{z} dz}_{\rightarrow 0 \text{ se } A \rightarrow \infty \text{ per Riemann-Lebesgue}} + \underbrace{\int_{|z|>N} f(x+z) \frac{\sin(Az)}{z} dz}_{< \|f\| \varepsilon} - f(x) \underbrace{\int_{|z|>N} \frac{\sin(Az)}{z} dz}_{< \varepsilon} \right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $A \rightarrow \infty$. □

Per disparitá del seno, si può scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} f(t) \cos(\lambda(t-x)) dt - i \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N d\lambda \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(\lambda(t-x)) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(\lambda(t-x))} dt. \end{aligned}$$

Definizione 6.1. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, definisco **trasformata di Fourier** di f :

$$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t} dt.$$

Proposizione 6.5. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Basta osservare che $|\widehat{f}(\lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{\mathcal{L}^1}$. □

Vedremo in seguito come ci aiuta la trasformata di Fourier a risolvere molte equazioni differenziali; per ora introduciamo qualche concetto base.

Esempio. Dato il problema di Cauchy 1-dimensionale:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

osserviamo subito che $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) = f(t_0, y_0)$ e che:

$$y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))y'(t), \quad \text{quindi} \quad y''(t_0) = f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0).$$

Procedendo ricorsivamente e usando la scrittura:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k,$$

si trova la soluzione in un intorno di t_0 se il raggio di convergenza R é positivo.

In piú dimensioni, il problema precedente diventa molto piú complesso: l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} u(x, y) = F \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right),$$

in \mathbb{R}_+^2 date le condizioni iniziali $u(x, 0), u_y(x, 0), \dots, \partial_y^{n-1} u(x, 0)$, con $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $|\alpha| < n$, é in alcuni casi addirittura mal posto. Un problema si dice **ben posto secondo Hadamard** se la sua soluzione esiste, é unica e dipende in modo continuo dai dati.

Un importante teorema, conosciuto come teorema di Cauchy-Kowalewski, asserisce che il problema precedente é ben posto secondo Hadamard intorno a 0 se la funzione F e le condizioni iniziali sono analitiche; ad esempio, un possibile modo per risolvere il problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^2 = \{y \geq 0\} \\ u(x, 0) = g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

potrebbe essere il seguente: $\partial_y^2 u = -\partial_x^2 u = -g''(x)$, mentre:

$$u_{yyy} = (u_{yy})_y = -u_{xxy} = -(u_y)_{xx} = -h''(x),$$

dunque iterando e sfruttando la scrittura:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_y^k u(x, 0)}{k!} y^k,$$

avremmo trovato una soluzione del problema. Vediamo però che in alcuni casi il calcolo precedente é solo formale.

Esempio. Supponiamo di voler risolvere il problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^2 = \{y \geq 0\} \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

Separando le variabili, dall'equazione $X'' + Y'' = 0$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' - \lambda Y = 0 \end{cases}$$

dunque $X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ e $Y = Ce^{\sqrt{-\lambda}y} + De^{-\sqrt{-\lambda}y}$. Imponendo le condizioni iniziali, é facile vedere che la soluzione risulta essere:

$$u(x, y) = \frac{\sin(nx)}{n^2} \left(\frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \right) = \frac{\sin(nx)}{n^2} \sinh(ny).$$

Visto che $|u(x, 0)| + |\partial_y u(x, 0)| \leq \frac{1}{n}$, necessariamente anche la soluzione dovrà andare a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Ma se $x_n = \frac{\pi}{2n}$ e $y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x_n$, $u(x_n, y_n) \simeq \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Questo mostra che in generale il problema precedente é mal posto secondo Hadamard; un modo per renderlo ben posto potrebbe essere quello di imporre $u(x, y) \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow \infty$, cioè mettere la condizione al contorno in tutto il bordo di \mathbb{R}_+^2 .

Riprendiamo la trattazione della trasformata di Fourier.

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier di e^{-x^2} :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ix\xi} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x\xi) dx.$$

Ma visto che:

$$\widehat{f}'(\xi) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} (-x) \sin(x\xi) dx = \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) \sin(x\xi) dx = [e^{-x^2} \sin(x\xi)]_0^{\infty} - \xi \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x\xi) dx,$$

si deduce che $\frac{\widehat{f}'(\xi)}{\widehat{f}(\xi)} = -\frac{\xi}{2}$, dunque $\frac{d}{d\xi} (\log(\widehat{f}(\xi))) = -\frac{\xi}{2}$, da cui $\log(\widehat{f}(\xi)) = -\frac{\xi^2}{4}$ e cioè $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4}} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

Puó essere utile l'uguaglianza:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Osservazione. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la trasformata di Fourier $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ é continua e va a 0 all'infinito (si denota $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$).

Infatti sicuramente é continua:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{(e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x})}_{< \varepsilon} dx < \varepsilon \|f\|_{\mathcal{L}^1};$$

inoltre é facile vedere che la trasformata va a 0 all'infinito nel caso $f = \chi_{[a,b]}$:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]} e^{-i\xi x} dx = \int_a^b e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{i\xi} \rightarrow 0$$

quando $|\xi| \rightarrow \infty$; se in generale $f \in \mathcal{L}^1$, la approssimo con funzioni semplici e grazie a Beppo-Levi si conclude $\widehat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Corollario 6.6. Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora \widehat{f} é uniformemente continua.

Dimostrazione. Per Heine-Cantor ogni funzione continua con limiti finiti é uniformemente continua. \square

Definiamo adesso la **trasformata inversa di Fourier**; é in un certo senso naturale la definizione:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Ci poniamo il problema di quando ha senso questa scrittura, cioé quando l'integrale esiste e quando effettivamente coincide con $f(x)$. L'integrale ha sempre senso, perché se $f \in \mathcal{L}^1$, allora $\widehat{f} \in \mathcal{L}^\infty$; come primo risultato abbiamo:

Proposizione 6.7. Se $f \in \mathcal{L}^1 \cap C^1$, allora $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$.

Dimostrazione. Si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} e^{ix\xi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-x)\xi} d\xi dt,$$

e sfruttando il fatto che $\int_{\mathbb{R}} e^{-ia\xi} d\xi = 2\pi\delta(a)$, dove δ é la delta di Dirac, abbiamo:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} e^{ix\xi} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t-x) dt = f(x).$$

\square

In analogia con le serie di Fourier, vorremmo estendere la trasformata inversa anche alle funzioni C^0 ; abbiamo prima bisogno di un lemma.

Lemma 6.8. $f \in \mathcal{L}^1(-T, T)$, $I(T) = \int_{-T}^T f(t) dt \rightarrow a$ quando $T \rightarrow \infty$. Allora:

$$J(T) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) f(t) dt \rightarrow a.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\frac{1}{T} \int_0^T I(u) du = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-u}^u f(t) dt du = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \int_{|t|}^T du dt = \int_{-T}^T f(t) \frac{T-|t|}{T} dt = J(T),$$

ma $I(u)$ converge, quindi $\forall \varepsilon > 0, \exists M$ tale che $\forall T > M, |I(T) - a| < \varepsilon$, quindi:

$$\begin{aligned} |J(T) - a| &= \left| \frac{1}{T} \int_0^T I(u) du - a \right| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T (I(u) - a) du \right| = \left| \frac{1}{T} \int_0^M \underbrace{(I(u) - a)}_{\leq c} du \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{T} \int_M^T (I(u) - a) du \right| < \frac{cM}{T} + \varepsilon \left(\frac{T-M}{T} \right), \end{aligned}$$

cioé la tesi. \square

Proposizione 6.9. $f \in C^0(\mathbb{R})$. Allora $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$, dove \mathcal{F} é l'operatore trasformata di Fourier e \mathcal{F}^{-1} antitrasformata di Fourier.

Dimostrazione. É facile, sfruttando il lemma precedente, vedere che:

$$\int_{-N}^N \left(1 - \frac{|\xi|}{N}\right) \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x-z) k_N(z) dz = f * k_N(x),$$

dove:

$$k_N(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left(1 - \frac{|\xi|}{N}\right) e^{iz\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\sin(Nz/2)}{\sin(z/2)}\right)^2.$$

Osservato che k_N é una successione di Dirac, segue subito la tesi. \square

Teorema 6.10. *Se $f, \widehat{f} \in \mathcal{L}^1$, allora $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$ quasi ovunque. Se f é continua in x , allora $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$.*

Dimostrazione. Poiché $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

dunque passando grazie al lemma a $J(T)$ (che converge alla stessa cosa) si ha la tesi. \square

Corollario 6.11. *Se $f_1, f_2, \widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \mathcal{L}^1$ e $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$, allora $f_1 = f_2$ quasi ovunque.*

L'operatore trasformata di Fourier puó essere esteso anche a funzioni a piú variabili nel modo naturale:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

Esempio. Calcoliamo la trasformata di Fourier di $e^{-\|x\|^2}$. Osserviamo innanzitutto che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Denotiamo $\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+is)^2} dx$. Si ha:

$$\varphi'(s) = i \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+is)^2} (-2(x+is)) dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} e^{-(x+is)^2} dx = 0,$$

dunque $\varphi \equiv \sqrt{\pi}$. $\|x\|^2 + i\langle x, \xi \rangle = \langle x + i\frac{\xi}{2}, x + i\frac{\xi}{2} \rangle + \frac{\|\xi\|^2}{4}$, perciò:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x+i\frac{\xi}{2}\|^2} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}} dx = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4}} \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Le seguenti proprietá sono immediate:

Teorema 6.12. *Sia $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Allora:*

1. *Se $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{L}^1 , allora $\widehat{f}_n \rightarrow \widehat{f}$ in \mathcal{L}^∞ .*
2. *$\|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}$.*
3. *$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$.*
4. *$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$.*
5. *Se $\tau_h(f)(x) = f(x-h)$, allora $\widehat{\tau_h f} = e^{-i\xi h} \widehat{f}(\xi)$.*

6. $e^{ihx} \widehat{f(x)}(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.

7. Se $\sigma_\delta f(x) = \frac{1}{\delta} f\left(\frac{x}{\delta}\right)$, allora $\widehat{\sigma_\delta f(x)}(\xi) = \widehat{f}(\delta\xi)$.

8. Se anche $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, allora $\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) = -ix \widehat{f(x)}(\xi)$.

A volte può essere utile considerare lo **spazio di Schwartz**:

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{L}^1 \mid x^m D^k f(x) \rightarrow 0 \text{ per } |x| \rightarrow \infty, \forall k, m\}.$$

Teorema 6.13. Se $f \in C^1 \cap \mathcal{L}^1$ e $f' \in \mathcal{L}^1$, allora $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$.

Dimostrazione. Vediamo subito che $f(x) \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, in quanto $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ ha limite per $|x| \rightarrow \infty$ e tale limite deve essere 0 perché $f \in \mathcal{L}^1$; ma allora integrando per parti:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi} dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)(-i\xi)e^{-ix\xi} dx = i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

□

Proposizione 6.14. $f, g \in \mathcal{L}^1$. Allora $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

Dimostrazione. Direttamente:

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)e^{-ix\xi} dx = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy e^{-ix\xi} dx = \iint f(x-y)e^{-i(x-y)\xi} g(y)e^{-iy\xi} dx dy,$$

da cui la tesi cambiando variabili. □

Proposizione 6.15. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \widehat{f}(\xi) = i\xi_k \widehat{f}(\xi), \quad \frac{\partial}{\partial \xi_k} \widehat{f}(\xi) = -ix_k \widehat{f(x)}(\xi).$$

Proposizione 6.16. Se $A \in O(n)$, allora:

$$\widehat{f \circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi).$$

Dimostrazione. Grazie al cambio di variabili $y = Ax$ e sfruttando che $|\det(A)| = 1$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y, A\xi \rangle} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i\langle y, A\xi \rangle} dy.$$

□

Corollario 6.17. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ radiale, cioè $f = f(\|x\|)$. Allora anche $\widehat{f}(\xi)$ é radiale.

Dimostrazione. Se $\|\xi_1\| = \|\xi_2\|$, allora $\xi_1 = A\xi_2$ per una certa $A \in O(n)$. Perciò:

$$\widehat{f}(\xi_1) = \widehat{f}(A\xi_2) = \widehat{f \circ A}(\xi_2) = \widehat{f}(\xi_2).$$

□

Osservazione. Sia $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $f = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \partial^\alpha u$. Allora:

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{\alpha} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha u} = \sum_{\alpha} a_\alpha (i\xi)^{|\alpha|} \widehat{u}(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi),$$

dunque se $P(\xi) \neq 0$, $\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(\xi)}$ e $u(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{P(\xi)} \right)$.

Esempio. Si ha:

$$\widehat{\Delta u} = \sum_{k=1}^n (i\xi_k)^2 \widehat{u}(\xi) = - \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \widehat{u}(\xi) = -\|\xi\|^2 \widehat{u}(\xi).$$

Quindi, per risolvere il problema di Poisson $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n , per quanto visto potevamo ragionare:

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\|\xi\|^2} \Rightarrow u(x) = f(x) * \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\|\xi\|^2} \right).$$

Calcolato che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|\xi\|^2} e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi = c_n |x|^{2-n},$$

(ma non é banale, perché $|\xi|^{-2} \notin \mathcal{L}^1$), concludiamo (come già visto) che $u(x) = c_n f(x) * |x|^{2-n}$.

Il nostro obiettivo adesso é generalizzare l'operatore trasformata di Fourier a tutte le funzioni in \mathcal{L}^2 , sfruttando le proprietà di \mathcal{L}^2 in quanto spazio di Hilbert.

Lemma 6.18. $f, g \in \mathcal{L}^1$. Allora $\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$, dove:

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx.$$

Dimostrazione. Visto che $f(x)g(\xi) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, usando Fubini-Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \overline{g(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{g(\xi)} e^{ix\xi} d\xi dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \check{g} dx.$$

□

A questo punto l'idea é approssimare $f \in \mathcal{L}^2$ tramite una successione f_n di funzioni abbastanza regolari tali che $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{L}^2 e definire \widehat{f} come il limite delle \widehat{f}_n . Per aumentare la regolarità, come al solito, si usa la convoluzione con le gaussiane.

Sia $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ e $G_\delta(x) = \frac{1}{\delta} G\left(\frac{x}{\delta}\right)$ per $\delta > 0$; poniamo inoltre $f_\delta = f * G_\delta$. Se é ben definita \widehat{f} , allora $\widehat{f}_\delta = \widehat{f} \cdot \widehat{G}_\delta$, e sappiamo che $\widehat{G}_\delta(\xi) = e^{-\frac{\delta^2 \xi^2}{2}}$.

Lemma 6.19. $f, \widehat{f} \in \mathcal{L}^1$. Allora $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * G_\delta)) = f * G_\delta$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Usando ancora Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \widehat{f * G_\delta}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f * G_\delta} e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \widehat{G_\delta}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} \widehat{G_\delta}(\xi) e^{-i\xi(t-x)} d\xi dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \check{\widehat{G_\delta}}(x-t) dt = (f * G_\delta)(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 6.20. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. Allora $f * G_\delta \rightarrow f$ in \mathcal{L}^p quando $\delta \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, cambiando variabili:

$$f * G_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) G\left(\frac{y}{\delta}\right) \frac{dy}{\delta} = \int_{\mathbb{R}} f(x-\delta z) G(z) dz.$$

Inoltre:

$$f * G_\delta(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-\delta z) G(z) dz - f(x) \int_{\mathbb{R}} G(z) dz = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\delta z) - f(x)) G(z) dz.$$

A questo punto, usando la disuguaglianza di Holder:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} |(f * G_{\delta})(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x - \delta z) - f(x)) G(z) dz \right|^p dx = \\
& = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x - \delta z) - f(x)) G(z)^{\frac{1}{p}} G(z)^{\frac{1}{p'}} dz \right|^p dx \leq \\
& \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - \delta z) - f(x)|^p G(z) dz \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} G(z) dz \right)^{\frac{p}{p'}} \right] dx = \\
& = \int_{|z| \leq M} \int_{\mathbb{R}} |f(x - \delta z) - f(x)|^p G(z) dx dz + \int_{|z| > M} \int_{\mathbb{R}} |f(x - \delta z) - f(x)|^p G(z) dx dz < \varepsilon + 2\|f\|_{\mathcal{L}^p}^p \varepsilon,
\end{aligned}$$

per δ abbastanza piccolo. □

Osservazione. La precedente dimostrazione funziona analogamente per ogni funzione $G \in \mathcal{L}^1$, $G \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} G = 1$, ponendo come sopra $G_{\delta} = \sigma_{\delta} G$.

Teorema 6.21 (di Plancherel). *Se $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$, allora $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 2\pi\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2$.*

Dimostrazione. Ponendo $g = \widehat{f * G_{\delta}}$, applichiamo il primo lemma e otteniamo:

$$\langle \widehat{f}, \widehat{f} \cdot \widehat{G_{\delta}} \rangle = \langle f, \widehat{f * G_{\delta}} \rangle = 2\pi \langle f, f * G_{\delta} \rangle$$

quasi ovunque, dunque, visto che il prodotto scalare é continuo, se $\delta \rightarrow 0$ si ha:

$$2\pi \langle f, f * G_{\delta} \rangle = 2\pi \langle f, f \rangle = 2\pi \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

Ma visto che la funzione $|\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\frac{\delta^2 \xi^2}{2}}$ cresce se $\delta \rightarrow 0$, allora per Beppo-Levi:

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{-\frac{\delta^2 \xi^2}{2}} d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

□

A questo punto siamo in grado di estendere la trasformata di Fourier a funzioni solo in \mathcal{L}^2 ; sia dunque $f \in \mathcal{L}^2$.

Detta $f_N(x) = f(x)\chi_{[-N, N]}(x) \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$, per il teorema di Plancherel si ha che $\|\widehat{f}_N\|^2 = 2\pi\|f_N\|^2$; ma $f_N \rightarrow f$ in \mathcal{L}^2 , quindi la successione \widehat{f}_N é di Cauchy in \mathcal{L}^2 :

$$\|\widehat{f}_N - \widehat{f}_M\|^2 = \|\widehat{f_N - f_M}\|^2 = 2\pi\|f_N - f_M\|^2 \rightarrow 0$$

quando $N, M \rightarrow \infty$. Ma allora esiste $g(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tale che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{f}_N(\xi) = g(\xi);$$

si definisce perciò $\widehat{f}(\xi) := g(\xi)$.

É immediato constatare che se $f \in \mathcal{L}^1$ la definizione é la stessa data a suo tempo.

Osservazione. Rimane vera la proprietá che, se $f \in C^1$, $\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$.

Infatti, se $f_{\delta} = f * G_{\delta}$, $f'_{\delta} = f' * G_{\delta}$ e dunque $\widehat{f}_{\delta} = \widehat{f} \cdot \widehat{G_{\delta}} = i\xi \widehat{f * G_{\delta}}$, quindi passando al limite si ha la tesi.

Esempio. La trasformata di Fourier di 1 non ha senso per quello che abbiamo visto; un modo per ragionare con essa può essere passare alle distribuzioni e provare a fare il prodotto scalare di $\widehat{1}$ con una funzione test $\varphi \in C_0^\infty$:

$$\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} dx dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (2\pi) \delta(t) dt = 2\pi \varphi(0),$$

dunque $\langle \widehat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle$, che non è altro che una valutazione di φ in un punto (a meno di una costante), quindi $\widehat{1} = 2\pi \delta$ di Dirac.

In effetti, facendo il limite per $\delta \rightarrow 0$ di \widehat{G}_δ (che equivale a fare la trasformata di Fourier della delta di Dirac), si ottiene una costante.

Grazie a questa teoria svolta sulla trasformata di Fourier, riusciamo a risolvere completamente l'equazione del calore in modo rapido.

Consideriamo l'equazione del calore:

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0 & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Facciamo la trasformata di Fourier della funzione $u(t, x)$ rispetto alla x :

$$\widehat{u}(t, \xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx;$$

Supponendo la u abbastanza regolare (ad esempio $u \in C^2 \cap \mathcal{L}^\infty$) si può scrivere:

$$\widehat{u}_t(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} u_t(t, x) e^{-ix\xi} dx = \partial_t \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx = \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$$

e:

$$\widehat{u}_{xx}(t, \xi) = -\xi^2 \widehat{u}(t, \xi),$$

quindi si può riscrivere l'equazione del calore sotto forma di problema con la trasformata:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} = -\xi^2 \widehat{u} \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

Ma fissando ξ come parametro, il problema precedente è di immediata risoluzione:

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}.$$

A questo punto vogliamo tornare indietro per avere informazioni sulla u stessa; applicando l'operatore trasformata inversa $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}$, abbiamo:

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}) = u_0 * \mathcal{F}^{-1}(e^{-\xi^2 t}).$$

Calcolando la seconda trasformata inversa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(e^{-\xi^2 t}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi\sqrt{t} - \frac{ix}{2\sqrt{t}})^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \end{aligned}$$

da cui:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy.$$

Avremmo bisogno di vedere che questa è effettivamente la soluzione, cioè, chiesta $u \in C^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap C^0([0, +\infty) \times \mathbb{R})$, che $u(t, x') \rightarrow u(0, x)$ per ogni $(t, x') \rightarrow (0, x)$.

Proposizione 6.22. Se $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$, allora la funzione precedente é effettivamente la soluzione.

Dimostrazione. Vediamo innanzitutto la regolaritá di $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy$. Preso δ piccolo a piacere e $0 < \delta \leq t$, abbiamo che $\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \in C^\infty([\delta, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_x^1(\mathbb{R})$ e:

$$\partial_t u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \partial_t \left(\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) dy.$$

Inoltre, se $0 < \delta \leq t$:

$$\partial_t^m \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} = t^{-(m+\frac{1}{2})} P \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \in \mathcal{L}_x^1(\mathbb{R}),$$

con $\deg(P) = 2m$ (si puó vedere per induzione) e:

$$\partial_x^k \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} = Q \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \in \mathcal{L}_x^1(\mathbb{R}),$$

con $\deg(Q) = k$, dunque si possono portare tutte le derivate successive di u dentro all'integrale e perció $u \in C^\infty([\delta, +\infty) \times \mathbb{R}) \forall \delta > 0$, cioé $u \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$.

Vediamo adesso che la soluzione si incolla bene al bordo; sia $(t, x') \rightarrow (0, x)$ e, osservando che $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy = \sqrt{4\pi t}$, con un cambio di variabili abbiamo:

$$\begin{aligned} u(t, x') - u_0(x) &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x' - y) \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy - u_0(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy = \int_{\mathbb{R}} (u_0(x' - y) - u_0(x)) \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (u_0(x' - \sqrt{2tz}) - u_0(x)) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz < \int_{-M}^M \varepsilon \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz + 2\|u_0\|_{\mathcal{L}^\infty} \int_{|z|>M} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz < \varepsilon, \end{aligned}$$

grazie al fatto che $u_0 \in C^0 \cap \mathcal{L}^\infty$. □

Osservazione. Detta $G_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$, abbiamo visto che $u(t, x) = u_0(x) * G_t(x)$ risolve l'equazione del calore se $u_0 \in \mathcal{L}^\infty \cap C^0$; da una nota proprietá della convoluzione, abbiamo che:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^\infty} \|G_t\|_{\mathcal{L}^1} = \|u_0\|_{\mathcal{L}^\infty}.$$

Se chiediamo anche $u_0 \in \mathcal{L}^1$, con lo stesso ragionamento, se $t \geq \delta > 0$:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^1} \|G_t\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|u_0\|_{\mathcal{L}^1} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}},$$

dunque $u(t, x)$ decade a 0 per $t \rightarrow \infty$.

Se abbiamo ancora l'integrabilitá di u_0 , riusciamo anche a stimare la norma \mathcal{L}^p di $u(t, x)$:

$\|u(t, x)\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^1} \|G_t\|_{\mathcal{L}^p}$ e:

$$\|G_t\|_{\mathcal{L}^p} = \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right)^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{px^2}{4t}} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sqrt[2p]{\frac{4\pi t}{p}},$$

dunque otteniamo la stima:

$$\|u(t, x)\|_{\mathcal{L}^p} \leq c \frac{1}{t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}}.$$

Infine, supponiamo di avere $u_0 \in \mathcal{L}^\infty \cap C^0 \cap \mathcal{L}^2$, e vediamo se possiamo dire qualcosa sul decadimento di $u(t, x)$ per $t \rightarrow \infty$. Posto $\widehat{u}(t, \xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(t, x)$, si aveva $\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-\xi^2 t}$; per il teorema di Plancherel $\|\widehat{u}_0(\xi)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 2\pi \|u_0\|_{\mathcal{L}^2}^2$, dunque:

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(t, \xi)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 e^{-2\xi^2 t} d\xi = \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 e^{-2\xi^2 t} d\xi + \int_{|\xi| > M} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 e^{-2\xi^2 t} d\xi \leq \\ &\leq \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 e^{-2\xi^2 t} d\xi + e^{-2M^2 t} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

perció, preso $\varepsilon > 0$, esiste M_0 tale che il primo addendo sia $< \varepsilon/2$, e preso t abbastanza grande, si ha che anche il secondo addendo é $< \varepsilon/2$. Per il teorema di Plancherel applicato a u , si ricava:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, x)\|_{\mathcal{L}^2} = 0.$$

Avendo appena trovato una soluzione dell'equazione del calore, é naturale chiedersi se essa sia l'unica soluzione o meno; stimando l'energia abbiamo, da $\int_{\mathbb{R}} (u_t - u_{xx}) u dx = 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |u_x(t, x)|^2 dx = 0,$$

cioé $\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx \leq 0$ e dunque:

$$\|u(t, x)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \|u_0\|_{\mathcal{L}^2}^2,$$

che però non é finito in generale, quindi questa stima non ci dice niente su un'eventuale unicitá della soluzione.

Esempio. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in (-1, 1) \\ u(0, x) = \frac{1}{(1-x)^2} \end{cases}$$

La funzione analitica:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

risolve l'equazione del calore e soddisfa la condizione iniziale, ma ha raggio di convergenza nullo.

Esibiamo ora un esempio in cui la soluzione di un problema con l'equazione del calore non é unica; osserviamo preliminarmente che una soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

é ovviamente la funzione identicamente nulla.

Consideriamo la funzione $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \in C^\infty$ per $t \geq 0$ prolungata a $t \leq 0$ con la funzione identicamente nulla; evidentemente l'incollamento rimane C^∞ . Prendiamo la serie:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t) x^{2m}}{(2m)!}.$$

Se vediamo che tale serie ha un raggio di convergenza strettamente positivo, si avrebbe che:

$$u_t(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m+1)}(t) x^{2m}}{(2m)!}, \quad u_{xx}(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t) x^{2m-2} (2m)(2m-1)}{(2m)!}$$

e $u(t, x)$ sarebbe 0 per $t = 0$ (e dunque sarebbe un'altra soluzione del problema precedente).

Lemma 6.23. $\frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Basta osservare che la funzione $\frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ ha come unico punto critico $x = \sqrt{\frac{2}{n}}$, che é di massimo. \square

Lemma 6.24. *Si ha:*

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

dove $P_k(x) = \sum_{m=0}^k a_{km} x^{k+2m}$, con $a_{00} = 1$ e $|a_{km}| \leq 8^k k^{k-m}$ per $k > 0$.

Dimostrazione. Le vediamo per induzione. Il caso $k = 0$ é banale, ma il passo base dell'induzione in realtà é $k = 1$, che evitiamo di verificare.

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(t) &= P'_k\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} + P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t^2}} (2t^{-3}) = \\ &= e^{-\frac{1}{t^2}} \left[-\sum_{m=0}^k a_{km} \left(\frac{1}{t}\right)^{k+2m+1} (k+2m) + 2 \sum_{m=0}^k a_{km} \left(\frac{1}{t}\right)^{k+2m+3} \right] = e^{-\frac{1}{t^2}} \sum_{m=0}^{k+1} a_{k+1,m} \left(\frac{1}{t}\right)^{k+2m}, \end{aligned}$$

con $a_{k+1,m} = -a_{km}(k+2m) + 2a_{k,m+1}$, dunque:

$$|a_{k+1,m}| \leq 8^k k^{-m+1} \frac{k+2m}{k} + 2 \cdot 8^k k^{k-m+1} \leq 3 \frac{k+1}{k} 8^k k^{k-m+1} + 2 \cdot 8^k k^{k-m+1} \leq (3 \cdot 2 + 2) 8^k k^{k-m+1},$$

cioé la tesi. \square

Lemma 6.25. $|f^{(k)}(t)| \leq c^k k^{\frac{3k}{2}}$.

Dimostrazione. Per i lemmi precedenti:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(t)| &\leq \left| \sum_{m=0}^k a_{km} t^{-k-2m} e^{-\frac{1}{t^2}} \right| \leq \sum_{m=0}^k |a_{km}| \left| \frac{k+2m}{2} \right|^{\frac{k+2m}{2}} \leq \sum_{m=0}^k 8^k k^{k-m} (2k)^{\frac{k+2m}{2}} \leq \\ &\leq 8^k k^{k-m+1} (2k)^{\frac{k+2m}{2}} \leq \left(8^k 2^{\frac{k+2k}{2}}\right) k^{\frac{3k}{2}+1} \leq 64^k k^{\frac{3k}{2}}. \end{aligned}$$

\square

Questi lemmi ci bastano per dimostrare che il raggio di convergenza della serie introdotta prima é > 0 ; se infatti $R > 0$ e $|x| \leq R$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t) x^{2m}}{(2m)!} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m m^{\frac{3m}{2}} R^{2m}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2m \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{c'}{\sqrt{m}}\right)^m < +\infty,$$

in quanto non appena $\sqrt{m} > c'$, la coda della serie é maggiorata da una serie geometrica.

Concludiamo la sezione con due importanti teoremi riguardanti la trasformata di Fourier.

Definizione 6.2. f si dice **a banda limitata** se $\widehat{f}(\xi) = 0$ se $|\xi| > \Omega$.

Teorema 6.26 (del campionamento). *Sia $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e $\widehat{f}(\xi) = 0$ per $|\xi| > \Omega$. Se sono assegnati i valori $f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ per $n \in \mathbb{Z}$, allora si conosce la f su tutta la retta reale e in particolare:*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}.$$

Dimostrazione. $\widehat{f}(\xi)$ ha supporto in $[-\Omega, \Omega]$. Sviluppando in serie di Fourier:

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{-n} e^{-\frac{in\pi\xi}{\Omega}},$$

con:

$$c_{-n} = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\xi) e^{\frac{in\pi\xi}{\Omega}} d\xi = \frac{1}{2\Omega} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{\frac{in\pi\xi}{\Omega}} d\xi = \frac{2\pi}{2\Omega} \check{f}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right).$$

Ma si ha:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{-\frac{in\pi\xi}{\Omega} + i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-\frac{in\pi\xi}{\Omega} + i\xi t} d\xi$$

e calcolando l'ultimo integrale si ha la tesi. \square

Sia $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Definisco la norma:

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}} |f'|^2 dx.$$

Questa norma é equivalente alla norma:

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

quindi tale norma può essere estesa a tutte le funzioni di \mathcal{L}^2 . Denotiamo inoltre $\mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ per cui $\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R})} < +\infty$. Tale spazio (di Hilbert) é lo spazio delle funzioni che hanno la prima derivata distribuzionale in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Analogamente si possono definire gli spazi $\mathcal{H}^k(\mathbb{R})$.

Teorema 6.27. *Siano $f_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ funzioni tali che $\text{supp}(f_n) \subseteq [-M, M]$ e $f_n \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R})$ uniformemente. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$ che converge a $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. $\|f_n\|_{\mathcal{L}^2} \leq c$, dunque esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge a $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ debolmente, cioè $\langle f_{n_k} - f, g \rangle \rightarrow 0$ per ogni $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Denotiamo $g_{n_k} = f_{n_k} - f$; vorremmo vedere che $\int_{\mathbb{R}} |g_{n_k}(x)|^2 dx \rightarrow 0$, cioè $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| < L} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq L} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi;$$

studiamo separatamente i due integrali. Per il primo:

$$\widehat{g_{n_k}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g_{n_k} e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} g_{n_k} \chi_{[-M, M]} e^{-ix\xi} dx = \langle g_{n_k}, \underbrace{\chi_{[-M, M]}(x) e^{-ix\xi}}_{\in \mathcal{L}^2} \rangle \rightarrow 0,$$

quindi, preso $\varepsilon > 0$, $\exists k_0$ tale che $\forall k > k_0$, $|\widehat{g_{n_k}}(\xi)| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4L}}$ e perciò:

$$\int_{|\xi| < L} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi < 2L \frac{\varepsilon}{4L} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per il secondo integrale:

$$\int_{|\xi| \geq L} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi = \int_{|\xi| \geq L} \frac{1 + |\xi|^2}{1 + |\xi|^2} |\widehat{g_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{3}{1 + L^2} \max_k \int_{|\xi| \geq L} (1 + |\xi|^2) |\widehat{f_{n_k}}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{c}{1 + L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

per $L > L_0 \gg 0$. \square

7 Appendice

7.1 Forme differenziali e decomposizione di Helmholtz-Weyl

Richiamiamo le definizioni degli operatori differenziali e alcune loro proprietà.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare e $\vec{u}, \vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funzioni vettoriali; si definiscono:

- **Rotore:**

$$\text{rot}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix};$$

- **Divergenza:**

$$\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \partial_i \vec{u}_i;$$

- **Laplaciano:**

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f), \quad \Delta \vec{u} = \Delta \vec{u}_1 \hat{i} + \Delta \vec{u}_2 \hat{j} + \Delta \vec{u}_3 \hat{k}.$$

Valgono le proprietà:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$;
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$;
- $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{u}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$;
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

Richiamiamo anche le prime definizioni di integrali su curve e di 1-forme differenziali.

Si definisce **integrale di linea di I specie** un integrale della forma:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

dove $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva regolare e C^1 a tratti e $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare.

Dall'algebra lineare sappiamo che $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ e una base del duale è formata dai funzionali π_i tali che $\pi_i(x) = x_i$ (i -esima coordinata di x); in questo contesto si denota $dx_i = d\pi_i = \pi_i$.

Una **1-forma** è una scrittura del tipo:

$$\omega(y) = \sum_{i=1}^n a_i(y) dx_i,$$

dove $a_i(y) \in C^0(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare.

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile, si definisce **differenziale** di f la 1-forma:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i} dx_i.$$

Una 1-forma ω si dice **esatta** se esiste una funzione differenziabile f tale che $\omega = df$. f si dice **primitiva** di ω .

Esempio. Ci interessiamo al problema di trovare f tale che:

$$\nabla f = a,$$

dove a é una funzione vettoriale assegnata. Condizione evidentemente necessaria é che la matrice $(\partial_i a_j)$ sia simmetrica, in quanto $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$. Una 1-forma con tale proprietá si dice **chiusa**.

Oppure, se ci troviamo nell'insieme delle funzioni 1-dimensionali periodiche, l'equazione:

$$f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ikt}$$

ha soluzione $\iff a_0 = 0$. Da questi semplici esempi osserviamo che non sempre le forme sono esatte.

Un problema simile, anch'esso molto importante, é $\nabla \times f = a$, in quanto avrebbe collegamenti immediati con l'equazione di Poisson; ad esempio, dato il problema:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ n \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

puó essere trasformato, ponendo $v = \nabla u$, nel problema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = f & \text{in } \Omega \\ n \cdot v = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Anche questo problema, però, non é sempre risolubile, poiché:

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

dunque ad esempio f deve essere a media nulla.

Presa ω una 1-forma continua definita su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo **integrale di II specie**:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) dt,$$

dove $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é una curva regolare C^1 a tratti.

Osservazione. Se $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(y) dx_i$, si ha la scrittura equivalente:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \langle a, \tau \rangle ds,$$

dove τ é il versore tangente alla curva γ .

Enunciamo qualche risultato di base sulle 1-forme senza dimostrazione:

Teorema 7.1. $\omega \in C^0(\Omega)$ 1-forma esatta con primitiva f , Ω connesso. Allora:

$$\int_{\gamma(x,y)} \omega = f(y) - f(x),$$

dove $\gamma(x, y)$ é un arco che congiunge x e y , dunque in particolare l'integrale non dipende dal percorso.

Teorema 7.2. Vale il viceversa del teorema precedente, cioè se $\int_{\gamma(x,y)} \omega$ non dipende da γ , allora ω é esatta.

Idea della dimostrazione. Basta mostrare che, fissato $x_0 \in \Omega$, $f(x) = \int_{\gamma(x_0,x)} \omega$ é una primitiva di ω . \square

Corollario 7.3. Se $\int_{\gamma} \omega = 0$ per ogni cammino chiuso γ , allora ω é esatta.

Teorema 7.4. Se Ω é semplicemente connesso, allora ogni forma chiusa in Ω é esatta.

Proposizione 7.5. Sia Ω un aperto semplicemente connesso, e sia $u \in C^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} u \cdot w dx = 0$$

per ogni funzione test $w \in U(\Omega)$. Allora $u \in G$, cioè $u = \nabla p$.

Dimostrazione. Sia $h \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $w = \nabla \times h$. Allora:

$$0 = \int_{\Omega} u \cdot (\nabla \times h) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \times h) dx + \int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot h = \underbrace{\int_{\partial\Omega} (u \times h) \cdot n_i dS}_{=0} + \int_{\Omega} (\nabla \times u) \cdot h$$

per ogni $h \in C_0^\infty$ funzione test, dunque $\nabla \times u = 0$. Ma questo é equivalente all'esistenza di un potenziale, cioè $u = \nabla p$. \square

Teorema 7.6. Ω aperto limitato, $u \in C^0(\Omega)$ tale che $\int_{\Omega} u \cdot w = 0 \forall w \in U(\Omega)$. Allora $u = \nabla p$.

Dimostrazione. Consideriamo una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ chiusa, regolare e C^1 a tratti e denotiamo $\varepsilon_0 = d(\gamma, \partial\Omega)$. Preso $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, consideriamo il mollificatore $\rho(x) = \rho(\|x\|) \in C_0^\infty(\Omega)$ con supporto contenuto in $B(0, 1)$ e denotiamo $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Definiamo:

$$\Phi^\varepsilon(x) = \int_a^b \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \in C_0^\infty(\Omega).$$

Detta Φ_i^ε l' i -esima componente di Φ^ε e osservato che:

$$\partial_i \Phi_i^\varepsilon(x) = \partial_i \int_a^b \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \dot{\gamma}_i dt = \int_a^b \partial_i \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) \dot{\gamma}_i dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) dt,$$

si ha che:

$$\nabla \cdot \Phi^\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \partial_i \Phi_i^\varepsilon = - \sum_{i=1}^3 \int_a^b \frac{d}{dt} \rho_\varepsilon(x - \gamma(t)) dt = 0,$$

in quanto la curva γ é chiusa. A questo punto, detta $u = (u_1, u_2, u_3)$, consideriamo la 1-forma $\omega = \sum_{i=1}^3 u_i dx_i$; vedere che u ammette potenziale é equivalente a mostrare che ω é esatta, che é sua volta equivalente alla condizione:

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

per ogni curva regolare γ con immagine contenuta in Ω . Visto che Φ^ε ha divergenza nulla, per ipotesi $\int_{\Omega} u \cdot \Phi^\varepsilon dx = 0$; definiamo u_ε in modo che la sua componente i -esima sia $(u_\varepsilon)_i = u_i * \rho_\varepsilon$, e definiamo $\omega_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 (u_\varepsilon)_i dx_i$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_\varepsilon &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Omega} a_i(y) \rho_\varepsilon(x - y) dy \right) dx = \int_a^b \int_{\Omega} a_i(y) \rho_\varepsilon(\gamma(t) - y) dy \dot{\gamma}_i(t) dt = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 a_i \Phi_i^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} u \cdot \Phi^\varepsilon dx = 0, \end{aligned}$$

quindi, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, vista la convergenza $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega$, si ha che $\int_{\gamma} \omega = 0$. \square

Teorema 7.7 (Decomposizione di Helmholtz-Weyl). *Sia $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $u \rightarrow 0$ quando $\|u\| \rightarrow 0$. Allora:*

$$u = \nabla\varphi + \nabla \times A,$$

dove φ é chiamato **potenziale scalare** e A **potenziale vettore**.

Dimostrazione. Posto:

$$U(x) = u * \frac{1}{4\pi|x|} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(y)}{|x-y|} dy,$$

abbiamo visto che $\Delta U = u$. Ma allora:

$$u = \nabla(\nabla \cdot U) - \nabla \times (\nabla \times U),$$

quindi basta porre $\varphi = \nabla \cdot U$ e $A = -\nabla \times U$. □

Proviamo a generalizzare il risultato precedente; sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto limitato regolare. Consideriamo gli insiemi:

$$U(\Omega) = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \nabla \cdot v = 0\},$$

il suo completamento in $(\mathcal{L}^2(\Omega))^3$:

$$H = \overline{U(\Omega)}^{\mathcal{L}^2} = \left\{ v \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^3 \mid \exists v_n \in U(\Omega) \text{ tale che } \int_{\Omega} |v_n - v|^2 dx \rightarrow 0 \right\} \subseteq (\mathcal{L}^2(\Omega))^3$$

e infine:

$$G = \{w \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^3 \mid w = \nabla p, p \in W_{loc}^{1,2}\}.$$

Si può dimostrare che vale la decomposizione ortogonale $(\mathcal{L}^2(\Omega))^3 = H \overset{\perp}{\oplus} G$, ma é molto difficile; ci limitiamo ad osservare che, se $v \in U(\Omega)$ e $w \in G$, allora:

$$\int_{\Omega} v \cdot w dx = \int_{\Omega} v \cdot \nabla p dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot n_i p dS - \int_{\Omega} \nabla \cdot v p dx = 0,$$

in quanto $v \cdot n_i = 0$ perché v é a supporto compatto, mentre $\nabla \cdot v = 0$ per definizione. Passando al limite, non é difficile vedere che $H \perp G$.

L'analogia con il teorema precedente é evidente; infatti la condizione $\nabla \cdot v = 0$ é equivalente a $v = \nabla \times h$, mentre la condizione $\nabla \times w = 0$ é equivalente a $w = \nabla p$.

Studiamo un caso particolare della decomposizione precedente; prendiamo $\Omega = \mathbb{T}^3$ e mostriamo che effettivamente vale la decomposizione $(\mathcal{L}^2(\Omega))^3 = H + G$. Denotiamo:

$$(\mathcal{L}_0^2(\Omega))^3 = \left\{ v \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^3 \mid \int_{\Omega} v dx = 0 \right\}.$$

Scriviamo:

$$v^j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \widehat{v}_k^j e^{i\langle k, x \rangle}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |v_k|^2 < +\infty$$

per $j = 1, 2, 3$, dove $\mathbb{Z}_*^3 = \mathbb{Z}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$; in questo modo la divergenza risulta essere:

$$\nabla \cdot v = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} v^j(x) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} i k_j \widehat{v}_k^j e^{i\langle k, x \rangle} = i \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \langle k, \widehat{v}_k \rangle e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Dunque é evidente che $\nabla \cdot v = 0 \iff \widehat{v}_k \perp k \ \forall k \in \mathbb{Z}_*^3$.

Sia $f \in (\mathcal{L}_0^2(\Omega))^3$; scriviamo $f = f - f_1 + f_1$ nel modo seguente:

$$f^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \widehat{f}_k^j e^{i\langle k, x \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \left(f_k^j - \frac{\langle \widehat{f}_k, k \rangle k^j}{\|k\|^2} \right) e^{i\langle k, x \rangle} + \sum_{k \in \mathbb{Z}_*^3} \frac{\langle \widehat{f}_k, k \rangle k^j}{\|k\|^2} e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Tale spezzamento individua una proiezione sul sottospazio di $(\mathcal{L}_0^2(\Omega))^3$ delle funzioni a divergenza nulla, che può essere espressa nella forma:

$$\widehat{f}_k \rightarrow \widehat{f}_k \left(I - \frac{k \otimes k}{\|k\|^2} \right).$$

Si può mostrare che $\left\| \widehat{f}_k \left(I - \frac{k \otimes k}{\|k\|^2} \right) \right\| \leq \|f_k\|$, dunque se $f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, l'operatore di proiezione risulta limitato e continuo. Abbiamo perciò mostrato:

Teorema 7.8. $f \in (\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^3))^3$. Allora esiste $f_1 \in (\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^3))^3$ tale che $\nabla \cdot (f - f_1) = 0$ e f_1 ammette potenziale, cioè $f_1 = \nabla p$ per un certo $p \in W_{loc}^{1,2}$. Inoltre tale decomposizione é ortogonale, cioè $\langle f - f_1, f_1 \rangle = 0$.

7.2 Trasporto di punti materiali

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto regolare e limitato e sia $u(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ una funzione che trasporta un punto materiale, cioè esiste una funzione $X(t, x)$, detta **flusso**, tale che:

$$\frac{d}{dt} X(t, x) = u(t, X(t, x)), \quad X(0, x) = x.$$

Chiamo D_t il dominio D trasportato all'istante t , cioè $D_t = \bigcup_{x \in D} X(t, x)$, e prendo una generica $f(t, x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ definita in $y \in D_t$ al variare di t ; vogliamo vedere come cambia il valore dell'integrale $\int_{D_t} f(t, x) dx$ nel tempo. Se tale integrale é costante, si ha che la funzione f rappresenta una densità di massa, che viene comunemente chiamata **continuo**.

Lemma 7.9. Sia $J(t, x)$ il determinante del Jacobiano del cambio di variabili $x \rightarrow X(t, x)$. Allora vale la formula per ogni t :

$$\partial_t J(t, x) = (\nabla \cdot u(t, X(t, x))) J(t, x)$$

Dimostrazione. Per semplicità, vediamo solo nel caso $t = 0$. Se h é abbastanza piccolo, si ha che $X_i(h, x) = x_i + \dot{X}_i(0, x)h + O(h^2) = x_i + u_i(0, x)h + O(h^2)$, dunque:

$$\partial_j X_i(h, x) = \delta_{ij} + \partial_j u_i(0, x)h + O(h^2) = \delta_{ij} + A_{ij}h + O(h^2),$$

dove $A_{ij} = \partial_j u_i(0, x)$, da cui:

$$\det J(h, x) = \det(I + Ah + O(h^2)) = 1 + h \operatorname{tr}(A) + O(h^2) = 1 + h \nabla \cdot u(0, x) + O(h^2),$$

cioé la tesi. □

Teorema 7.10 (del trasporto di Reynolds). Vale la relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(t, x) dx = \int_{D_t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx + \int_{\partial D_t} f u \cdot n dS.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{D_t} f(t, y) dy &= \int_{D_0} \frac{d}{dt} (f(t, X(t, x)) J(t, x)) dx = \\
 &= \int_{D_0} \left(\partial_t f(t, X(t, x)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial t} \right) J(t, x) + f(t, X(t, x)) \partial_t J dx = \\
 &= \int_{D_0} \left(\partial_t f + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f u_j \right) (t, X(t, x)) J(t, x) dx + \int_{D_0} (f \nabla \cdot u)(t, X(t, x)) J(t, x) dx = \\
 &= \int_{D_0} (\partial_t f + \nabla \cdot (uf))(t, X(t, x)) J(t, x) dx = \int_{D_t} (\partial_t f + \nabla \cdot (uf)) dy = \\
 &= \int_{D_t} \partial_t f dy + \int_{\partial D_t} f u \cdot ndS
 \end{aligned}$$

per il teorema della divergenza. □

Corollario 7.11. $\frac{d}{dt} \mu(D_t) = \int_{D_t} \nabla \cdot u(t, y) dy.$

Dimostrazione. Basta applicare la formula precedente a $f(t, x) \equiv 1.$ □

Osserviamo che, se $\rho(t, x)$ é un continuo, allora dalla formula di Reynolds:

$$\int_{D_t} \partial_t \rho + \nabla(\rho u) = 0$$

ad ogni tempo, dunque:

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho u) = 0.$$

Tale equazione, detta **equazione di continuitá**, é una versione differenziale della formula del trasporto.

Sia adesso $c(t, x)$ un continuo, e supponiamo da ora in poi $\nabla \cdot u = 0$, cioé l'area di D_t é costante; allora per l'equazione di continuitá:

$$0 = \partial_t c + \nabla \cdot (uc) = \partial_t c + (u \cdot \nabla)c = 0.$$

Calcolando la **derivata materiale** di c lungo X , abbiamo:

$$\frac{d}{dt} c(t, X(t, x)) = \partial_t c + \sum_{j=1}^n \partial_j c \dot{X}_j = \partial_t c + (u \cdot \nabla)c = 0,$$

quindi c é costante sulle traiettorie; se riusciamo a costruire le curve $x \mapsto X(t, x)$, abbiamo le linee di flusso. Se ad esempio abbiamo il problema:

$$\begin{cases} c_t(t, x) + (u \cdot \nabla)c(t, x) = 0 \\ c(0, x) = c_0(x) \end{cases}$$

per calcolare $c(t, x)$ dobbiamo partire da (t, x) , seguire all'indietro le linee di flusso fino a $t = 0$ e applicare c_0 ; in altre parole $c(t, x) = c_0(X(-t, x)).$

Esempio. Poniamo $u(t, x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, cioé ci interessiamo al problema $c_t + c_x = 0$. Vogliamo costruire una curva $(t(s), x(s))$ su cui c é costante; visto che:

$$\frac{d}{ds} c(t(s), x(s)) = c_t \dot{t} + c_x \dot{x},$$

basta porre $\dot{t} = \dot{x} = 1$. Se le condizioni iniziali sono $t(0) = 0$ e $x(0) = x_0$, la linea di flusso é semplicemente $(t(s), x(s)) = (s, x_0 + s)$, che non é altro che la bisettrice del primo e terzo quadrante traslata su $(0, x_0)$.

Esempio. Generalizzando leggermente l'esempio precedente, consideriamo l'equazione $c_t + a(t, x)c_x = 0$. Procedendo come prima, si trova che $\dot{t} = 1$ e $\dot{x}(s) = a(t(s), x(s)) = a(s, x(s))$, che é l'equazione del flusso. Se $a \in C^1$, la soluzione é unica, mentre se $a \in C^0$ per il teorema di Peano la soluzione esiste ma può non essere unica. Se invece a é ancora meno regolare, tipo $a \in W^{1,1}$, l'idea é regolarizzare la funzione per poi passare al limite (ed é la teoria di Perna-Lions); é stato infine risolto da Ambrosio il caso $a \in BV$.

Visto che la teoria nel caso $a \notin C^1$ va oltre il nostro scopo, poniamoci un problema diverso: supponiamo $a \in C^1$ che però dipende da c stesso.

Esempio (Equazione di Burgers). Consideriamo l'equazione $c_t + cc_x = 0$; come al solito, si arriva a $t(s) = s$ e $\dot{x}(s) = c(s, x(s))$. Se $x(s)$ é tale che c é costante sulla curva $(s, x(s))$, allora:

$$\dot{x}(s) = c(s, x(s)) = c_0(x)$$

é costante, dunque $x(s) = x_0 + c_0(x)s$.

Consideriamo ad esempio $c_0(x) = 1$ per $x \leq 0$, $c_0(x) = 0$ per $x \geq 1$ e tale che si unisca in modo C^∞ ; allora la linea di flusso che parte da $(0, 0)$ é la bisettrice del primo e terzo quadrante, mentre la linea di flusso che parte da $(0, 1)$ é una linea orizzontale, quindi nel punto $(1, 1)$ ci sarà un punto di sovrapposizione delle linee. In questo punto non é possibile trovare il valore corrispondente $c(1, 1)$, in quanto si potrebbe tornare indietro a $t = 0$ tramite due linee di flusso diverse, quindi $c(1, 1)$ non é ben definito. In questo caso si parla di **formazione di uno shock**, in quanto partendo da una funzione $c_0(x) = c(0, x) \in C^\infty$, si ottiene al tempo $t = 1$ una funzione $c(1, x) \notin C^0$ che ha uno scalino in $x = 1$.

Se invece consideriamo una $c_0(x) \in C^\infty$ tale che $c_0(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $c_0(x) = 1$ per $x \geq 1$, si ottiene un piano delle fasi (t, x) in cui la soluzione non é definita per $x \in (0, 1)$ (**rarefaction fan**), in quanto le linee di flusso sono orizzontali per $x \leq 0$ e di coefficiente angolare 1 per $x \geq 1$.

7.3 I polinomi di Hermite

Definiamo n -esimo polinomio di Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

É una semplice induzione vedere che $\deg(H_n) = n$; vogliamo mostrare in questa piccola sezione che tali polinomi formano una (a volte) conveniente base di $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Come prima osservazione, vediamo che gli H_n non sono ortogonali nel senso classico, ma definendo il prodotto scalare "con peso" $W = e^{-x^2}$:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}_W^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f g e^{-x^2} dx,$$

si ha che gli H_n sono ortogonali in $\mathcal{L}_W^2(\mathbb{R})$. Infatti, piú in generale, se $P(x)$ é un polinomio di grado $< n$:

$$\langle P, H_n \rangle_{\mathcal{L}_W^2(\mathbb{R})} = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} P(x) \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} P(x) e^{-x^2} dx = 0.$$

Inoltre, con un banale calcolo, $\|H_n\|_{\mathcal{L}_W^2(\mathbb{R})} = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

Adesso invece vogliamo mostrare che gli H_n sono un sistema completo, cioè che, se $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ é tale che $\langle f, H_n \rangle_{\mathcal{L}_W^2(\mathbb{R})} = 0$ per ogni n , allora $f \equiv 0$ quasi ovunque. Osserviamo innanzitutto

che una tale f é ortogonale a tutti i polinomi, in quanto con combinazioni lineari finite degli $H_n(x)$ posso ottenere un qualunque polinomio (poiché $\deg(H_n) = n$).

A questo punto, visto che $\langle f, \frac{(itx)^n}{n!} \rangle_{\mathcal{L}^2_W(\mathbb{R})} = 0 \forall n, t$ (in quanto il secondo termine é un polinomio), si ha:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(itx)^n}{n!} f(x) e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) e^{-x^2} dx = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f(x) e^{-x^2}),$$

quindi $f = 0$ quasi ovunque.

7.4 Funzioni di Bessel

Riprendiamo il problema della membrana vibrante nell'aperto $B = B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$; passando in coordinate polari si ottiene il problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}) & \text{in } B \\ u = 0 & \text{in } \partial B \end{cases}$$

Separando due volte le variabili, si trovano due facili equazioni in T e Θ , e una in $R(r)$:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \mu^2 r^2 = \nu^2,$$

che, tramite il cambio di variabili $x = \mu r$ e $R(r) = f(\mu r) = f(x)$, si trasforma in:

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f(x) = 0.$$

Il punto $x = 0$ é un punto singolare, ma é **regolare**, in quanto i coefficienti dell'equazione non vanno a ∞ piú velocemente di una potenza.

Tale equazione differenziale non é risolvibile esplicitamente, cioè non esiste una soluzione esprimibile tramite combinazione di funzioni elementari; se però prendiamo una f del tipo:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+b}$$

con $b = b(\nu) \in \mathbb{Z}$ parametro e $a_0 \neq 0$, ed imponiamo che risolva l'equazione della membrana, otteniamo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+b)(j+b-1) x^{j+b-2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+b) x^{j+b-2} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+b} = 0,$$

cioé:

$$\sum_{j=0}^{\infty} ((j+b)^2 - \nu^2) a_j x^{j+b} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^{j+b} = 0.$$

Se $j = 0$, abbiamo $(b^2 - \nu^2) a_0 = 0$, cioè $b = \pm \nu$.

Se $j = 1$, $((1+b)^2 - \nu^2) a_1 = 0$, cioè $(\pm 2\nu + 1) a_1 = 0$; si può avere $\nu = \pm \frac{1}{2}$ o $a_1 = 0$. In questa breve trattazione consideriamo solo il caso $a_1 = 0$.

Ricorsivamente, si ha:

$$a_j = -\frac{a_{j-2}}{(j+\nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{j-2}}{j(j+2\nu)},$$

da cui:

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (1+\nu) \cdots (k+\nu)}$$

e finalmente:

$$f(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k! (1+\nu) \cdot \dots \cdot (k+\nu)}.$$

Storicamente, si pone $a_0 = \frac{1}{2\nu\Gamma(\nu+1)}$, dunque, sostituendo, si ottiene:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

detta **funzione di Bessel di prima specie di ordine ν** .

Tale funzione analitica ha raggio di convergenza ∞ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$ e nei casi particolari $\nu = \pm \frac{1}{2}$ diventa:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x), \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

Inoltre, se $\nu \notin \mathbb{N}$, J_ν e $J_{-\nu}$ sono linearmente indipendenti (e dunque le loro combinazioni lineari generano lo spazio delle soluzioni dell'equazione della membrana); se invece $\nu = n \in \mathbb{N}$, $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$, e l'altra soluzione dell'equazione della membrana é la funzione di Bessel di seconda specie.

Un'osservazione che ci potrà essere utile é la seguente:

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

Infine, mostriamo che la funzione generatrice delle funzioni di Bessel di ordine intero é:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.$$

Infatti, essendo tutte serie assolutamente convergenti, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} e^{\frac{xz}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2z}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{xz}{2}\right)^k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{x}{2z}\right)^j \right) = \sum_{j,k} \frac{1}{j!k!} (-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^j \left(\frac{xz}{2}\right)^k = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \frac{1}{k!(k+n)!} \right) z^n. \end{aligned}$$

Il precedente risultato é particolarmente utile: se infatti poniamo $z = e^{i\theta}$, otteniamo:

$$e^{ix \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta},$$

cioé $J_n(x)$ é l' n -esimo coefficiente di Fourier di $e^{ix \sin(\theta)}$, da cui:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\theta)} e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin(\theta) - n\theta)} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta) - n\theta) d\theta.$$

Da questo ricaviamo la disuguaglianza (non banale) $|J_n(x)| \leq 1 \forall x, \forall n$; inoltre:

$$\frac{d^k}{dx^k} J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (i \sin(\theta))^k e^{i(x \sin(\theta) - n\theta)} d\theta,$$

quindi anche $|J_n^{(k)}(x)| \leq 1 \forall x, n, k$.

Usando Parseval, si ha anche l'identità valida per ogni x :

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2 = 1.$$

Concludiamo questa breve finestra di teoria con due teoremi:

Teorema 7.12 (di separazione di Sturm). *Se $\nu \notin \mathbb{N}$, fra due zeri consecutivi di J_ν , ne esiste sempre uno di $J_{-\nu}$.*

Teorema 7.13 (Sturm-Liouville). $\nu > 0$, $\{\lambda_k\}$ zeri positivi di $J_\nu(x)$. Sia $\Phi_k(x) = J_\nu(\lambda_k x)$; allora $\{\Phi_k(x)\}$ è una base ortogonale di $\mathcal{L}_W^2(0, 1)$, dove il peso è $W(x) = x$, cioè:

$$\int_0^1 x \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = 0 \quad \forall n \neq m.$$

Vediamo come tutta questa teoria si applica in pratica; una prima applicazione immediata è nel problema della membrana bidimensionale, in quanto da un teorema visto sul prodotto di due basi ortogonali si ottiene:

Teorema 7.14. *Siano $\{\lambda_{k,n}\}_{k \in \mathbb{N}}$ gli zeri positivi di $J_n(x)$; allora l'insieme:*

$$\{J_n(\lambda_{k,n} r) \cos(n\theta)\} \cup \{J_n(\lambda_{k,n} r) \sin(n\theta)\}$$

è una base ortogonale di $\mathcal{L}^2(B(0, 1))$.

Un'altra applicazione coinvolge la trasformata di Fourier di funzioni radiali; prendiamo in \mathbb{R}^2 una funzione $f(x) = f_0(|x|)$ radiale. Anche la sua trasformata di Fourier è radiale, in quanto, passando in coordinate polari $(x_1, x_2) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, $(\xi_1, \xi_2) = (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi))$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_0(|x|) e^{-i(x, \xi)} dx = \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta f_0(r) e^{-ir\rho \cos(\theta - \varphi)} = \\ &= \int_0^\infty r f_0(r) \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \sin(\theta)} d\theta dr = 2\pi \int_0^\infty r f_0(r) J_0(r\rho) dr = \widehat{f}_0(\rho), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $\theta = y + \varphi + \frac{\pi}{2}$. Il conto precedente ci permette anche di definire la **trasformata di Hankel** in \mathbb{R}^2 :

$$\widetilde{f}_0(\rho) = \int_0^\infty r f_0(r) J_0(r\rho) dr.$$

Con un conto simile si ottiene una formula analoga in \mathbb{R}^3 :

$$\widehat{f}_0(\rho) = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^\infty r f_0(r) \sin(r\rho) dr;$$

in generale la formula in \mathbb{R}^n coinvolge la funzione di Bessel $J_{n/2}$.

La trasformata di Fourier di funzioni radiali si applica a un calcolo piuttosto esotico che permette di calcolare il diametro di stelle avendo solo immagini sfocate di essa; volendo accennare ad esso, si calcola la trasformata di Fourier della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

che risulta essere:

$$\widehat{f}_0(\rho) = 2\pi \int_0^1 r J_0(r\rho) dr = \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^1 \rho r J_0(r\rho) d(r\rho) = \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^\rho x J_0(x) dx = \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^\rho \frac{d}{dx} (x J_1(x)) dx = \frac{2\pi}{\rho^2} J_1(\rho),$$

e si ragiona sugli zeri di tale trasformata. Per dettagli ulteriori consiglio di consultare il capitolo corrispondente (uno degli ultimi) del libro Fourier Analysis di Korner.