Metodi numerici per equazioni differenziali con ritardo

Tesi di Laurea Triennale

Giampaolo Mele

Università di Pisa

30 settembre 2011

DDE (delay differential equation)

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

- $\tau = \tau(t, y(t))$ è detto ritardo
- $\phi(t)$ è detta storia

DDE (delay differential equation)

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$
\begin{cases}
y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\
y(t) = \phi(t) & t \leq t_0
\end{cases}
$$

- $\tau = \tau(t, y(t))$ è detto ritardo
- $\phi(t)$ è detta storia

DDE (delay differential equation)

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

- $\tau = \tau(t, y(t))$ è detto ritardo
- $\phi(t)$ è detta storia

DDE (delay differential equation)

Un'equazione differenziale con ritardo (DDE) è un problema della forma

Definizione (DDE)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

- $\tau = \tau(t, y(t))$ è detto ritardo
- $\phi(t)$ è detta storia

Esistenza della soluzione

Condizioni

- $f(t, u, v)$ *continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- $\tau(t, u)$ *non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- $\phi(t)$ *continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Esistenza della soluzione

Condizioni

- $f(t, u, v)$ *continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- $\tau(t, u)$ *non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- $\phi(t)$ *continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Esistenza della soluzione

Condizioni

- *$f(t, u, v)$ continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- *$\tau(t, u)$ non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- *$\phi(t)$ continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Esistenza della soluzione

Condizioni

- $f(t, u, v)$ *continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- $\tau(t, u)$ *non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- $\phi(t)$ *continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Esistenza della soluzione

Condizioni

- $f(t, u, v)$ *continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- $\tau(t, u)$ *non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- $\phi(t)$ *continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Esistenza della soluzione

Condizioni

- *$f(t, u, v)$ continua e lipschitziana sugli ultimi due argomenti*
- *$\tau(t, u)$ non negativa, continua e lipschitziana sul secondo argomento*
- *$\phi(t)$ continua e lipschitziana*

Sotto queste condizioni la soluzione della DDE esiste ed è unica

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Un esempio in biologia

Equazione logistica

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

L'equazione logistica [Verhulst 1838] descrive la crescita delle popolazioni

- N è il numero di individui della specie
- r è il tasso di crescita
- K è la capacità di carico della popolazione (numero massimo di individui che possono trovarsi in un determinato ambiente)

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

Incoerenze

Equazione logistica

La soluzione di tale equazione è

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

Questa è una funzione crescente, daltronde in natura a volte il numero di individui di una certa specie diminuisce oppure segue un andamento oscillatorio

Correzione con il fattore ritardo

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- $K = 100$
- $r = 0.1$
- $\phi(t) = 3$

Correzione con il fattore ritardo

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- $K = 100$
- $r = 0.1$
- $\phi(t) = 3$

Correzione con il fattore ritardo

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

Come cambia la soluzione?

Esempio

Fissiamo

- $K = 100$
- $r = 0.1$
- $\phi(t) = 3$

Correzione con il fattore ritardo

Equazione logistica (Hutchinson 1948)

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right)$$

Problema

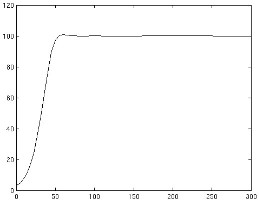
Come cambia la soluzione?

Esempio

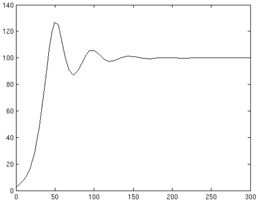
Fissiamo

- $K = 100$
- $r = 0.1$
- $\phi(t) = 3$

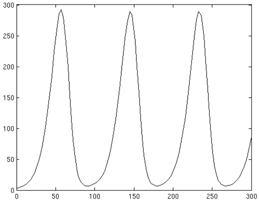
Figura: Grafici al variare di τ



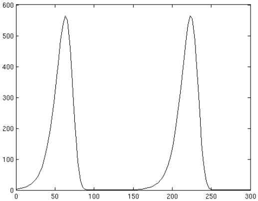
(a) $\tau = 5$



(b) $\tau = 10$



(c) $\tau = 20$



(d) $\tau = 27$

Metodo dei passi

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

Metodo dei passi

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

Metodo dei passi

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

L'idea è di ricondurre la DDE a tanti problemi ai valori iniziali (IVP, initial value problem)

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0,1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0,1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1,2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0,1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0,1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1,2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0, 1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 & \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1, 2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1, 2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 & \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0, 1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0, 1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1, 2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t - 2 & t \in [1, 2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0,1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0,1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1,2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Per conoscere la soluzione in $[0,1]$ è sufficiente risolvere

$$\begin{cases} y_1'(t) = -1 & t \in [0,1] \\ y_1(0) = 1 \end{cases}$$

Ovvero

$$y_1(t) = 1 - t$$

Per conoscerla in $[1,2]$ invece

$$\begin{cases} y_2'(t) = -y_1(t-1) = t-2 & t \in [1,2] \\ y_2(1) = y_1(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \leq 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \leq t \leq i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t) \qquad \text{se} \qquad i \leq t \leq i+1$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \leq 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \leq t \leq i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) & \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t) \qquad \text{se} \qquad i \leq t \leq i+1$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \le 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \le t \le i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t) \quad \text{se} \quad i \le t \le i+1$$

Svolgimento

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

In generale possiamo determinare la soluzione per ricorrenza

$$\begin{cases} y_0(t) = \phi(t) & t \leq 0 \\ y'_{i+1}(t) = -y_i(t-1) & i \leq t \leq i+1 \\ y_{i+1}(i) = y_i(i) \end{cases}$$

La soluzione sarà l'incollamento delle y_i ovvero

$$y(t) = y_i(t) \qquad \text{se} \qquad i \leq t \leq i+1$$

Svolgimento

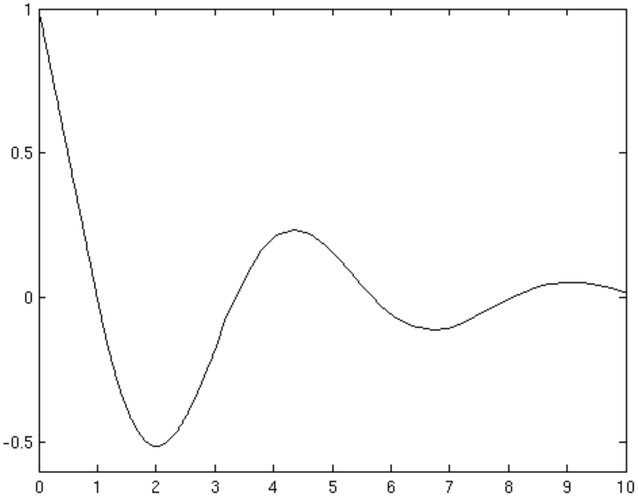
Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^2}{2} - 2t + \dfrac{3}{2} & 1 \le t \le 2 \\ -\dfrac{t^3}{6} + \dfrac{3}{2}t^2 - 4t + \dfrac{17}{6} & 2 \le t \le 3 \\ \dots \end{cases}$$

Grafico della soluzione



Caso generale

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Caso generale

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Caso generale

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Caso generale

Problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Data la suddivisione

$$\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$$

Risolvere la DDE equivale a risolvere un numero arbitrario di IVP

Caso generale

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t, y(t)))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $\quad t_n \le t \le t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f\left(t, y_{n+1}(t), x(t-\tau(t, y_{n+1}(t)))\right) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \qquad y_0(t) = \phi(t)$$

Caso generale

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t)))) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f\left(t, y_{n+1}(t), x(t - \tau(t, y_{n+1}(t)))\right) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \leq t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \leq s \leq t_i \end{cases} \qquad y_0(t) = \phi(t)$$

Caso generale

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t, y(t)))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $\quad t_n \le t \le t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f\left(t, y_{n+1}(t), x(t-\tau(t, y_{n+1}(t)))\right) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \qquad y_0(t) = \phi(t)$$

Caso generale

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t, y(t)))) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

IVP associati alla DDE

Data Δ per $\quad t_n \le t \le t_{n+1}$

$$\begin{cases} y'_{n+1}(t) = f\left(t, y_{n+1}(t), x(t-\tau(t, y_{n+1}(t)))\right) \\ y_{n+1}(t_n) = y_n(t_n) \end{cases}$$

dove

$$x(s) := \begin{cases} \phi(s) & s \le t_0 \\ y_i(s) & t_{i-1} \le s \le t_i \end{cases} \qquad y_0(t) = \phi(t)$$

Scelta di Δ

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n \qquad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Scelta di Δ

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n \qquad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Scelta di Δ

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n \qquad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Scelta di Δ

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n \qquad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Scelta di Δ

Quello che si vuole è che

$$t - \tau < t_n \qquad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$$

La condizione da imporre sulla suddivisione è

$$t_{n+1} - t_n < \min \tau$$

Domanda

Cosa succede se τ si annulla?

In realtà l'algoritmo si generalizza anche in questo caso...

Problemi numerici

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Problemi numerici

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Problemi numerici

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Problemi numerici

Domanda

La teoria sugli IVP è sufficiente?

Osservazione

Di ogni IVP associato alla DDE è necessario conoscere un'approssimazione continua della soluzione, pertanto i classici metodi per IVP (come ad esempio Eulero o i metodi di Runge-Kutta) non sono sufficienti dato che approssimano solo in alcuni punti la soluzione.

Pertanto ci sono due possibilità:

- Interpolare la soluzione
- Estendere i metodi numerici discreti a metodi numerici continui

Definizioni

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \begin{array}{l} \alpha_{n,1} y_n + \cdots + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} \\ + h_{n+1} \phi(y_n, \ldots, y_{n-k+1}) \end{array} \qquad 0 \le n \le N-1$$

dove $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ e si suppongono noti i primi k termini $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Definizioni

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \; & \alpha_{n,1} y_n + \cdots + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} \\ & + h_{n+1} \phi(y_n, \ldots, y_{n-k+1}) \end{aligned} \qquad 0 \le n \le N-1$$

dove $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ e si suppongono noti i primi k termini $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Definizioni

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$y_{n+1} = \begin{array}{l} \alpha_{n,1} y_n + \cdots + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} \\ + h_{n+1} \phi(y_n, \ldots, y_{n-k+1}) \end{array} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

dove $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ e si suppongono noti i primi k termini $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Definizioni

IVP

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \qquad t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definizione (Metodi numerici per IVP)

Data una suddivisione $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_N = t_f\}$ definiamo un metodo numerico a k passi come una successione

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \quad & \alpha_{n,1} y_n + \cdots + \alpha_{n,k} y_{n-k+1} \\ & + h_{n+1} \phi(y_n, \ldots, y_{n-k+1}) \end{aligned} \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

dove $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ e si suppongono noti i primi k termini $y_0, \ldots, y_{k-1}$. Inoltre chiediamo che la funzione ϕ sia lipschitziana.

Quello che vogliamo è che $y_n \simeq y(t_n)$

Definizioni

Definizione (Estensione continua)

Definiamo estensione continua (o interpolatore) di un metodo numerico una funzione $\eta(t)$ polinomiale a tratti definita dalle restrizioni su ogni intervallo $[t_n, t_{n+1}]$ di una interpolazione basata sui valori calcolati in un intervallo più amplio possibile $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}]$ con $i_n, j_n \geq 0$ della forma

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \;& \beta_{n,1}(\theta) y_{n+j_n} + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y_{n-i_n} \\ & + h_{n+1} \Psi(y_{n+j_n}, \ldots, y_{n-i_n}, \theta)\end{aligned}$$

dove $0 \leq \theta \leq 1$ e chiediamo che $\eta(t)$ sia continua, quindi

$$\eta(t_n) = y_n \qquad \text{e} \qquad \eta(t_{n+1}) = y_{n+1}$$

Inoltre chiediamo che la funzione Ψ sia lipschitziana.

Consistenza

Definizione (Consistenza di un metodo numerico)

Un metodo numerico è consistente di ordine p se per ogni IVP e per ogni suddivisione Δ, $p \geq 1$ è il più grande intero tale che

$$\|y(t_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}\| = O(h_{n+1}^{p+1}) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

dove

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} = \; & \alpha_{n,1} y(t_n) + \cdots + \alpha_{n,k} y(t_{n-k+1}) \\ & + h_{n+1} \phi(y(t_n), \ldots, y(t_{n-k+1}))\end{aligned}$$

Consistenza

Definizione (Consistenza di un'estensione continua)

Un'estensione continua è consistente di ordine q se per ogni IVP e per ogni suddivisione Δ, $q \geq 1$ è il più grande intero tale che

$$\max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \|y(t) - \tilde{\eta}(t)\| = O(h_{n+1}^{q+1}) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(t_n + \theta h_{n+1}) = \quad & \beta_{n,1}(\theta) y(t_{n+j_n}) + \cdots + \beta_{n,j_n+i_n+1}(\theta) y(t_{n-i_n}) \\ & + h_{n+1} \Psi(y(t_{n+j_n}), \ldots, y(t_{n-i_n}), \theta) \end{aligned}$$

Convergenza

Definizione (Convergenza)

Un metodo numerico è convergente di ordine p se per ogni IVP e per ogni suddivisione Δ, posto $h = \max_{1 \leq n \leq N} t_n$ vale

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^p)$$

la sua estensione continua è convergente di ordine q se

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^q)$$

Matrice associata ad un metodo numerico

$$C_n = \begin{pmatrix} \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

0-Stabilità

Teorema

Sia

$$y_{n+1} = \begin{array}{l} \alpha_{n,1}y_n + \cdots + \alpha_{n,k}y_{n-k+1} \\ +h_{n+1}\phi(y_n, \ldots, y_{n-k+1}) \end{array} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

un metodo numerico a k passi consistente di ordine p e sia C_n la sua matrice associata allora se

- *esiste una norma $\|\cdot\|_*$ tale che $\|C_n\|_* \leq 1$*
- *la funzione f (che definisce l'IVP) è di classe C^p*
- *i punti $y_0 \ldots, y_{k-1}$ sono una approssimazione di ordine p della soluzione esatta*

allora il metodo è convergente di ordine p, inoltre se il metodo numerico ammette un'estensione continua consistente di ordine q allora tale estensione è convergente di ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

Esempio:Interpolazioni cubiche di Hermite

Esempio (Interpolazioni cubiche di Hermite)

Supponiamo di avere un metodo consistente di ordine $p \geq 3$, allora è possibile estendere questo metodo ad un metodo continuo consistente di ordine 3 usando le interpolazioni cubiche di Hermite, ovvero calcolato y_{n+1} approssimiamo la soluzione in $[t_n, t_{n+1}]$ con

$$\begin{aligned}\eta(t_n + \theta h_{n+1}) = \; & (1-\theta) y_n + \theta y_{n+1} \\ & + \theta(\theta - 1)[(1 - 2\theta)(y_{n+1} - y_n) \\ & + (\theta - 1) h_n f(y_n, t_n) + \theta h_n f(y_{n+1}, t_{n+1})]\end{aligned}$$

Metodi di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta ad ν stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y_{n+1}^{i} = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^{j}, Y_{n+1}^{j}) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^{i}, Y_{n+1}^{i}) \end{cases}$$

Metodi di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta ad ν stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y_{n+1}^i = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t_{n+1}^j, Y_{n+1}^j) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t_{n+1}^i, Y_{n+1}^i) \end{cases}$$

Metodi di Runge-Kutta

I metodi di Runge-Kutta ad ν stadi sono definiti da

Metodi di Runge-Kutta

$$\begin{cases} Y^i_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} g(t^j_{n+1}, Y^j_{n+1}) & 1 \leq i \leq \nu \\ y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^{\nu} b_i g(t^i_{n+1}, Y^i_{n+1}) \end{cases}$$

Integratori di prima classe

Teorema

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$

Integratori di prima classe

Teorema

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor$

Integratori di prima classe

Teorema

Se un metodo di Runge-Kutta è consistente allora è convergente

Teorema (Esistenza degli interpolatori di prima classe)

Dato un metodo di Runge-Kutta con ordine di convergenza p esiste un interpolatore con grado e ordine di convergenza $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$

Regolarità della soluzione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1, ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$\begin{aligned} y'(t_0)^- &= \phi(t_0) \\ y'(t_0)^+ &= f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))) \end{aligned}$$

Regolarità della soluzione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y\,(t - \tau)) & t_0 \le t \le t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \le t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1, ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$\begin{aligned} y'(t_0)^- &= \phi(t_0) \\ y'(t_0)^+ &= f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))) \end{aligned}$$

Regolarità della soluzione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1, ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$\begin{aligned} y'(t_0)^- &= \phi(t_0) \\ y'(t_0)^+ &= f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))) \end{aligned}$$

Regolarità della soluzione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1, ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$\begin{aligned} y'(t_0)^- &= \phi(t_0) \\ y'(t_0)^+ &= f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))) \end{aligned}$$

Regolarità della soluzione

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ y(t) = \phi(t) & t \leq t_0 \end{cases}$$

Osservazione

Se $f \in C^k$ allora la soluzione della DDE è una funzione C^k a tratti

Infatti può succedere l'incollamento tra la storia e la soluzione non sia C^1, ovvero

$$y'(t_0)^- \neq y'(t_0)^+$$

infatti

$$\begin{aligned} y'(t_0)^- &= \phi(t_0) \\ y'(t_0)^+ &= f(t_0, \phi(t_0), \phi(t_0 - \tau(t_0, \phi(t_0)))) \end{aligned}$$

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^2}{2} - 2t + \dfrac{3}{2} & 1 \le t \le 2 \\ \dots \end{cases}$$

$$y'(0)^- = \phi(0) = 1$$
$$y'(0)^+ = -y(0-1) = -1$$

Esempio

DDE

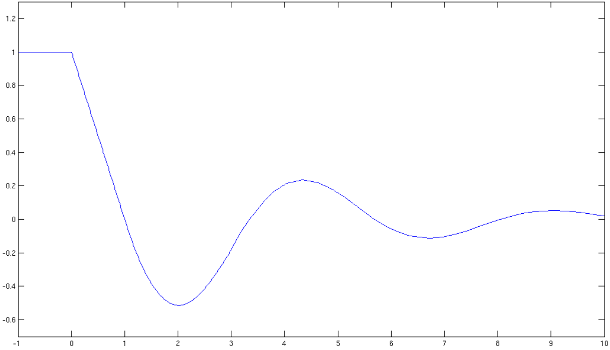
$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^2}{2} - 2t + \dfrac{3}{2} & 1 \le t \le 2 \\ \dots \end{cases}$$

$$y'(0)^- = \phi(0) = 1$$
$$y'(0)^+ = -y(0-1) = -1$$

Grafico della soluzione



Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \leq t \leq N \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Propagazione delle discontinuità

Con gli stessi conti si trova che y'' è discontinua in 1.

Non è difficile provare che $y^{(i+1)}$ è discontinua in i.

Esempio

DDE

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-1) & 0 \le t \le N \\ y(t) = 1 & t \le 0 \end{cases}$$

Propagazione delle discontinuità

Con gli stessi conti si trova che y'' è discontinua in 1.

Non è difficile provare che $y^{(i+1)}$ è discontinua in i.

Caso generale

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \leq s \leq k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ, mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Caso generale

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \le s \le k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ, mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Caso generale

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \leq s \leq k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ, mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Caso generale

Definizione (Discontinuità di ordine k)

Il punto ξ è una discontinuità di ordine k se per $0 \leq s \leq k-1$ si ha che $y^{(s)}(\xi)$ esiste e $y^{(k)}$ è lipschitziana e continua in un intorno di ξ, mentre $y^{(k+1)}$ è discontinua in ξ

Definizione (Argomento deviato)

$$\alpha(t) = t - \tau(t, y(t))$$

Le (eventuali) discontinuità della soluzione sono dovute alla propagazione della (eventuale) discontinuità di ordine 0 in t_0

Caso generale

Proposizione

Sia ξ uno zero semplice di

$$\alpha(\xi) = t_0$$

Allora y'' è discontinua in ξ

E' sufficiente derivare

$$y''(\xi)^+ = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\xi)^+ + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\alpha(\xi))^+ \alpha'(\xi)$$

$$y''(\xi)^- = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\xi)^- + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\alpha(\xi))^- \alpha'(\xi)$$

Caso generale

Proposizione

Sia ξ uno zero semplice di

$$\alpha(\xi) = t_0$$

Allora y'' è discontinua in ξ

E' sufficiente derivare

$$y''(\xi)^+ = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\xi)^+ + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\alpha(\xi))^+ \alpha'(\xi)$$

$$y''(\xi)^- = \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi))) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\xi)^- + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y(\xi), y(\alpha(\xi)))\, y'(\alpha(\xi))^- \alpha'(\xi)$$

Caso generale

Ripetendo gli stessi passaggi si trova che le y''' è discontinua in ξ' se questo è uno zero semplice di

$$\alpha(\xi') = \xi$$

Generalizzando

Proposizione (Discontinuità di grado p)

Le eventuali discontinuità di grado al più p sono

$$\begin{cases} \alpha(\xi_{k,j}) = \xi_{k-1,i} \\ \xi_{0,1} = t_0 \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq p$$

Caso generale

Ripetendo gli stessi passaggi si trova che le y''' è discontinua in ξ' se questo è uno zero semplice di

$$\alpha(\xi') = \xi$$

Generalizzando

Proposizione (Discontinuità di grado p)

Le eventuali discontinuità di grado al più p sono

$$\begin{cases} \alpha(\xi_{k,j}) = \xi_{k-1,i} \\ \xi_{0,1} = t_0 \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq p$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p*
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza q*
- *La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p*
- *L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$*

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è* 0*-stabile e consistente di ordine p*
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza q*
- *La suddivisione* Δ *contiene tutte le discontinuità* ξ_i *di ordine al più p*
- *L'interpolazione avviene in* $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è* 0*-stabile e consistente di ordine* p
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza* q
- *La suddivisione* Δ *contiene tutte le discontinuità* ξ_i *di ordine al più* p
- *L'interpolazione avviene in* $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \le n \le N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \le t \le t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p*
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza q*
- *La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p*
- *L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$*

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p*
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza q*
- *La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p*
- *L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$*

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Convergenza del metodo dei passi

Teorema

- *Il metodo è 0-stabile e consistente di ordine p*
- *L'interpolatore ha ordine di consistenza q*
- *La suddivisione Δ contiene tutte le discontinuità ξ_i di ordine al più p*
- *L'interpolazione avviene in $[t_{n-i_n}, t_{n+j_n+1}] \subseteq [\xi_i, \xi_{i+1}]$*

Allora allora il metodo è convergente con ordine $q' = \min\{p, q+1\}$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|y(t_n) - y_n\| = O(h^{q'})$$

e anche l'interpolatore converge con lo stesso ordine

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_f} \|y(t) - \eta(t)\| = O(h^{q'})$$

Domande

Tutta questa teoria è necessaria?

Cosa succede se Δ non contiene le discontinuità?

Domande

Tutta questa teoria è necessaria?

Cosa succede se Δ non contiene le discontinuità?

Domande

Tutta questa teoria è necessaria?

Cosa succede se Δ non contiene le discontinuità?

Esperimenti numerici

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} y \left(y(t) - \sqrt{2} + 1 \right) & t \in [1,3] \\ y(t) = 1 & t \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Esperimenti numerici

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} y\left(y(t) - \sqrt{2} + 1\right) & t \in [1,3] \\ y(t) = 1 & t \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Esperimenti numerici

DDE (Feldstein-Neves)

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} y\left(y(t) - \sqrt{2} + 1\right) & t \in [1,3] \\ y(t) = 1 & t \leq 1 \end{cases}$$

Soluzione

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 1 \leq t \leq 2 \\ \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{t} & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Esperimenti numerici

Metodo di Runge-Kutta convergente di ordine 3 e mentre l'interpolatore è convergente di ordine 2.

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$$b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta^2 + \theta$$

$$b_2(\theta) = 0$$

$$b_3(\theta) = \frac{3}{4}\theta^2$$

Esperimenti numerici

Metodo di Runge-Kutta convergente di ordine 3 e mentre l'interpolatore è convergente di ordine 2.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

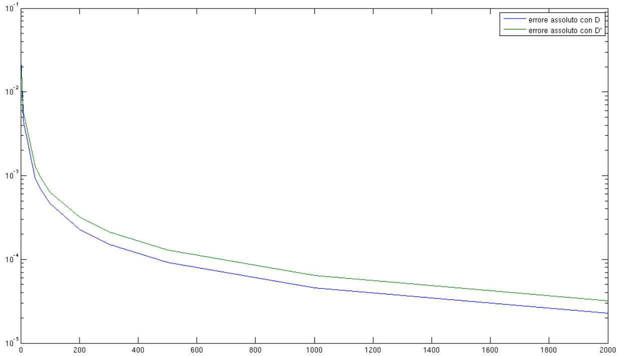
$$b_1(\theta) = -\frac{3}{4}\theta^2 + \theta$$

$$b_2(\theta) = 0$$

$$b_3(\theta) = \frac{3}{4}\theta^2$$

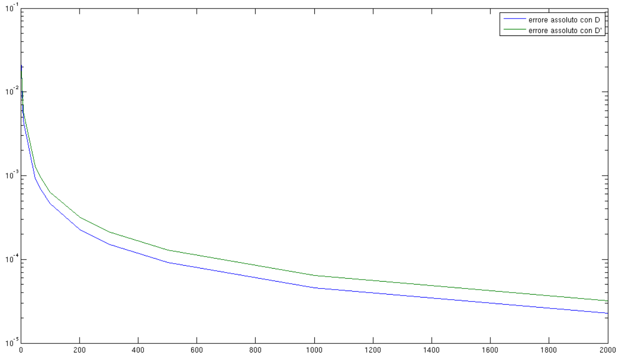
Esperimenti numerici

- C'è una discontinuità in 2
- Risolviamo il problema in $[1, 3.11111]$
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



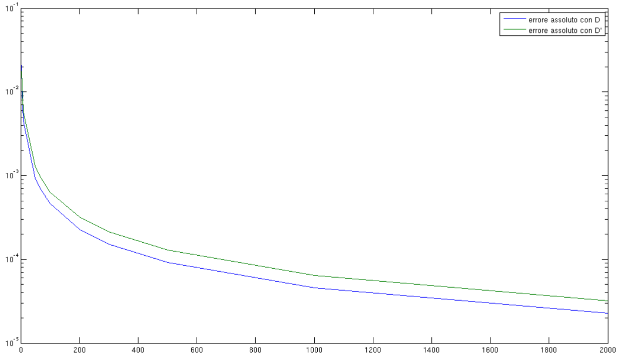
Esperimenti numerici

- C'è una discontinuità in 2
- Risolviamo il problema in $[1, 3.11111]$
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



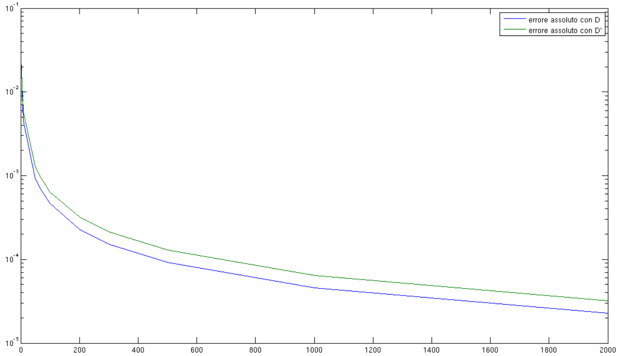
Esperimenti numerici

- C'è una discontinuità in 2
- Risolviamo il problema in $[1, 3.11111]$
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Esperimenti numerici

- C'è una discontinuità in 2
- Risolviamo il problema in $[1, 3.11111]$
- $\Delta = \{1, 2, 3.11111\}$
- $\Delta' = \{1, 1.7037, 2.4074, 3.1111\}$



Differenze tra IVP e DDE

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Cosa succede se:

- $\tau = 0$
- $\tau = 1$
- $\tau = 2$

Differenze tra IVP e DDE

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) & \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Cosa succede se:

- $\tau = 0$
- $\tau = 1$
- $\tau = 2$

Differenze tra IVP e DDE

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) & \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Cosa succede se:

- $\tau = 0$
- $\tau = 1$
- $\tau = 2$

Differenze tra IVP e DDE

Esempio

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Cosa succede se:

- $\tau = 0$
- $\tau = 1$
- $\tau = 2$

Differenze tra IVP e DDE

Esempio

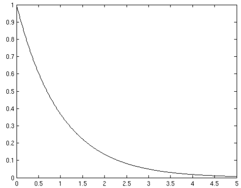
$$\begin{cases} y'(t) = -y(t-\tau) & \\ y(t) = 1 & t \leq 0 \end{cases}$$

Cosa succede se:

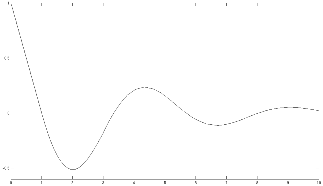
- $\tau = 0$
- $\tau = 1$
- $\tau = 2$

Differenze tra IVP e DDE

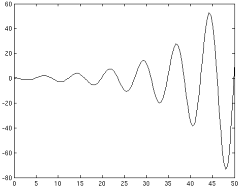
Figura: Grafici al variare del ritardo



(a) $\tau = 0, T = 5$



(b) $\tau = 1, T = 20$



(c) $\tau = 2, T = 50$

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Conclusione

Il ritardo influisce sul comportamento qualitativo della soluzione

E' importante capire da cosa dipende il ritardo

Equazione logistica

Il ritardo può dipendere da clima, temperatura, presenza di predatori,... e può causare l'estinzione di una specie

Fine

Grazie per l'attenzione