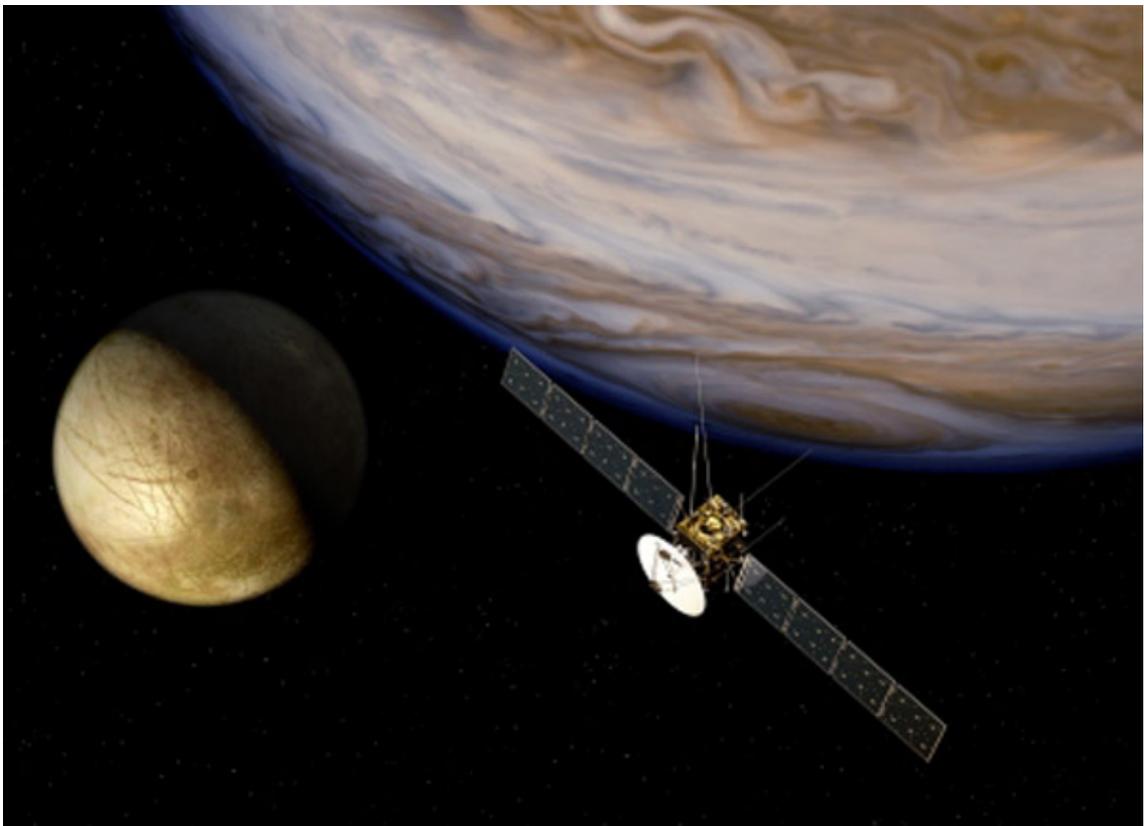


Seminario di Determinazione orbitale

JUICE

JUPITER ICY MOONS EXPLORER



Mele Giampaolo

18 novembre 2012

Indice

1	Introduzione	5
1.1	Descrizione divulgativa	5
1.2	Struttura del seminario	6
2	Gravity assist	7
2.1	Sfera di influenza	7
2.2	Gravity assist	9
2.3	Problemi pratici	13
2.4	Juice: manovre e inserimento nell'orbita di Giove	13
2.4.1	Fasi della missione	14
3	Armoniche sferiche	19
3.1	Punto materiale	19
3.2	Massa di un corpo esteso	20
3.3	Funzioni armoniche	21
3.4	Armoniche sferiche zonali	21
3.5	Armoniche sferiche tesserali	24
3.6	Determinazione del campo gravitazionale	27
3.6.1	Determinazione orbitale, parametri dinamici e problema ai minimi quadrati	27
3.7	Juice: Campo gravitazionale delle lune di Giove	28
3.7.1	Obbiettivi	28
3.7.2	Campo gravitazionale di Callisto, problemi di risonanza	29
4	Conclusioni	31
4.1	Costanti e Dati	31
4.2	Coefficienti armonici di Callisto	31

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Descrizione divulgativa

Juice è una missione spaziale della *ESA* che verrà lanciata nel 2022. L'acronimo Juice sta per "Jupiter Icy Moon Explorer", uno dei suoi obiettivi principali sarà lo studio di Ganimede (luna di Giove); questa infatti è coperta da uno strato di ghiaccio e c'è la possibilità che sotto tale strato ci sia dell'acqua o comunque delle condizioni che permetterebbero lo sviluppo della vita. Sembrerebbe assurdo che ad una tale distanza dal sole sia possibile la vita, d'altronde già nella terra si è osservato che ad elevate profondità negli oceani c'è vita, ci sono dei microrganismi capaci di trasformare in energia un singolo quanto di luce. Pertanto si pensa che qualcosa di simile sia possibile su Ganimede. Si faranno degli studi analoghi sulle altre lune galileiane: Io, Callisto ed Europa, nonostante in questi altri casi ci saranno dei problemi tecnici che saranno presentati nei prossimi capitoli.

Un altro aspetto interessante è che Juice migliorerà la conoscenza del sistema solare, infatti in un certo senso Giove e le sue lune formano un mini sistema solare, la sua complessità è paragonabile appunto a quella del sistema solare, dunque è certamente utile fare uno studio in scala diversa.

Ci sono varie complicazioni nella missione, le principali sono dovute alla struttura di Giove, questo infatti è un pianeta gassoso e genera un forte campo magnetico che interagisce con le lune stesse, pertanto sarà necessario tenere in considerazione questo aspetto ed effettuare le varie manovre in modo sicuro onde evitare il danneggiamento della sonda.

Si studierà inoltre il campo gravitazionale delle lune di Giove, soprattutto di Ganimede.

Questi sono solo alcuni degli obiettivi di Juice, d'altronde in questo contesto ci si limiterà ad

approfondire solo questi, per ulteriori dettagli si fa riferimento alla referenza principale [1].

1.2 Struttura del seminario

Dato che questo lavoro rappresenta l'esame finale del corso *Determinazione orbitale* tenuto dal professor Milani presso l'Università di Pisa, sarà strutturato nel seguente modo: si affronteranno i vari argomenti chiave della missione facendo prima dei richiami di teoria (a volte considerando casi semplificati) e successivamente si analizzerà l'applicazione nel caso della missione Juice.

Si inizierà con l'esaminare la fase di viaggio, ovvero si descriveranno le manovre necessarie per arrivare a Giove (*gravity assist*) e l'inserimento in orbita attorno a Giove. Si esaminerà poi come verrà eseguito lo studio del campo gravitazionale e in fine si trarranno le conclusioni.

Capitolo 2

Gravity assist

Come già accennato, durante la missione Juice saranno necessarie una serie di manovre *gravity assist*. L'obiettivo di una manovra gravity assist è quello di cambiare la velocità, in genere la si aumenta, ma è possibile eseguire tale manovra anche per rallentare la sonda o cambiare l'inclinazione dell'orbita.

In questo capitolo si vuole dare l'idea che è alla base di tali manovre sviluppando quando possibile i conti senza però rendere tecnica e pesante tale discussione. Si inizierà con il definire la *sfera di influenza* per poi dare una descrizione della manovra *gravity assist*, svolgendo però i calcoli in un caso ideale e dando un cenno alla problematiche pratiche.

2.1 Sfera di influenza

Si consideri il problema dei tre corpi, per rendere chiaro il concetto si pensi pure al sistema sole-pianeta-satellite, la *sfera di influenza* detta anche *Sfera di Hill* è una regione di spazio (approssimativamente sferica) contenente il pianeta, nella quale la forza gravitazionale che esercita il pianeta sul satellite è maggiore della forza gravitazionale del sole sul satellite. E' possibile derivare formalmente la formula che determina il raggio della sfera di Hill (*raggio di Hill*) ma è necessario introdurre alcune definizioni tecniche. Per i dettagli si veda ad esempio [3]. Ad ogni modo il concetto di sfera di influenza è del tutto intuitivo ed è possibile derivare in modo non rigoroso ma concettualmente corretto, il raggio della sfera di Hill.

Come accennato prima è possibile considerare il sistema sole-pianeta-satellite in modo tale da poter rendere chiaro il concetto. Allora per ottenere una stima del raggio di Hill, se si pone la velocità orbitale del satellite attorno al pianeta uguale alla velocità orbitale del satellite attorno al sole allora l'influenza gravitazionale del sole è circa uguale a quella del pianeta. Pertanto determinando la distanza pianeta-satellite si determina il raggio della sfera di Hill.

NB : La velocità orbitale di un corpo è la velocità con cui esso orbita attorno al baricentro del

sistema. Quindi è sufficiente calcolare la velocità con cui il primo corpo orbita attorno al secondo e dividere per la distanza.

Posto $\Omega_{pianeta}$ la velocità orbitale del satellite rispetto al pianeta, Ω_* quella rispetto al sole, $M_{pianeta}$ la massa del pianeta, M_* quella del sole, a il semiasse maggiore dell'orbita pianeta-sole ed R_H il raggio dell'orbita satellite-pianeta (che risulterà per l'appunto essere il raggio di Hill), risulta

$$\begin{aligned}\Omega_{pianeta} &= \Omega_* \\ \sqrt{\frac{GM_{pianeta}}{R_H^3}} &= \sqrt{\frac{GM_*}{a^3}} \\ \frac{M_{pianeta}}{R_H^3} &= \frac{M_*}{a^3} \\ R_H &= a \sqrt[3]{\left(\frac{M_{pianeta}}{M_*}\right)}\end{aligned}$$

In questi semplici conti è stata utilizzata la terza legge di Keplero e la teoria sulle forze centrali.

Pertanto si è giunti alla formula

$$R_H = a \sqrt[3]{\left(\frac{M_{pianeta}}{M_*}\right)}$$

Remark 2.1. La formula trovata è corretta ma la sua derivazione non è formale, per una discussione formale si veda per l'appunto la referenza [3]. Svolgendo i calcoli in modo formalmente corretto è possibile ottenere delle stime migliori. I conti sono fatti supponendo di avere un sistema sole-pianeta-satellite, nel caso di Juice nello specifico si consideranno i casi

- Sole-Terra-sonda;
- Sole-Venere-sonda;
- Giove-Ganimede-sonda;
- Giove-Europa-sonda.

Osservazione 2.1. Affinchè un satellite orbiti attorno ad un pianeta deve trovarsi nella sua sfera di influenza, ad esempio la luna è nella sfera di influenza della terra. Inoltre quando un corpo entra nella sfera di influenza di un altro corpo c'è scambio di energia, lo si vedrà bene nella prossima sezione, ad ogni modo è su questo che si basa la manovra gravity assist.

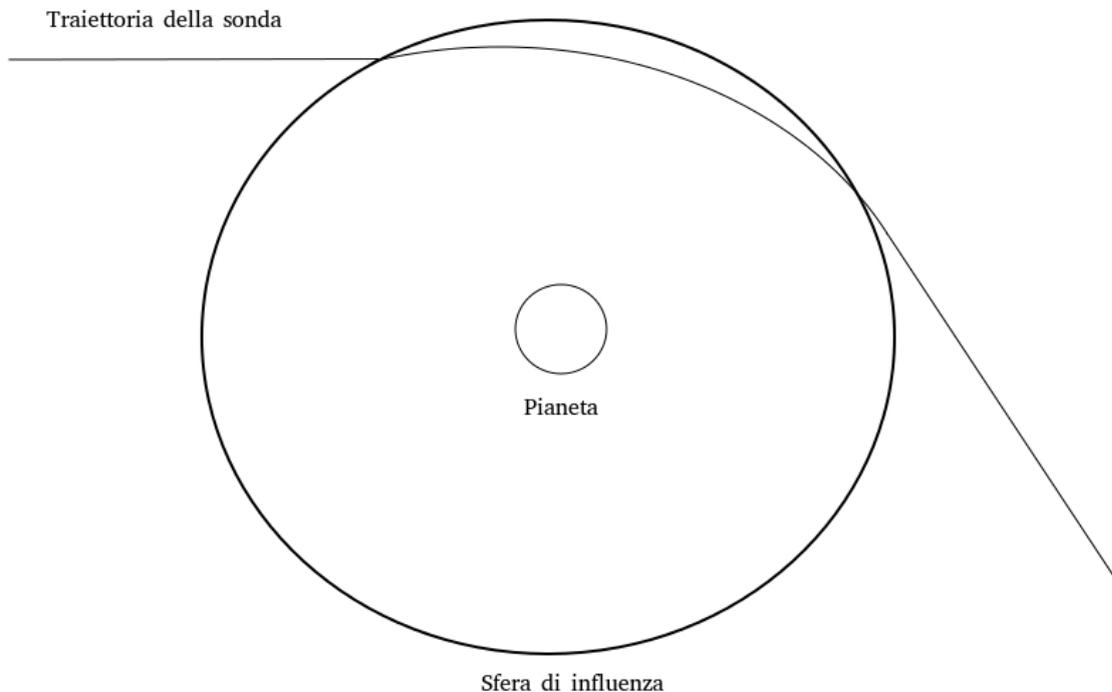
Nota 2.1. L'analisi fatta è molto superficiale e lo scopo è di trasmettere solo l'idea, ad ogni modo è chiaro che non è così semplice determinare una tale regione, infatti ci sono anche altre forze che possono perturbare l'orbita del satellite, ad esempio la pressione di radiazione o l'effetto Yarkovsky.

2.2 Gravity assist

Per ulteriori dettagli sulla parte che segue si consulti la referenza [4].

L'idea di base del gravity assist è quella di sfruttare l'attrazione gravitazionale di un pianeta per aumentare (o diminuire) la velocità di una sonda. Quindi se una sonda ha velocità v_i prima di entrare nel raggio di influenza di un pianeta, quando ne uscirà avrà una velocità v_f , quindi si sarà ottenuto un Δv .

Quando una sonda parte dalla terra ha una certa velocità, daltronde può esser necessario aumentarla, ad esempio, come si vedrà nella sezione successiva, è necessario modificare la velocità della sonda per arrivare fino a Giove ed effettuare l'inserimento in orbita. Pertanto per aumentare la velocità ci sono due modi: provocare dei Δv con apparato propulsivo, quindi con dispendio di propellente (molto costoso e non sempre possibile) oppure eseguire una manovra gravity assist (chiaramente a volte si usano strategie ibride, ovvero si esegue una manovra gravity assist usando l'apparato propulsivo per direzionare la sonda nel modo giusto).



Come notazione assumiamo che M sia la massa del pianeta, m quella della sonda, v_i la velocità della sonda prima di entrare nella sfera di influenza, v_f appena uscita, V_i è la velocità del pianeta prima che la sonda entri nel suo raggio di influenza, V_f invece quando è appena uscita.

Dalla conservazione della quantità di moto del sistema pianeta-sonda si ha che

$$m\mathbf{v}_i + M\mathbf{V}_i = m\mathbf{v}_f + M\mathbf{V}_f$$

pertanto si ottiene

$$\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_i = \frac{m}{M}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_f)$$

Daltronde m/M è un numero molto piccolo, ad esempio nel caso di Venere la M è dell'ordine di 10^{24} kg, se la sonda ha una massa dell'ordine di 10^3 kg allora m/M è dell'ordine di 10^{-21} , quindi è possibile trascurare il cambiamento di velocità del pianeta, quindi si definisce

$$\mathbf{V} := \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_f$$

Assunzione: si è supposto che la velocità del pianeta non cambi durante la manovra. Si considerino ora le velocità relative sonda-pianeta, ovvero

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$$

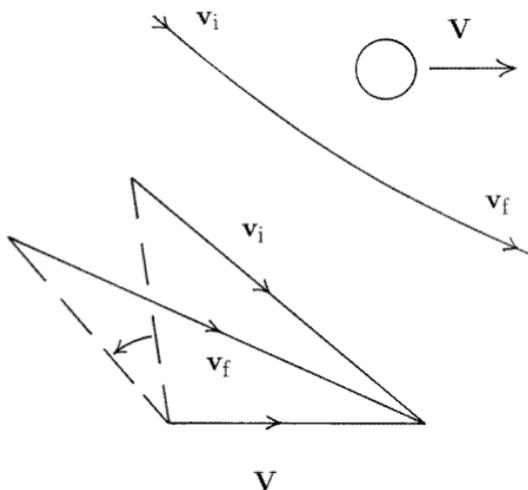
$$\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V}$$

Per la conservazione dell'energia (la distanza pianeta-sonda è la stessa quando questa entra nella sfera di influenza e quando esce essendo per l'appunto questa una sfera) risulta:

$$\|\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{u}_f\|$$

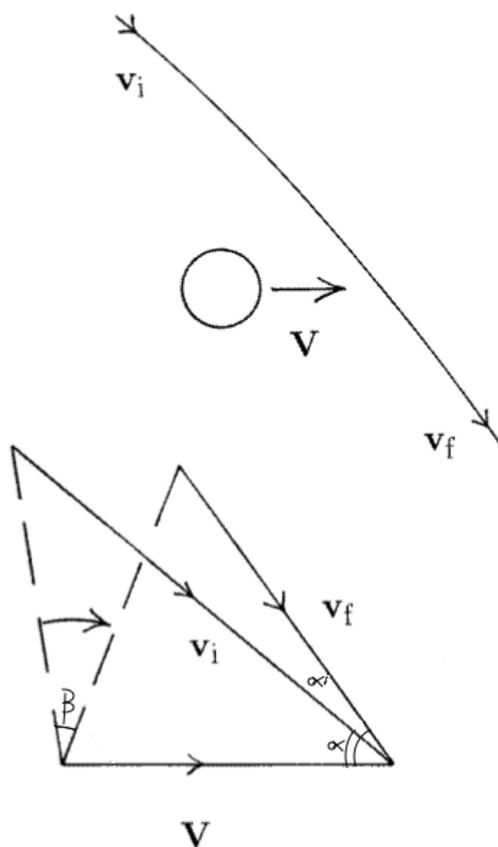
Quindi nel sistema in cui il pianeta è fermo la velocità della sonda non è cambiata, mentre è cambiata nel riferimento in cui il pianeta si muove. Si mostrerà a breve che valgono le seguenti proprietà:

- se la sonda passa dietro il pianeta allora la sua traiettoria viene deflessa: se la deflessione è moderata $\|\mathbf{v}_i\| \leq \|\mathbf{v}_f\|$ (accelerazione) altrimenti $\|\mathbf{v}_i\| \geq \|\mathbf{v}_f\|$ (rallentamento);
- l'impulso massimo si ha se \mathbf{v}_f è parallelo a \mathbf{V} ;
- ogni altro impulso che non è quello massimale (ovvero se \mathbf{v}_f non è parallelo a \mathbf{V}) può essere ottenuto in due modi diversi (con due diversi *flyby* ovvero incontri ravvicinati con il pianeta);
- la velocità può essere aumentata al massimo di $2\|\mathbf{V}\|$ ma in tal caso si avrebbe una collisione.



Osservazione 2.2. Se la sonda passa davanti al pianeta (gli va incontro) allora la velocità della sonda diminuisce alla fine della manovra, basterà ripetere i conti che si stanno per fare sostituendo a \mathbf{V} il suo opposto $-\mathbf{V}$

Sia dunque α l'angolo tra \mathbf{V} e \mathbf{v}_i ed α' l'angolo tra \mathbf{V} e \mathbf{v}_f e sia β l'angolo di deflessione della sonda, ovvero l'angolo tra le linee tratteggiate.



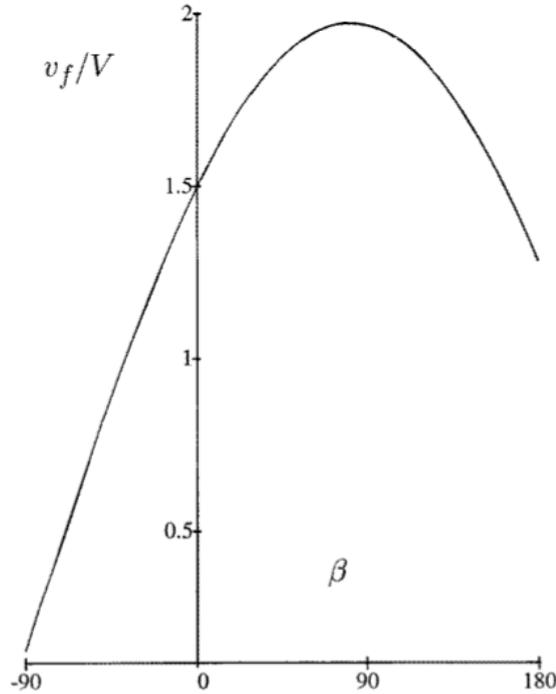
Ponendo

$$v_i = \|\mathbf{v}_i\|, \quad v_f = \|\mathbf{v}_f\|, \quad V = \|\mathbf{V}\|,$$

con la trigonometria si riescono a trovare le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2V \{V(1 - \cos \beta) + v_i [\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha]\}, \\ v_f \cos \alpha' &= V(1 - \cos \beta) + v_i \cos(\alpha - \beta), \\ v_f \sin \alpha' &= V \sin \beta + v_i \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Nel caso che si sta esaminando sono fissate le quantità v_i, V, α quindi si ha che v_f dipende da β , si può mostrare che $v_f(\beta)$ è inizialmente crescente, poi raggiunge un massimo per un certo β_{\max} e poi decresce. Ad esempio per $v_i/V = 1,5$ ed $\alpha = 40^\circ$ si ha il grafico seguente dove è mostrata la dipendenza di v_f/V rispetto β .



In particolare si trova che

$$\tan \beta_{\max} = \frac{v_i \sin \alpha}{v_i \cos \alpha - V}$$

ed è raggiunto se $\alpha' = 0$ e \mathbf{v}_f è parallelo a \mathbf{V} come annunciato all'inizio. Si osserva inoltre che per ogni v_f non massimale esistono due angoli di deflessione β_1 e β_2 che permettono il raggiungimento di tale velocità e vale inoltre la relazione

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\beta_{\max}$$

Nella pratica è preferibile utilizzare l'angolo di deflessione più piccolo dato che in questo modo si esegue un flyby più distanziato durante la manovra e ci sono meno rischi.

Osservazione 2.3. L'angolo di deflessione non è una variabile libera anche se con la propulsione si potrebbe sceglierlo forzando la sonda ad uscire dalla sfera di influenza prima che la manovra sia terminata.

La sonda durante la manovra orbita attorno al pianeta, dunque segue un'orbita Kepleriana

$$r(\theta) = \frac{h^2/GM}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad \text{con} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{G^2M^2}},$$

dove (r, θ) sono le coordinate polari centrate nel pianeta nel piano generato dai vettori \mathbf{v}_i, \mathbf{V} ed (h, \mathcal{E}) sono il momento angolare e l'energia per unità di massa della sonda, entrambi sono costanti. Se l'orbita è iperbolica allora l'energia $\mathcal{E} > 0$ mentre l'eccentricità $\epsilon > 1$ e la distanza minima sonda-pianeta è (ponendo $\theta = 0$)

$$r_{\min} = \frac{h^2/GM}{1 + \epsilon}.$$

Chiaramente per non avere collisione questo raggio deve esser maggiore del raggio del pianeta. A questo punto si è in grado di calcolare l'angolo di deflessione, infatti se $\theta \rightarrow \pm \arccos(-1/\epsilon)$ allora $r \rightarrow \infty$ (quindi la sonda esce dalla sfera di influenza) e l'incontro ha provocato una deflessione di

$$\beta = 2 \arccos(-1/\epsilon) - \pi.$$

Fissata una v_f non massimale, dei due angoli di deflessione, il più piccolo dà luogo a r_{\min} .

In conclusione si è trovato che una sonda che entra nella sfera di influenza di un pianeta con una certa velocità v_i ne esce con una velocità v_f e la sua traiettoria è stata deflessa di un angolo β secondo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \arccos(-1/\epsilon) - \pi \\ v_f^2 &= v_i^2 + 2V \{V(1 - \cos \beta) + v_i [\cos(\alpha - \beta) - \cos \alpha]\} \end{aligned}$$

dove ϵ è l'eccentricità dell'orbita della sonda attorno al pianeta (calcolabile a partire dalle altre quantità note usando Keplero), V è il valore assoluto della velocità del pianeta (supposta costante) e α è l'angolo tra V e v_i .

2.3 Problemi pratici

La descrizione appena fatta è corretta ma non tiene conto di molti fattori

- Il pianeta non è un punto materiale, quindi bisognerà accertarsi che r_{\min} sia maggiore del raggio del pianeta ad esempio si pongono delle condizioni sul *parametro di impatto*
- V non è costante ma cambia costantemente direzione, in particolare i flyby durano qualche giorno e V ruota di qualche grado
- Durante la manovra la sonda scambia una piccola quantità di energia anche con il sole.

2.4 Juice: manovre e inserimento nell'orbita di Giove

Per ulteriori dettagli sulla parte che segue si consulti il capitolo 7 di [1].

La missione Juice prevede che la sonda parta dalla terra e inizi a compiere un'orbita eliocentrica; per risparmiare propellente verranno eseguiti i gravity assist in sequenza Terra-Venere-Terra-Terra, successivamente ci sarà la fase di inserimento nell'orbita di Giove, quindi da qui la sonda sarà in orbita giovianica; per l'inserimento in tale orbita sarà necessario ridurre la velocità della sonda usando i gravity assist rispettivamente con le lune Callisto e Ganimede, oltre che alla diminuzione di velocità tali manovre serviranno anche per definire meglio la traiettoria. Successivamente ci saranno dei flyby con Europa seguiti da una successione di gravity assist con Callisto per inclinare l'orbita

giovicentrica di 30° ai fini di studiare Giove da alte latitudini e studiare il suo campo magnetico. Infine la sonda sarà messa in orbita ellittica attorno Ganimede e verrà progressivamente ridotta la quota fino a quando non ci sarà l'impatto tra la sonda e Ganimede con il quale terminerà la missione.

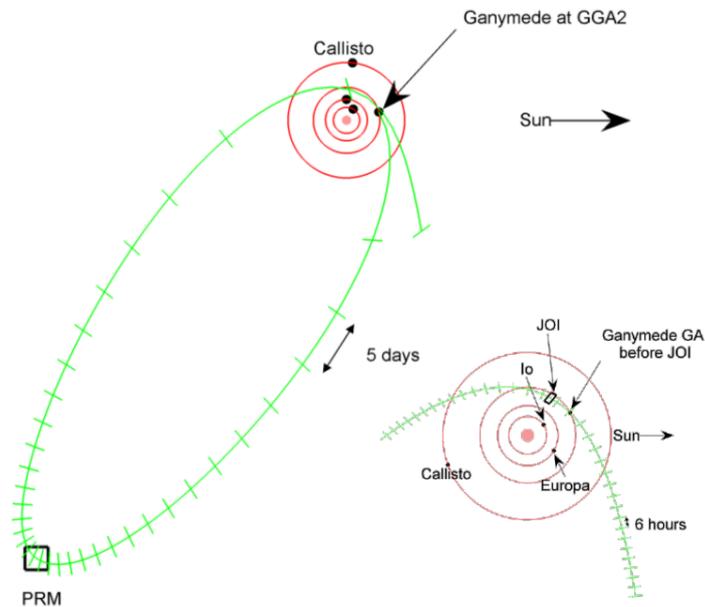
2.4.1 Fasi della missione

Per eseguire le varie manovre è necessario che la sonda si trovi in un esatto istante in un certo posto per incontrare i vari pianeti/lune, pertanto la missione non può iniziare in qualsiasi momento. Per Juice sono state individuate due possibili date, dette *finestre di lancio*, una nel Giugno 2022 e l'altra nell'Agosto 2023. La missione durerà 11 anni in entrambi i casi, dunque terminerà rispettivamente nel Giugno 2033 o nel Dicembre 2034. La massa di propellente necessaria è di circa 2900 kg in grado di fornire un $\Delta v = 2643 \text{ m/s}$ La missione Juice può esser suddivisa nelle seguenti fasi

- Lancio e viaggio interplanetario per arrivare a Giove (7.6 anni oppure 8 anni in base alla finestra di lancio);
- Inserimento nell'orbita di Giove con riduzione dell'energia (11 mesi);
- Flyby su Europa (36 giorni);
- Riduzione dell'energia, ovvero di V_{inf} (velocità all'infinito) della sonda (2 mesi), inclinazione dell'orbita e studio di Giove ad alte latitudini (200 giorni) usando i gravity assist con Callisto;
- Riduzione dell'energia per il trasferimento su un'orbita ellittica attorno Ganimede (11 mesi);
- Studio di Ganimede (282 giorni).

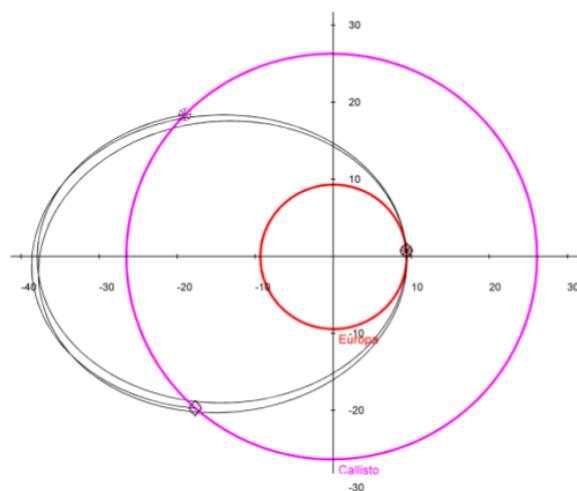
La sonda partirà dalla terra con una velocità di 3.5 km/s e dopo i flyby terra-venere-terra-terra acquisterà una velocità pari a 9.5 km/s .

Una fase delicata è l'inserimento nell'orbita di Giove e tale manovra è detta anche *JOI* (Jupiter orbit insertion); ai fini di questa operazione è necessario che il motore principale sia acceso per almeno 2 ore. Prima di eseguire tale manovra sarà necessario eseguire un gravity assist con Ganimede; dal punto di vista dell'energia cinetica è preferibile farlo quanto più possibile vicino Giove, ma il forte campo magnetico potrebbe danneggiare la sonda, perciò si è deciso di limitare tale distanza imponendo che la sonda non si avvicini a Giove più di quanto l'orbita di Ganimede non lo faccia, ovvero 15 volte il raggio di Giove R_J . Il gravity assist con Ganimede ridurrà il Δv richiesto di 300 m/s . La manovra JOI inserirà la sonda in un'orbita con un raggio pari a $3159 R_J$, che sarà in risonanza 25 : 1 con Ganimede. Verrà subito eseguita una manovra per evitare che nel successivo incontro con Ganimede la sonda sia troppo vicina a Giove (onde evitarne il danneggiamento) e per ridurre la velocità relativa a Giove. Di seguito c'è la traiettoria della prima orbita attorno a Giove che durerà 179 giorni.



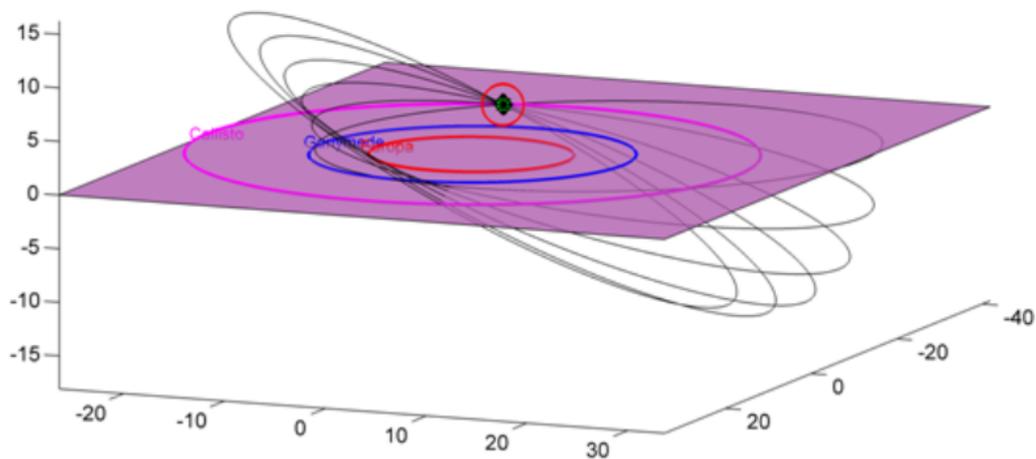
L'orbita verrà ulteriormente ridotta da tre successivi gravity assist con Ganimede che renderanno l'orbita successivamente in risonanza 7:1, 4:1 e 3:1 con Ganimede, quindi la velocità verrà ridotta, inoltre queste manovre porteranno la sonda da un'inclinazione iniziale di 9° rispetto l'equatore di Giove ad un'inclinazione nulla. Alla fine l'apogiove sarà $41 R_j$ mentre il perigiove sarà $11.6 R_j$.

Dopo aver sufficientemente ridotto la velocità saranno eseguiti due flyby con Europa eseguiti in modo da non far danneggiare la sonda a causa del campo magnetico. Tali flyby verranno eseguiti senza cambiare l'inclinazione dell'orbita (rispetto l'equatore di Giove); purtroppo questo vincolo è dovuto alle maree e dal fatto che l'orbita di Europa è in risonanza spin-orbita con Giove. Quello che è possibile fare è eseguire i flyby per vedere due zone diverse; l'obbiettivo è quello di arrivare a quota 400 km durante i flyby. Nell'immagine che segue in porpora è indicata l'orbita di Callisto, in rosso quella di Europa e in nero quella della sonda, l'origine è centrata in Giove.



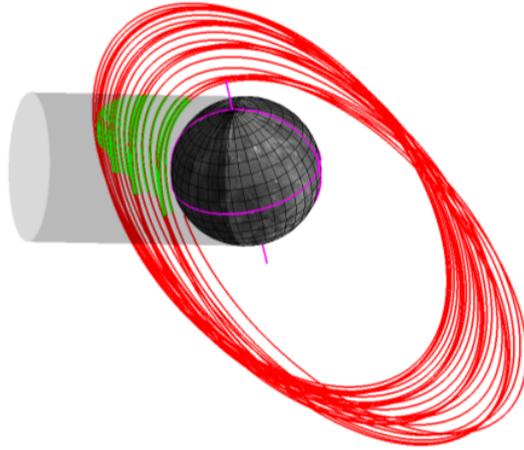
Successivamente con una successione di gravity assist con Callisto-Ganimede-Callisto, in 66 giorni si riuscirà a diminuire l'energia, quindi il V_{inf} .

Una successione di gravity assist con Callisto farà inclinare l'orbita di 29° ; nell'immagine seguente è rappresentata la successione di manovre dove per i colori si mantiene il significato dell'immagine precedente.



La sonda sarà in risonanza con Callisto e durante i flyby vedrà quasi sempre le stesse zone, si spera di poter migliorare tale aspetto, se infatti fosse possibile avere flyby su zone differenti si potrebbero ottenere informazioni sul campo gravitazionale come si vedrà più avanti. Dopo che si è raggiunta l'inclinazione di 29° con la stessa tecnica questa verrà nuovamente ridotta per riportare la sonda ad un'orbita ad inclinazione nulla. Durante questi flyby si raggiungerà una quota di 200 km , inoltre durante ogni flyby si otterrà $\Delta v = 10 \text{ m/s}$.

Successivamente si effettueranno una serie di gravity assist Callisto-Ganimede-Callisto per ridurre la velocità della sonda (60 giorni) per poi eseguire una manovra che metterà la sonda in orbita attorno a Ganimede. A questo punto la sonda resterà sempre in orbita attorno Ganimede cambiando però tipo di orbita nelle varie fasi: si avranno orbite circolari ed ellittiche a diverse quote e diverse inclinazioni, il problema principale di questa fase finale sono le zone d'ombra, infatti la sonda necessita di luce dato che disporrà di pannelli solari. L'immagine seguente mostra la fase finale.



La missione si concluderà con l'impatto tra la sonda e Ganimede.

Capitolo 3

Armoniche sferiche

Il materiale per scrivere questo capitolo è stato preso dal capitolo 13 di [2] e dagli appunti presi a lezione

3.1 Punto materiale

Si consideri un punto materiale di massa M nella posizione \mathbf{p} , questi genera un campo gravitazionale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{GM}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^3}(\mathbf{p} - \mathbf{x}),$$

dove G è la costante di gravitazione universale (usando come sistema il CGS questa vale circa $6.6726 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3/(\text{s}^3 \text{gr})$). Pertanto il potenziale è definito su $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{p}\}$. Dato che $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$ (il campo è irrotazionale) allora esiste una U detta energia potenziale gravitazionale tale che $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\text{grad} U(\mathbf{x})$, in particolare, posto $r = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|$, il potenziale è

$$U(r) = \frac{GM}{r}.$$

Dato un insieme limitato W con bordo S , sia \mathbf{n} la normale esterna alla superficie S , dal teorema di Gauss si ha che, se il bordo è almeno C^1 a tratti allora per il flusso del campo vale la formula seguente

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_W \text{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

dove div è l'operatore *divergenza* definito come la somma delle derivate parziali della funzione. Si osserva subito che $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$, pertanto se $\mathbf{p} \notin W$ allora

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_W \text{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = 0.$$

Se invece $\mathbf{p} \in W$ non vale quanto scritto sopra dato che \mathbf{v} non è definita in \mathbf{p} ; allora si considera una palla $B(\mathbf{p}, \bar{r})$ tale che $B(\mathbf{p}, \bar{r}) \subset W$ (tale palla esiste a meno che \mathbf{p} non sia sul bordo di W , in tal caso varrebbe il ragionamento fatto prima, infatti il bordo di un insieme ha misura nulla).

Pertanto si trova che

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_W \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{W \setminus B(\mathbf{p}, \bar{r})} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{B(\mathbf{p}, \bar{r})} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{B(\mathbf{p}, \bar{r})} \operatorname{div}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{S(\mathbf{p}, \bar{r})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,
 \end{aligned}$$

Dove $S(\mathbf{p}, \bar{r})$ è la sfera di centro \mathbf{p} e raggio \bar{r} (il bordo della palla). Daltronde ora basta fare il conto, infatti \bar{r} è costante, $\mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})/\bar{r}$, quindi

$$\begin{aligned}
 \int_{S(\mathbf{p}, \bar{r})} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S(\mathbf{p}, \bar{r})} -\frac{GM}{r^2} dS \\
 &= -4\pi r^2 \frac{GM}{r^2} \\
 &= -4\pi GM.
 \end{aligned}$$

Pertanto si è riusciti a trovare una formula per il flusso del campo gravitazionale generato da un punto materiale. Si vedrà nella prossima sezione che nel caso di un corpo continuo si riusciranno a fare ragionamenti simili.

3.2 Massa di un corpo esteso

Si supponga di avere un corpo esteso che occupa lo spazio $W \subset \mathbb{R}^3$, allora si adotterà il punto di vista continuo, ovvero si supporrà che esista una distribuzione continua di massa $\rho(\mathbf{x})$ definita su W e la massa totale del corpo sarà

$$M = \int_W \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Chiaramente questa formula non è operativa, cioè non è possibile da questa calcolare la massa di un pianeta; d'altronde se si suppone di poter misurare \mathbf{v} , e questo è possibile farlo con un *accelerometro*, allora è possibile, usando il teorema di Gauss, calcolare la massa totale. Infatti come nel caso discreto si può dimostrare che

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin W \\ -4\pi G\rho(\mathbf{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Pertanto applicando il teorema di Gauss si ha

$$\begin{aligned} M &= \int_W \rho \, d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{4\pi G} \int_W \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{4\pi G} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \end{aligned}$$

Pertanto se si ha un satellite artificiale attorno ad un pianeta e questi è in grado di misurare \mathbf{v} , supponendo che la sua orbita avvenga su una sfera e che sia installato un accelerometro, allora è possibile stimare la massa del pianeta.

3.3 Funzioni armoniche

Si consideri come nella sezione precedente un corpo esteso situato in W con densità di massa $\rho(\mathbf{x})$, allora si è visto che

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin W \\ -4\pi G\rho(\mathbf{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Daltronde $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = \Delta U$, dove Δ è l'operatore Laplaciano; pertanto si ottiene

$$\Delta U(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin W \\ -4\pi G\rho(\mathbf{x}) & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

In particolare $\Delta U = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus W$; le funzioni con laplaciano nullo su un certo insieme sono dette funzioni armoniche su quell'insieme, quindi U è armonica fuori da W . L'obiettivo è risolvere l'equazione di Laplace $\Delta U = 0$ e quindi caratterizzare le funzioni armoniche.

3.4 Armoniche sferiche zonali

Richiamo: laplaciano in coordinate sferiche

Si considerino le coordinate sferiche (r, θ, λ) , $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lambda \in [-\pi/2, \pi/2]$; sia $U(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \lambda)$, ovvero Φ è il potenziale gravitazionale letto nelle nuove coordinate, allora

$$r^2 \Delta U = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \Delta_S U$$

dove Δ_S è detto operatore di Laplace-Beltrami ed è indipendente da r e può esser scritto esplicitamente nella forma

$$\Delta_S U = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2}.$$

Si supponga di voler calcolare il potenziale di un corpo esteso, si inizia da un caso più semplice, ovvero si suppone che il corpo sia un solido per rotazione, ad esempio attorno l'asse z , e si chiede

che anche la densità di massa abbia la medesima proprietà, ovvero $\rho(x, y, z) |_{x^2+y^2=k}$ è costante, allora il potenziale non dipenderà da λ , pertanto risulta $U(x, y, z) = \Phi(r, \theta)$. In questo caso il laplaciano diventa

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right).$$

L'obbiettivo è risolvere l'equazione $\Delta U = 0$; per farlo si usa il metodo di separazione delle variabili, ovvero si cercano le soluzioni della forma $U(x, y, z) = \Phi(r, \theta) = R(r)F(\theta)$. Sostituendo nell'equazione di Laplace si trova

$$\frac{RF}{r^2} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{F \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{dF}{d\theta} \right) \right] = 0$$

Si osserva che questa è la somma di due parti, una dipendete da r e l'altra da θ , quindi, affinché sia soddisfatta l'uguaglianza, ogni singolo addendo deve esser costante (con segni opposti); poniamo tale costate uguale a $l(l+1)$ con $l > 0$ (questa scelta sarà comoda negli sviluppi successivi). Allora l'equazione di Laplace si spezza nelle due equazioni equivalenti

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \\ \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{dF}{d\theta} \right) = -l(l+1)F \cos \theta. \end{cases}$$

Si cerca la soluzione della prima equazione della forma $R(r) = r^\gamma$, sostituendo si trovano le condizioni su γ che sono: $\gamma(\gamma+1) = l(l+1)$, quindi si hanno due scelte: $\gamma = l$ oppure $\gamma = -l-1$, quindi si avrà

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}.$$

Nel caso che si sta esaminando si pone $A = 0$, infatti si sta cercando di determinare il campo gravitazionale di un corpo esteso, quindi si vorrà che per $r \rightarrow \infty$ il potenziale sia nullo, mentre se A fosse diverso da 0 allora tale potenziale tenderebbe ad infinito.

Per risolvere l'equazione in $F(\theta)$ si considera il cambio di variabili $\mu = \sin \theta$; si pone $f(\mu) := F(\theta)$, quindi la seconda equazione diventa

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 f}{d\mu^2} - 2\mu \frac{df}{d\mu} + l(l+1)f = 0.$$

Questa è detta anche *equazione di Legendre* e per risolverla si suppone che la soluzione sia esprimibile come serie, dunque si cercano soluzioni del tipo

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k;$$

sostituendo nell'equazione si trova

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k [a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k k(k-1) - 2ka_k + l(l+1)a_k] = 0.$$

Aaffinchè la serie sia identicamente nulla, deve esser nullo ogni termine, quindi

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k k(k-1) - 2ka_k + l(l+1)a_k = 0,$$

da cui si ricava la formula ricorrente

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k,$$

dove i termini a_0 e a_1 sono fissati e dipendono dalle condizioni iniziali, nello specifico $a_0 = f(0)$ e $a_1 = f'(0)$. D'altronde si osserva che $a_k \rightarrow 1$ per $k \rightarrow \infty$, quindi il raggio di convergenza della serie è 1; è facile verificare che tale serie diverge per $\mu = 1$ e dato che nel caso in esame questo non deve succedere, l'unica possibilità è che la serie sia in realtà un polinomio; affinché ciò valga l deve essere un intero, in tal caso la serie ha i primi $l+1$ termini non nulli e gli altri tutti nulli. Quindi si è trovato che

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^l a_k \mu^k.$$

A questo punto, per semplificare la notazione, verrà denotato con P_l il polinomio soluzione dell'equazione appena risolta. Si avrà dunque che

$$P_l(\sin \theta) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{l/2} a_{2k} (\sin \theta)^{2k} & \text{per } l \text{ pari} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} a_{2k+1} (\sin \theta)^{2k+1} & \text{per } l \text{ dispari.} \end{cases}$$

La soluzione della seconda equazione scritta all'inizio (la parte che dipende solo da θ) è $P_l(\sin \theta)$, quindi rimettendo tutto insieme, il campo gravitazionale si esprime come

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \Phi(r, \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\sin \theta)}{r^{l+1}}, \end{aligned}$$

dove P_l è un polinomio di grado l ; i polinomi P_l sono detti di Legendre. Per comodità di notazione $a_k^{(l)}$ è il k -esimo coefficiente dell' l -esimo polinomio di Legendre.

Osservazione 3.1. Per ogni P_l c'è da determinare un solo coefficiente, infatti attraverso la formula per ricorrenza, noto il primo coefficiente si ricavano tutti gli altri.

Esempio 3.1. Svolgendo i calcoli e usando la formula per ricorrenza si trova

$$l = 0, \quad P_0(\sin \theta) = a_0^{(0)}$$

$$l = 1, \quad P_1(\sin \theta) = a_1^{(1)} \sin \theta$$

$$l = 2, \quad P_2(\sin \theta) = a_0^{(2)} (1 - 3 \sin^2 \theta)$$

Quindi si ha

$$\Phi(r, \theta) = \frac{a_0^{(0)}}{r} + \frac{a_1^{(1)} \sin \theta}{r^2} + \frac{a_0^{(2)} (1 - 3 \sin^2 \theta)}{r^3} + \dots$$

Si può anche decidere di troncare lo sviluppo in serie ad un certo ordine, quindi approssimare il campo gravitazionale con la serie troncata, in tal caso ci sono solo un numero finito di coefficienti da determinare.

Osservazione 3.2. Il problema è dunque determinare i coefficienti a_0^l per l pari, oppure a_1^l per l dispari, d'altronde per semplificare la notazione è preferibile imporre che tali numeri siano 1 e sostituire l'incognita come costante moltiplicativa, cioè considereremo come incognite c_l e quindi

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{P_l(\sin \theta)}{r^{l+1}}.$$

In questa formula P_l sono completamente determinati e le uniche incognite sono appunto i c_l .

Non è difficile capire che necessariamente $c_0 = GM$ dato che il corpo ha simmetria assiale, inoltre per questioni di dimensione, a meno di cambiare costanti

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r} \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\sin \theta) \frac{R_{\oplus}^l}{r^l} C_{l,0}$$

3.5 Armoniche sferiche tesserali

Si consideri un corpo esteso, l'obbiettivo è caratterizzare il potenziale gravitazionale. Si tratta ora il caso più generale, ovvero si suppone di non avere simmetria assiale e si procede nello stesso modo. Si sa che fuori W il potenziale è una funzione armonica, cioè $\Delta U = 0$, allora si passa in coordinate polari e si considera $\Phi(r, \theta, \lambda) := U(x, y, z)$ (ovvero Φ è il potenziale letto nelle coordinate sferiche). Si procede come fatto nella sezione precedente, ovvero si usa la separazione delle variabili, dunque $\phi(r, \theta, \lambda) = R(r)F(\theta)G(\lambda)$ e si sostituisce nell'equazione di Laplace usando il laplaciano in coordinate polari e si ottiene

$$FG \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + R \Delta_S(FG) = 0.$$

A questo punto si divide per U (si dovrà verificare a posteriori che tale funzione non si annulla), ottenendo

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] + \frac{\Delta_S(FG)}{FG} = 0$$

Quindi si ha la somma di due parti, la prima dipendente da r e la seconda da (θ, λ) ; i due addendi devono necessariamente essere costanti e uguali in modulo ma di segno opposto, quindi il problema si riduce a risolvere le seguenti due equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_S(FG)}{FG} &= -l(l+1), \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR}{dr} \right] &= l(l+1). \end{aligned}$$

Come prima la costante è stata scelta nel modo più comodo per agevolare la notazione nello sviluppo dei conti.

La seconda equazione è stata già risolta nella sezione precedente e la soluzione scelta è $R(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$.

Si consideri dunque la prima equazione, se la si moltiplica per $\cos^2 \theta$ si ottiene un'equazione differenziale equivalente:

$$\cos^2 \theta \frac{\Delta_S(FG)}{FG} = \cos^2 \theta - l(l+1) \cos^2 \theta.$$

Ora si sostituisce l'espressione nell'operatore di Laplace-Beltrami e si ottiene

$$\frac{\cos \theta}{F} \frac{d}{d\theta} \left[\cos \theta \frac{dF}{d\theta} \right] + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\lambda^2} = -l(l+1) \cos^2 \theta.$$

Anche questa equazione è composta da parti che dipendono solo da θ e parti che dipendono solo da λ , quindi quella che dipende da λ deve essere costante, dunque

$$\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{d\lambda^2} = -m^2.$$

Il motivo per cui la costante m si è scelta negativa è per avere come soluzione una G che si esprima come combinazione di funzioni trigonometriche, mentre scegliendo la costante positiva allora G sarebbe stata esponenziale, il che nel caso in esame non va bene. Risolvendo l'equazione si ottiene

$$G(\lambda) = C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m, \lambda)$$

Dove $C_{l,m}$ ed $S_{l,m}$ sono delle costanti. A questo punto si sostituisce G nell'equazione precedente e si ottiene

$$\frac{1}{F \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\cos \theta \frac{dF}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\cos^2 \theta} = -l(l+1).$$

Si cerca una soluzione della forma $F(\theta) = (\cos \theta)^m f(\sin \theta)$; per comodità si pone $\mu = \sin \theta$ allora si ottiene l'equazione

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 f}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{df}{d\mu} + (l-m)(l+m+1)f = 0.$$

Ripetendo esattamente il ragionamento fatto nella sezione precedente, si cerca una soluzione in serie di potenze della forma

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k$$

Imponendo che questa soddisfi l'equazione si ottiene la seguente relazione ricorrente tra i coefficienti di f :

$$a_{k+2} = \frac{k(k+2m+1) - (l-m)(l+m+1)}{(k+2)(k+1)} a_k$$

Per gli stessi motivi di convergenza necessariamente questa somma deve essere finita, quindi l deve essere intero ed f deve essere un polinomio di grado $l-m$ e con lo stesso ragionamento se il grado è pari allora ci sono solo coefficienti di ordine pari, se il grado è dispari ci sono solo coefficienti di ordine dispari. Per comodità di notazione, la soluzione $F(\theta)$ viene denotata con $P_{l,m}(\sin \theta)$. Le soluzioni saranno serie nei termini

$$\frac{P_{l,m}(\sin \theta)}{r^{l+1}} \cos(m\lambda) \quad , \quad \frac{P_{l,m}(\sin \theta)}{r^{l+1}} \sin(m\lambda)$$

Queste funzioni sono armoniche sferiche, per $m=0$ si hanno le armoniche sferiche zonali, per $m>0$ invece le armoniche sferiche tesserali. Ripetendo lo stesso discorso fatto nella sezione precedente, a meno di riscalare le costanti, si ha che il potenziale è della forma

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{r} \\
&+ \frac{GM}{r} \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\sin \theta) \frac{R_{\oplus}^l}{r^l} C_{l,0} \\
&+ \frac{GM}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l P_{l,m}(\sin \theta) \frac{R_{\oplus}^l}{r^l} [C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m\lambda)]
\end{aligned}$$

È possibile riscrivere il potenziale come

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_{l,m}(\sin \theta) \frac{R_{\oplus}^l}{r^l} [C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m\lambda)]$$

Allora si introduce una nuova notazione per le armoniche sferiche

$$\begin{aligned}
Y_{l,m,i} &= P_{l,m}(\sin \theta) \text{trid}(m, \lambda, i) \\
\text{trid}(m, \lambda, 1) &= \cos(m\lambda) \\
\text{trid}(m, \lambda, 0) &= \sin(m\lambda)
\end{aligned}$$

Allora in forma più compatta si ha che il potenziale è della forma

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{GM R_{\oplus}^l}{r^{l+1}} \sum_{m=0}^l [C_{l,m} Y_{l,m,1} + S_{l,m} Y_{l,m,0}]$$

Si può mostrare che queste sono tutte e sole le funzioni armoniche fuori la sfera di raggio R_{\oplus} .

Definizione 3.1. $C_{l,m}$ e $S_{l,m}$ sono detti coefficienti armonici di grado l e ordine m .

Nota 3.1. Non è difficile provare che c'è una relazione tra il centro di massa del corpo esteso attorno al quale si orbita e i coefficienti armonici. In questo contesto si evita di ripetere il calcolo e si rimanda alla referenza [2] [cap 13 sez 2], l'idea di base è quella di cercare una relazione tra la distribuzione di massa e l'espansione in armoniche sferiche del campo gravitazionale. Da questi conti si riesce anche a trovare che il momento di inerzia dipende da alcuni coefficienti armonici. Ad ogni modo il punto è che, scegliendo come origine del sistema di riferimento il centro di massa del corpo esteso, si ha che i primi che i coefficienti armonici di grado 1 sono nulli quindi la serie inizia da $l = 2$.

Pertanto, usando la nota precedente, un modo compatto per scrivere l'energia potenziale gravitazionale, a meno di far coincidere l'origine con il centro di massa del corpo esteso, è il seguente

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{r} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \Phi_{l,m}(r, \theta, \lambda) \\
\Phi_{l,m}(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{r} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^l P_{l,m}(\sin \theta) [C_{l,m} \cos(m\lambda) + S_{l,m} \sin(m, \lambda)]
\end{aligned}$$

3.6 Determinazione del campo gravitazionale

Fin ora ci si è limitati a descrivere il campo gravitazionale di un corpo esteso ma potrebbe non essere chiaro come effettivamente sia possibile calcolare i coefficienti armonici. Si evita in questo contesto di richiamare tutta la teoria sul problema di determinazione orbitale, si rimanda alla referenza [2] [cap 1 sez 1, sez 5], verrà in questo contesto solo fatto un breve richiamo.

3.6.1 Determinazione orbitale, parametri dinamici e problema ai minimi quadrati

Questa sezione contiene solo dei brevi richiami, per una trattazione completa si rimanda a [2]

Gli elementi essenziali di una determinazione orbitale sono le orbite e le osservazioni. L'equazione del moto, che nel caso in questione descrive il moto della sonda, è la seguente

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t, \boldsymbol{\mu}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

dove il vettore $\mathbf{y}(t)$ contiene le coordinate della sonda (posizione e velocità), il vettore \mathbf{y}_0 la posizione e la velocità iniziale e infine il vettore $\boldsymbol{\mu}$ contiene i parametri dinamici, in questo caso contiene i coefficienti armonici del corpo esteso. A questo punto si considera la funzione osservazione

$$R(\mathbf{y}, t, \boldsymbol{\nu})$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ sono detti parametri cinematici, nel caso trattato sono le coordinate delle eventuali stazioni terrestri che effettuano le misure. La composizione della soluzione generale del problema del moto e della funzione osservazione è detta funzione di predizione

$$r(t) = R(\mathbf{y}(t), t, \boldsymbol{\nu})$$

Sia r_i la misurazione fatta al tempo t_i , si supponga di aver fatto m misurazioni, in generale queste non coincideranno con le previsioni, lo scarto è detto residuo ed è definito come

$$\xi_i = r_i - R(\mathbf{y}(t_i), t_i, \boldsymbol{\nu}) \quad i = 1, \dots, m$$

Il vettore $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i=1, \dots, m}$ è detto vettore dei residui. L'obiettivo sarà quello di trovare una soluzione dei parametri che minimizza i residui.

A questo punto si definisce la funzione obiettivo

$$Q(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^T$$

L'obiettivo che ci si pone è quello di scegliere i parametri dinamici, quindi i coefficienti armonici, in modo tale da minimizzare la funzione obiettivo. Come già accennato, evitando di rifare tutti i

calcoli, si può mostrare che, nel caso in cui la funzione di predizione possa essere espressa come combinazione lineare di ϕ_1, \dots, ϕ_N con parametri di fit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, minimizzare la funzione obiettivo equivale a risolvere il problema

$$C\boldsymbol{\mu} = D,$$

dove $C = B^T B$ è detta matrice normale, B è detta matrice di disegno ed i suoi elementi sono le derivate parziali dei residui rispetto ai parametri dinamici, ovvero

$$B = (b_{i,j}) = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \mu_j} \right),$$

mentre $D = -B^T \lambda$. Se la matrice C è invertibile, la sua inversa è denotata con Γ ed è detta matrice di covarianza. Si può mostrare che se $\Gamma = (\gamma_{i,j})$, allora $\gamma_{i,i}$ determina il valore di incertezza con cui il parametro μ_i è stato calcolato.

A questo punto è possibile descrivere come avviene la determinazione di $\boldsymbol{\mu}$ che è il punto centrale di questa argomentazione. Il procedimento in questione è detto tracking: misurare la distanza e la velocità della sonda è il mezzo principale per studiare il campo gravitazionale. Per una trattazione completa di questo aspetto si consulti [5] [cap 4], dove è possibile capire come calcolare la matrice B .

3.7 Juice: Campo gravitazionale delle lune di Giove

3.7.1 Obiettivi

L'obiettivo, come era possibile intuire, è lo studio del campo gravitazionale delle lune di Giove. Innanzitutto è bene richiamare alcune fasi della missione per capire bene per quale motivo è possibile effettuare tale studio. Il tour della sonda prevede:

- 2 gravity assist con Europa;
- 20 gravity assist con Callisto (12 per cambiare l'inclinazione dell'orbita);
- 282 giorni in orbita attorno a Ganimede con orbite circolari, ellittiche e a diverse quote.

Essendo le lune di Giove dei corpi solidi non è possibile supporre la simmetria assiale, pertanto in generale il campo gravitazionale avrà la forma

$$\Phi(r, \theta, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{GM R_{\oplus}^l}{r^{l+1}} \sum_{m=0}^l [C_{l,m} Y_{l,m,1} + S_{l,m} Y_{l,m,0}].$$

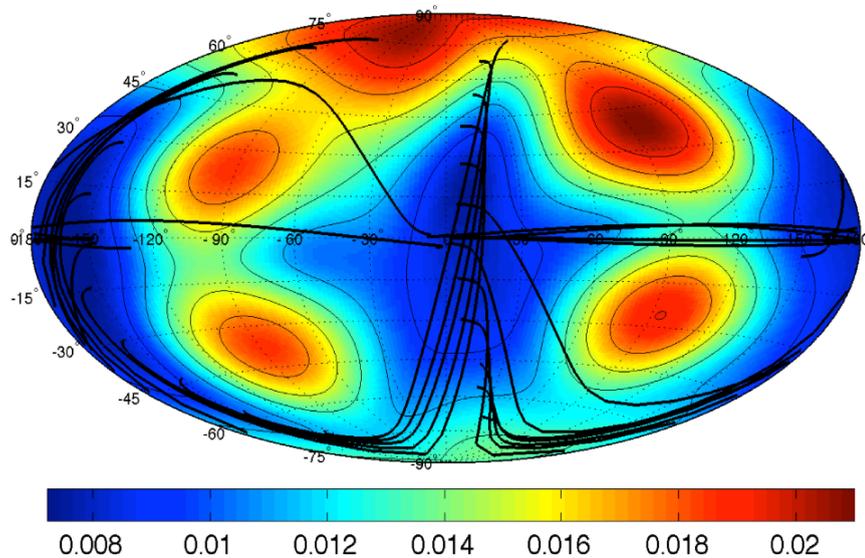
I principali obiettivi (o per lo meno quelli su cui ci si vuole soffermare in questo contesto) sono

- Determinare le armoniche sferiche per Ganimede di grado e ordine almeno 10;
- Determinare le armoniche sferiche per Callisto di grado 2 e 3;
- Determinare $C_{2,2}$ e J_2 per Europa.

E' utile studiare il campo gravitazionale delle lune di Giove dato che questo permetterebbe di capirne l'origine e l'evoluzione, inoltre assieme alle altre misurazione, sulle quali in questo contesto si evita di entrare in dettaglio, è possibile misurare la deformazione dovuta alle forze mareali per Callisto e Ganimede in presenza di variazione di densità.

3.7.2 Campo gravitazionale di Callisto, problemi di risonanza

Come già detto si effettueranno 20 gravity assist con Callisto ma l'obiettivo è il calcolo delle sole armoniche sferiche di grado 2 e 3; è quindi sensato chiedersi per quale motivo non si ricavano più armoniche sferiche. Il problema è che quasi tutti i gravity assist sono tali che la sonda passa per gli stessi punti e questo è dovuto al fatto che la sonda sarà in risonanza con Callisto durante queste manovre. Nella figura che segue si mostra l'incertezza con cui verrà calcolato il campo gravitazionale di Callisto (la scala è in $mGal$) e la linea nera mostra la traccia a terra della sonda su Callisto (per ulteriori dettagli si rimanda al prossimo capitolo).



Se si prova a scrivere la matrice B ci si rende conto che quasi tutte le tracce sono “vicine”, non è difficile allora provare che Γ avrà elementi molto grossi sulla diagonale e per quando detto prima questo vuol dire che possono esser calcolati pochi coefficienti armonici (la maggior parte delle misurazioni sarebbero inutili, bisognerebbe eliminare tutte le righe “vicine” di B).

E' sensato chiedersi se è possibile eseguire le manovre in modo leggermente diverso in modo tale da vedere più parti di Callisto e avere più informazioni. Si suppone che con qualche modifica del tour sia possibile far ciò utilizzando a grandi linee la stessa quantità di propellente, ma il tutto è ancora da verificare, ad ogni modo nello stato attuale sembra ci sia uno spreco di risorse.

Capitolo 4

Conclusioni

In questo capitolo si affronterà il problema della determinazione dei coefficienti armonici di Callisto, si faranno delle stime sulla percentuale effettiva di superficie visibile durante i flyby. Il tutto sarà chiaro di seguito.

4.1 Costanti e Dati

Di seguito si segnalano dati e costanti che verranno utilizzati nella sezione successiva

Massa di Callisto	$1.0759 \times 10^{23} \text{ kg}$
Raggio (medio) di Callisto	$2.4103 \times 10^3 \text{ km}$
Semiassse maggiore (di orb. attorno a Giove)	$1.8827 \times 10^6 \text{ km}$
Perigiove di Callisto	$1.869 \times 10^6 \text{ km}$
Apogiove di Callisto	$1.897 \times 10^6 \text{ km}$
Costante di gravitazione universale	$6.673 \times 10^{-20} \text{ km}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Massa di Giove	$1.8986 \times 10^{27} \text{ kg}$
Raggio di Hill (di Callisto rispetto Giove)	$7.2314 \times 10^4 \text{ km}$
GM_{Callisto}	$7.1795 \times 10^3 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$

4.2 Coefficienti armonici di Callisto

Per determinare i coefficienti armonici di grado l la sonda deve orbitare ad una quota minore o uguale a

$$h = \frac{\pi R}{l},$$

dove R è il raggio di Callisto (per dettagli si richiama la referenza [2] [cap 16, sez 1]), volendo fare solo delle stime approssimative, si è interessati a sapere quando la sonda è abbastanza vicina a Callisto per poter misurare tali coefficienti, quindi si chiederà che valga la seguente

$$r(t) \leq R + h = R + \frac{\pi R}{2} \leq R + \frac{4R}{2} = 3R.$$

Quindi l'obbiettivo è quello di determinare gli istanti t_1, t_2 tali che

$$r(t) \leq 3R \quad t \in [t_1, t_2].$$

Si inizia con il calcolare il raggio di Hill di Callisto secondo la definizione data nel secondo capitolo

$$\begin{aligned} R_H &= a \sqrt[3]{\frac{M_{\text{Callisto}}}{M_{\text{Giove}}}} \\ &= 1.8827 \times 10^6 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\frac{1.0759 \times 10^{23} \text{ kg}}{1.8986 \times 10^{27} \text{ kg}}} \\ &= 1.8827 \times 10^6 \cdot 3.841 \times 10^{-2} \text{ km} \\ &= 7.2314 \times 10^4 \text{ km}. \end{aligned}$$

Si trova che il raggio di Hill è minore del semiasse minore dell'orbita (di Callisto attorno Giove) ed è anche minore di $3R = 7.23 \times 10^3 \text{ km}$ (come ci si aspettava). All'interno della sfera di influenza di Callisto ha senso considerare come approssimazione il problema dei due corpi sonda-Callisto, per dettagli si rimanda alla referenza [6] [cap. 1]. E' possibile calcolare la distanza sonda-Callisto in un tempo t risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\ddot{r} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM_{\text{Callisto}}}{r^2}.$$

Dove j è la norma del momento angolare (della sonda) per unità di massa. E' possibile riscrivere la precedente equazione differenziale al secondo ordine come un'equazione differenziale al primo ordine a meno di aggiungere una variabile, quindi si ottiene la seguente

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \end{cases}$$

A questo punto si utilizza un metodo numerico per risolvere questa equazione, per semplicità si userà il metodo di Eulero, quindi si ottiene la successione

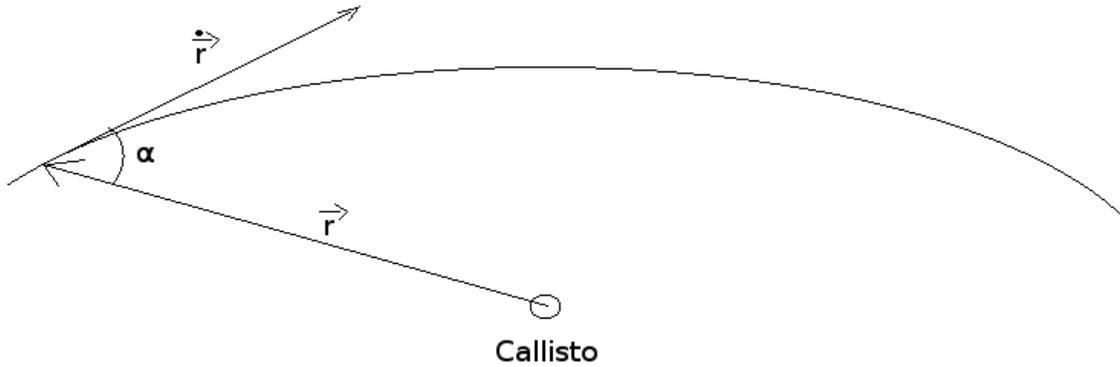
$$\begin{cases} r_{i+1} = r_i + hv_i \\ v_{i+1} = v_i + h \left(\frac{j^2}{r_i^3} - \frac{GM}{r_i^2} \right) \end{cases}$$

Se si vuole risolvere il problema nell'intervallo $[0, T]$ allora, note le condizioni iniziali $r(0)$ e $v(0)$, si pone $r_0 = r(0)$, $v_0 = v(0)$ e $h = T/n$ con n fissato (tanto n è più grande quanto la soluzione è accurata). Si può mostrare che $r_i \simeq r(ih)$, quindi si riesce ad ottenere una stima della soluzione.

Osservazione 4.1. La variabile v non è il modulo della velocità ma la velocità radiale. Si supporranno noti i seguenti dati

- distanza Sonda-Callisto iniziale, si supporrà essere uguale al raggio di Hill di Callisto,
- modulo della velocità iniziale V_{inf} detta velocità all'infinito, ovvero la velocità della sonda prima di entrare nella sfera di influenza di Callisto,

- angolo α tra l'opposto della posizione iniziale e velocità



Si ricorda ancora una volta che \dot{r} non è il modulo della velocità ma il modulo della velocità radiale. E' semplice trovare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\dot{r}(0) &= \|\dot{\vec{r}}(0)\| \cos(\alpha) \\ &= V_{\text{inf}} \cos(\alpha)\end{aligned}$$

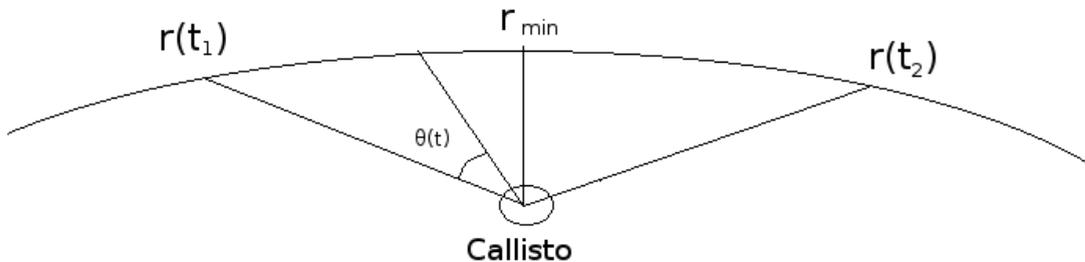
$$\begin{aligned}j &= \|\vec{r}(0) \times \dot{\vec{r}}(0)\| \\ &= \|\vec{r}(0)\| \|\dot{\vec{r}}(0)\| \sin(\pi - \alpha) \\ &= \|\vec{r}(0)\| \|\dot{\vec{r}}(0)\| \sin(\alpha) \\ &= R_H V_{\text{inf}} \sin(\alpha)\end{aligned}$$

Pertanto noti R_H , V_{inf} e α sono calcolabili j^2 , $\dot{r}(0)$ ed $r(0)$, pertanto è possibile risolvere numericamente l'equazione differenziale ed avere $r(t)$ in $[0, T]$.

Con quanto fatto sin ora si è in grado di determinare $[t_1, t_2]$ tali che $r(t) \leq 3R$, ora il passo successivo è determinare quanti chilometri della superficie di Callisto si riescono a coprire in questa fase. Per questo punto è necessario richiamare un'altra equazione

$$\dot{\theta} = \frac{j}{r^2},$$

dove si ricorda che j è un integrale primo del moto.



Quindi l'idea è di calcolare $\theta(t_2)$ risolvendo il problema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{J}{r^2} \\ \theta(t_1) = 0 \end{cases}$$

A questo punto il numero di chilometri della superficie che si riescono a coprire è pari a $\theta(t_2)R_{\text{Callisto}}$. Chiaramente è possibile utilizzare nuovamente il metodo di Eulero, in questo caso la successione sarà

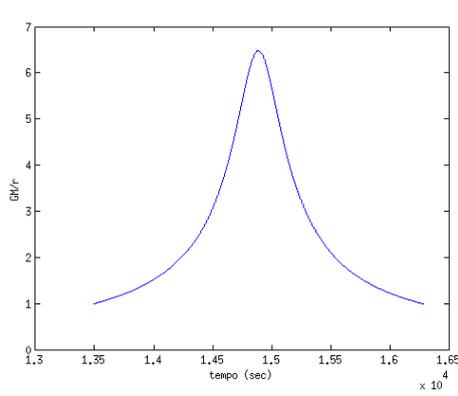
$$\theta_{i+1} = \theta_i + h \frac{J}{r_i^2}.$$

Di seguito ci sono i risultati ottenuti con un semplice programma scritto in matlab usando quanto detto sin ora. Il codice *Cn* sta ad indicare a quale flyby ci si riferisce per poter consultare la tabella ufficiale contenente la documentazione dei flyby.

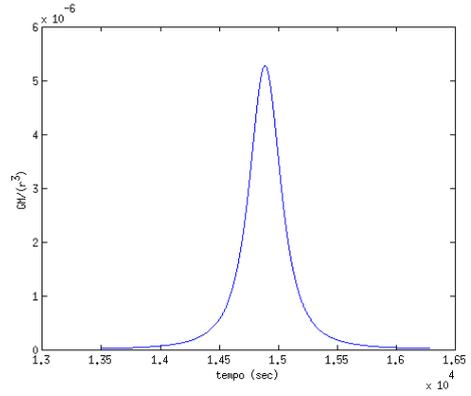
Fase	Δv (km/s)	r_{\min} (km)	V_{inf} (km/s)	α (rad)	Δt	lungh. traccia (km)	% della circonf.
C6	1,026	1107	4,8	0.0191	46m 31s	7735.7	51.079
C7	1,048	1725	4,9	0.0276	45m 27s	6966.8	46.003
C8	1,048	743	4,9	0.0138	45m 27s	8324.3	54.966
C11	1,078	837	5,3	0.0152	42m 31s	7951.9	52.507
C13	1,078	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C14	1,081	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C15	1,081	367	4,2	0.0091	50m 52s	9823	64.862
C16	1,082	713	4,2	0.0144	51m 46s	8695.8	57.419
C17	1,082	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C18	1,085	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C19	1,085	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C20	1,088	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C21	1,090	1305	4,2	0.0229	52m 17s	7651.2	50.522
C22	1,091	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C23	1,091	200	4,2	0.0062	50m 6s	10840	71.576
C24	1,091	589	4,2	0.0125	51m 30s	9030.2	59.628
C26	1,091	382	2,2	0.0156	1h 19m 51s	11354	74.970
C27	1,091	1704	2,2	0.0275	1h 24m 18s	9464.6	62.496
C28	1,091	528	2,2	0.0187	1h 21m 09s	10787	71.23
C29	1,091	4936	2,3	0.0854	1h 8m 18s	4425.1	29.22

Non tutti i gravity assist sono utili per la determinazione dei coefficienti armonici, infatti quando questi avvengono a quota troppo alta è prevalente il termine di monopolo.

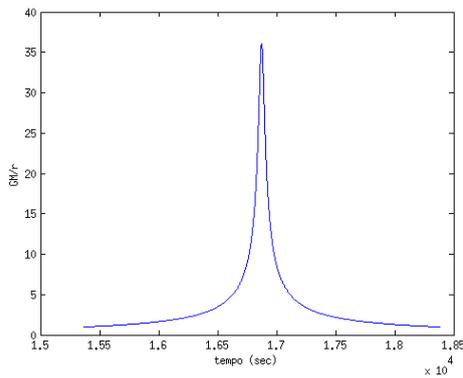
Figura 4.1: Andamento di GM/r e di GM/r^3



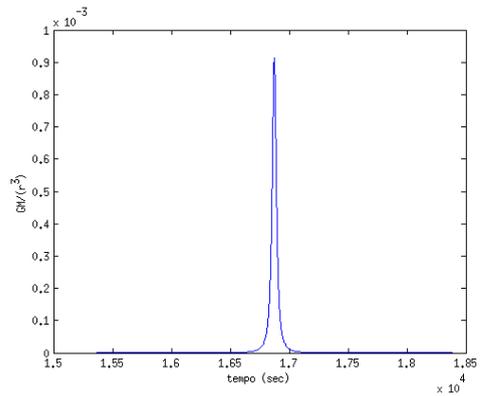
(a) C6, GM/r



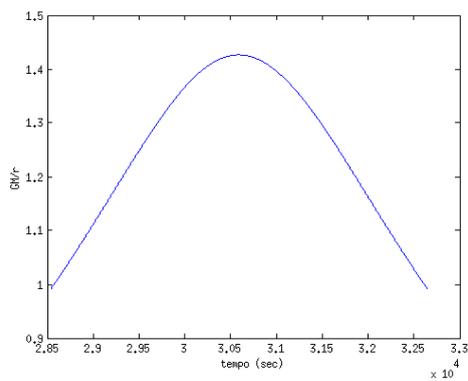
(b) C6, GM/r^3



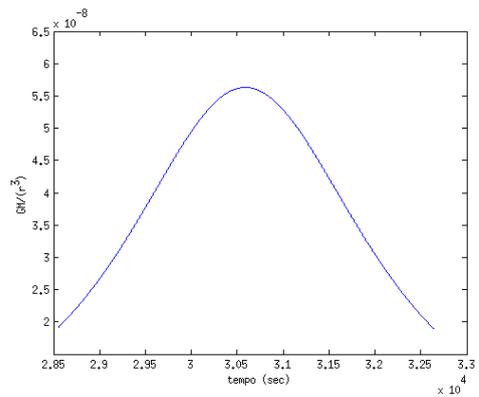
(c) C13, GM/r



(d) C13, GM/r^3



(e) C29, GM/r



(f) C29, GM/r^3

In conclusione: i gravity assist più importanti sono quelli che si effettuano a bassa quota, ovvero quelli effettuati durante la fase di inclinazione dell'orbita, in tale fase si ha il problema di risonanza; sarebbe dunque utile ridefinire in alcuni tratti la traiettoria della sonda per eliminare tale problema.

Bibliografia

- [1] JUICE Exploring the emergence of habitable worlds around gas giants (Yellow book), 2011
- [2] THEORY OF ORBIT DETERMINATION, Andrea Milani and Giovanni F. Gronchi, Cambridge University Press, 2010
- [3] Gravitational Spheres of the Major Planets, Moon and Sun, Chebotarev, G. A., Soviet Astronomy, 1963
- [4] The slingshot effect, R.C. Johnson, Department of Mathematical Sciences, University of Durham, England, 2003
- [5] THE JUNO MISSION GRAVITY SCIENCE EXPERIMENT: A SEMI-ANALYTIC THEORY, Daniele Serra, master thesis, University of Pisa
- [6] Appunti del corso *Elementi di Meccanica Celeste*, Daniele Serra, University of Pisa, disponibili online su <http://poisson.phc.unipi.it/~dserra/emc.pdf>

Parte del materiale è frutto degli appunti presi a lezione, altro è stato reperito su *Wikipedia* e su vari altri siti web.