Formulario essenziale di Analisi 1

Alessandra Mazzaferro

Gennaio 2024

1 Formule trigonometriche di addizione e sottrazione

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
  da questa formula si ricavano le seguenti due:
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  da questa formula si ricavano le seguenti due:
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2 Limiti notevoli

Non li abbiamo trattati esplicitamente a lezione, perché per risolvere i limiti sono sufficienti gli sviluppi di Taylor, ma è utile tenerli presenti:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x \log x = 0$
- $\lim\limits_{x\to \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$

3 Derivate

3.1 Principali regole di derivazione

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, in particolare $(\frac{1}{g(x)})' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$, in particolare $(f(ax))' = af'(ax)$
- Se g è la funzione inversa di f, allora:
  $(f(g(x))' = \frac{1}{g'(x)}$

3.2 Derivate fondamentali

- $(a)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(a^x)' = a^x \log a$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 - \tan^2 x$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = \cot^2 x - 1$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$
- $(\text{arccot}x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

4 Gerarchie di infiniti e infinitesimi

per $x \to \infty$:

- $x^a << x^b$ se $a < b$
- $a^x << b^x$ se $0 < a < b$
  in particolare $e^{ax} << e^{bx}$ se $0 < a < b$
- $(\log x)^a << x^b$ se $b > 0$
- $x^a << b^x$ se $b > 1$, a $\in \mathbb{R}$

per $x \to 0$:

- $x^a << x^b$ se $a > b$
- $|\log x|^a << \frac{1}{x^b}$ se $b > 0$, a $\in \mathbb{R}$

5 Taylor

5.1 Polinomio di Taylor in zero

- $P_d = \sum_{k=0}^{d} \frac{D^{(k)} f(0)}{k!} x^k$

5.2 Teorema di Taylor con resto di Peano

Sia $R_d(x) = f(x) - P_d(x)$ il resto di Taylor. Valgono le seguenti due proposizioni:

- $R_d(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$
- $R_d(x) = O(x^{d+1})$ e più precisamente $\lim_{x \to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \frac{D^{(d+1)} f(0)}{(d+1)!}$

5.3 Sviluppi per $x \to 0$ da ricordare

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^d}{d!} + O(x^{d+1})$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \pm \frac{x^d}{d!} + O(x^{d+2})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... \pm \frac{x^d}{d!} + O(x^{d+2})$
- $(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{a(a-1)...(a-d+1)}{d!} x^d + O(x^{d+1})$
  due casi particolari di quest'ultimo sviluppo sono:
- $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... \pm x^d + O(x^{d+1})$
- $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^d + O(x^{d+1})$
- $\log(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \pm \frac{x^d}{d} + O(x^{d+1})$

6 Integrali

6.1 Principali regole di integrazione

- $\int_a^b af(x) + bg(x)\ dx = a \int_a^b f(x)\ dx + b \int_a^b g(x)\ dx$

  allo stesso modo vale per le primitive:
  $\int af(x) + bg(x)\ dx = a \int f(x)\ dx + b \int g(x)\ dx$

- Formula di integrazione per parti:
  $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = |F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\ dx$

  allo stesso modo vale per le primitive:
  $\int f(x)g(x)\ dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ dx$

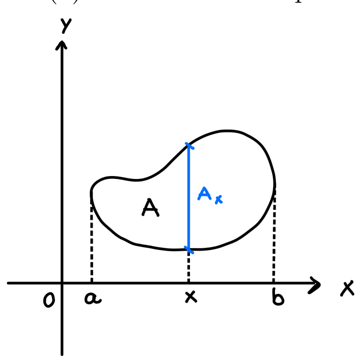
- $\int_a^b g(f(x))\ dx \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$
dove $y = f(x)$ e $dy = f'(x)dx$

6.2 Primitive fondamentali

- $\int a\ dx = ax + c$
- $\int x^a\ dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
- $\int e^x\ dx = e^x + c$
- $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
- $\int \log x\ dx = x(\log x - 1) + c$
- $\int \frac{1}{x}\ dx = log|x| + c$
- $\int \sin x\ dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\ dx = \sin x + c$
- $\int \tan x\ dx = -\log(|\cos x|) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arccos x + c$
- $\int \arcsin x\ \ dx = \sqrt{1-x^2} + $
$+\ x \arcsin x + c$
- $\int \arccos x\ \ dx = -\sqrt{1-x^2} + $
$+\ x \arccos x + c$

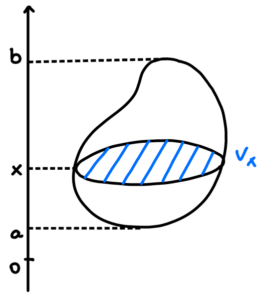
6.3 Calcolo di lunghezze, superfici e volumi con gli integrali

- Sia G il grafico della funzione f tra gli estremi a e b:
$G = \{(x, f(x)) | a \leq x \leq b\}$
$lunghezza(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}$
- Sia A una superficie nel piano, A_x la sezione di A corrispondente all'ascissa x e l(x) la funzione che esprime la lunghezza di A_x al variare di x



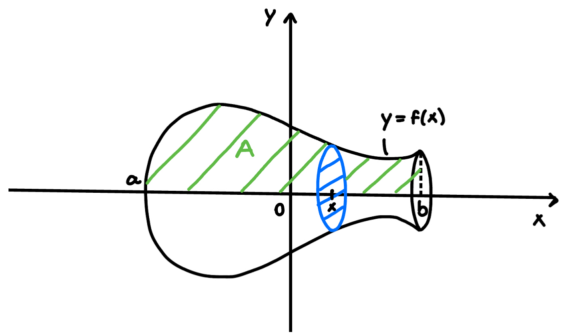
$area(A) = \int_a^b l(x)\ dx$

- Sia V un solido nello spazio, V_x la sezione di V ad altezza x e a(x) la funzione che esprime l'area di V_x al variare di x



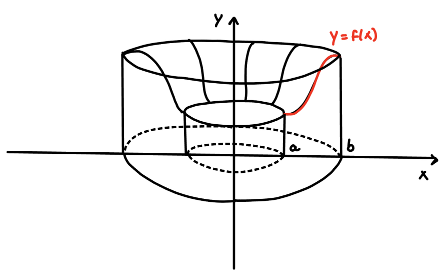
$volume(V) = \int_a^b a(x)\ dx$

- Sia V il solido ottenuto ruotando l'area A attorno all'asse x e sia V_x il cerchio di raggio $|f(x)|$.



$a(x) := area(V_x) = \pi(f(x))^2$
$volume(V) = \int_a^b \pi(f(x))^2\ dx$

- Sia V il solido ottenuto ruotando l'area sottesa alla funzione f(x) attorno all'asse y.



$volume(V) = \int_a^b 2\pi x f(x)\ dx$