

Pendolo fisico

Savva Popravko
Pietro Gori
Alessandra Mazzaferro

22 Maggio 2024

Indice

1	Sommario	2
2	Introduzione e cenni teorici	2
3	Descrizione dell'apparato sperimentale e del metodo di misura	2
4	Analisi delle incertezze sperimentali	4
5	Risultati	5
6	Conclusioni	6

1 Sommario

In questa esperienza di laboratorio, svoltasi il 9 Maggio 2024, abbiamo studiato il periodo di oscillazione di un pendolo fisico al variare della distanza tra il punto di sospensione e il suo centro di massa, per ottenere una stima del valore dell'accelerazione di gravità g .

A questo fine è stato necessario cronometrare più volte il periodo di oscillazione e stimare la posizione del centro di massa del pendolo misurandone le dimensioni e la distribuzione dei fori. Dal nostro esperimento abbiamo ottenuto un valore finale di g pari a $9.80 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$.

2 Introduzione e cenni teorici

Lo scopo dell'esperienza è quello di ottenere una stima del valore dell'accelerazione di gravità. Il pendolo fisico a nostra disposizione è formato da un'asta sottile di alluminio a sezione quadrata, che può essere fissata ad un perno attraverso dei fori cilindrici. Assumiamo come ipotesi che gli attriti siano trascurabili e che le parti piene dell'asta abbiano densità uniforme. Detta d la distanza del centro di massa del pendolo fisico (indicato con CM da qui in avanti) dal punto di sospensione, m la massa del pendolo e l la sua lunghezza, il momento di inerzia è dato dalla formula:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 \quad (1)$$

Il periodo di oscillazione è dato, nel limite di piccole oscillazioni, dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (2)$$

dalla (1) e dalla (2) si ricava l'espressione finale che abbiamo usato per stimare g :

$$g = \pi^2 \frac{l^2 + 12d^2}{3dT^2} \quad (3)$$

d ed l sono misure dirette, mentre per stimare T abbiamo deciso di misurare il tempo τ impiegato dal sistema per compiere 10 oscillazioni, ripetendo la misurazione 8 volte per ogni foro.

Questa relazione è strutturata come segue:

- Nella *sezione 3* abbiamo descritto dettagliatamente l'apparato sperimentale a nostra disposizione e il modo in cui si è svolta l'esperienza. Abbiamo a seguito riportato tutte le misurazioni ottenute.
- Nella *sezione 4* abbiamo illustrato il modo in cui sono stati considerati gli errori da cui sono affette le nostre misurazioni e di come ne abbiamo gestito la propagazione.
- Nella *sezione 5* abbiamo riassunto i risultati ottenuti, presentandoli anche in forma grafica.
- Nella *sezione 6* abbiamo commentato il risultato ottenuto.

3 Descrizione dell'apparato sperimentale e del metodo di misura

Per svolgere l'esperimento abbiamo utilizzato:

- Pendolo fisico lungo $104.2 \pm 0.1 \text{ cm}$ con 10 fori;

- Cronometro con risoluzione di 0.01 s;
- Calibro ventesimale con risoluzione di 0.05 mm;
- Metro a nastro con risoluzione di 1 mm;



La prima misurazione è stata quella della lunghezza del pendolo, svoltasi utilizzando il metro a nastro, nella quale abbiamo ottenuto un valore di 104.2 ± 0.1 cm. Per la larghezza e la profondità abbiamo utilizzato il calibro ventesimale ottenendo per entrambe il valore di 1.54 ± 0.05 cm. Sempre con questo abbiamo misurato il diametro dei fori, ottenendo per tutti il valore di 0.52 ± 0.05 cm, e verificato che questi fossero equidistanti dai bordi dell'asta; ciò ci ha permesso di assumere che il centro dei fori giacesse sull'asse di simmetria dell'asta. Con il metro a nastro abbiamo misurato la distanza tra ogni foro e l'estremo A del pendolo (indicato in figura), ottenendo i seguenti risultati (tutti con un errore assoluto di 0.1 cm dovuto all'incertezza di misurazione dello strumento).

Distanza dall'estremo A (in centimetri)									
Foro 1	Foro 2	Foro 3	Foro 4	Foro 5	Foro 6	Foro 7	Foro 8	Foro 9	Foro 10
4.4	14.4	24.4	34.4	44.4	54.4	64.4	74.4	84.4	94.4

Nella misurazione del tempo impiegato per compiere 10 oscillazioni abbiamo fatto attenzione a mantenere piccolo l'angolo iniziale, come richiesto dal modello teorico, avendo cura di lasciar oscillare il pendolo inclinandolo da un punto vicino al perno, in modo da minimizzare il braccio di eventuali forze involontarie. La seguente tabella riassume le misurazioni ottenute, tutte aventi un errore di 0.01 s dovuto alla sensibilità dello strumento:

Durata delle 10 oscillazione per ogni foro (in secondi)									
Foro 1	Foro 2	Foro 3	Foro 4	Foro 5	Foro 6	Foro 7	Foro 8	Foro 9	Foro 10
16.33	15.83	15.64	16.77	22.37	40.97	18.71	15.89	15.73	15.97
16.33	15.90	15.56	16.64	22.47	40.69	18.50	15.91	15.63	15.90
16.37	15.73	15.67	16.67	22.55	40.65	18.75	16.07	15.49	16.08
16.27	15.58	15.43	16.61	22.46	40.72	18.55	15.84	15.59	15.96
16.35	15.79	15.46	16.52	22.43	40.48	18.68	15.91	15.56	15.99
16.51	15.82	15.56	16.73	22.19	40.63	18.69	16.09	15.58	16.13
16.48	15.83	15.56	16.67	22.44	40.54	18.63	15.94	15.64	16.09
16.43	15.71	15.63	16.37	22.54	40.98	18.67	15.89	15.56	16.07

4 Analisi delle incertezze sperimentali

Detto τ il tempo impiegato dal pendolo per compiere 10 oscillazioni, misurato 8 volte per ogni foro, la migliore stima di τ è stata ottenuta come media aritmetica delle misure:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \tau_i$$

Con relativa incertezza data dalla deviazione standard della media:

$$\sigma_{\hat{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (\tau_i - \hat{\tau})^2}{7}}$$

Il periodo T del pendolo per ogni foro è stato ottenuto dividendo il valore $\hat{\tau}$ e la relativa incertezza per il numero di oscillazioni. I risultati sono stati riportati nella tabella a fine paragrafo.

Per quanto riguarda la posizione del CM del pendolo, essa per simmetria del sistema deve trovarsi sull'asse verticale dell'asta. Per determinare la sua distanza verticale d_{CM} dall'estremo A abbiamo considerato sia l'asta che i fori come se fossero pieni (in questo modo, nell'ipotesi di densità uniforme, per entrambi il CM coincide con il centro geometrico) e usato la relazione:

$$d_{CM} = \frac{M \frac{l}{2} - \sum_{i=1}^{10} d_i m_i}{m}$$

Dove:

- M sarebbe la massa dell'asta se essa non fosse forata
- l è la lunghezza del pendolo
- m_i sarebbe la massa del foro i -esimo se esso fosse costituito dello stesso materiale delle parti piene del pendolo
- d_i è la distanza del foro i -esimo dall'estremo A

Esprimendo questa grandezza in funzione di sole misure dirette si ottiene la formula seguente, grazie alla quale è possibile anche ricavare l'errore su d_{CM} :

$$d_{CM} = \frac{2l^2b - \pi d^2 \sum_{i=1}^{10} d_i}{4lb - 10\pi d^2}$$

Questa espressione non contiene m , infatti nell'ipotesi di densità uniforme la posizione del centro di massa è una caratteristica puramente geometrica del solido. Il risultato ottenuto è $d_{CM} = 52.14 \pm 0.05$ cm, il suo errore risulta quindi trascurabile rispetto all'errore dovuto

all'incertezza del metro a nastro usato per misurare la distanza dei fori dall'estremo A. Inoltre, il valore ottenuto è perfettamente compatibile con una misurazione più approssimativa svolta in laboratorio: abbiamo disposto l'asta rigida perpendicolarmente a un lato del piano di lavoro, spingendola lentamente verso l'esterno. Il punto immediatamente precedente alla caduta, che risultava essere a distanza di 52.2 ± 0.1 cm dall'estremo A corrisponde al CM. A questo punto dall'espressione (3) si possono ricavare i valori di g e i relativi errori per ogni foro, che risultano essere quelli riportati nella terza colonna della seguente tabella, che riassume tutti i risultati di cui abbiamo parlato in questa sezione.

	d_{CM} (in cm)	Periodo di oscillazione (in s)	Valore di g (in $\frac{m}{s^2}$)
Foro 1	47.8 ± 0.1	1.638 ± 0.003	9.82 ± 0.05
Foro 2	37.8 ± 0.1	1.577 ± 0.003	9.80 ± 0.05
Foro 3	27.8 ± 0.1	1.556 ± 0.003	9.84 ± 0.05
Foro 4	17.8 ± 0.1	1.662 ± 0.004	9.81 ± 0.09
Foro 5	7.8 ± 0.1	2.243 ± 0.004	9.7 ± 0.2
Foro 6	2.2 ± 0.1	4.071 ± 0.006	9.8 ± 0.5
Foro 7	12.2 ± 0.1	1.865 ± 0.003	9.8 ± 0.1
Foro 8	22.2 ± 0.1	1.594 ± 0.003	9.78 ± 0.06
Foro 9	32.2 ± 0.1	1.559 ± 0.003	9.79 ± 0.05
Foro 10	42.2 ± 0.1	1.602 ± 0.003	9.79 ± 0.05

5 Risultati

Dai 10 valori della tabella precedente abbiamo determinato il miglior estimatore di g come media pesata rispetto agli inversi dei quadrati degli errori (in questo modo hanno meno rilevanza le misurazioni con incertezza maggiore) e il relativo errore σ come:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} \sigma_i^2}$$

Dove σ_i è l'errore relativo all' i -esimo valore di g della tabella precedente. In questo modo otteniamo il risultato finale: $\hat{g} = 9.80 \pm 0.02 \text{ m/s}^2$.

Nel *Grafico 1* abbiamo riportato i 10 valori di g ottenuti e le relative barre di errore in funzione della distanza del punto di sospensione dal CM.

A questi abbiamo sovrapposto la retta orizzontale $y = \hat{g}$.

Abbiamo inoltre analizzato la proporzionalità diretta tra T^2 e I/md (dalla (2) si ricava che la costante di proporzionalità è $4\pi^2/g$). Il *Grafico 2* rappresenta il quadrato del periodo di oscillazione in funzione del rapporto tra il momento d'inerzia e il prodotto tra la massa e la distanza del centro di massa dal punto di sospensione. Una volta disegnati i punti con i valori in nostro possesso, abbiamo tracciato il grafico della retta:

$$y = \frac{4\pi^2}{\hat{g}}x$$

Poi, utilizzando il metodo dei minimi quadrati, abbiamo trovato la pendenza μ della retta interpolatrice:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}$$

dove x_i e y_i indicano i valori di $\frac{I_i}{md_i}$ e T_i^2 relativi al foro i -esimo e \bar{x} e \bar{y} indicano il valor medio rispettivamente di $\frac{I}{md}$ e T^2 . L'intercetta è data da:

$$l = \bar{y} - \mu\bar{x}$$

I valori trovati sono $\mu = 4.01$ e $\iota = 0.02$, che sono molto vicini ai valori del coefficiente angolare e dell'intercetta della retta precedente, calcolata con il nostro valore \hat{g} , per la quale si aveva $\mu = 4.03$ e $\iota = 0$. La disposizione dei punti nel *Grafico 2* lo rende di difficile lettura, per questo motivo è stato necessario aggiungere quattro ingrandimenti, dai quali è possibile vedere che quasi tutti i punti appartengono, almeno con le barre d'errore, alla retta interpolatrice.

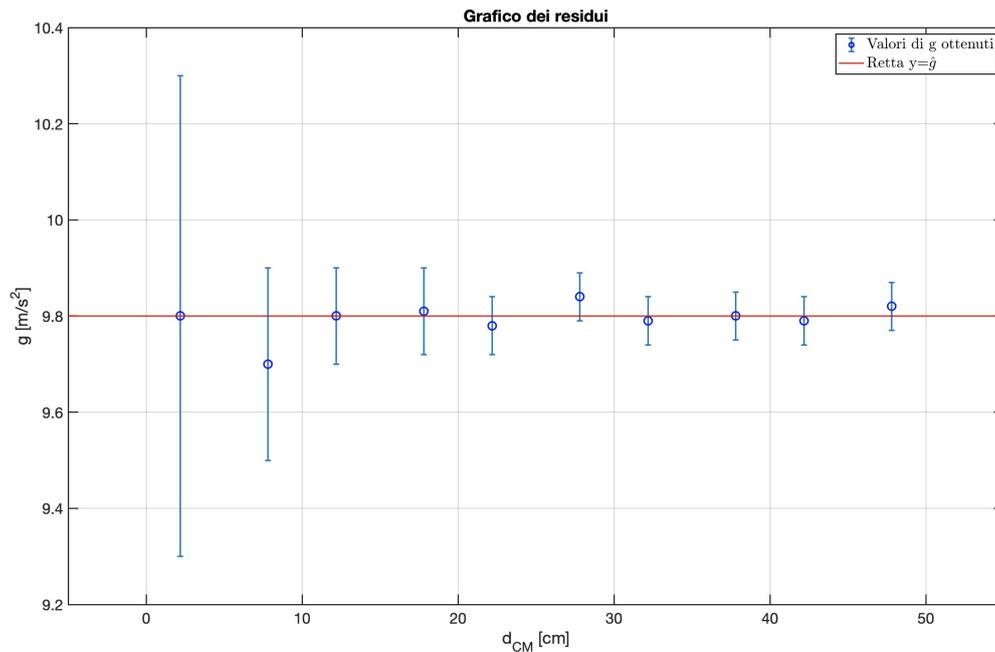


Grafico 1

6 Conclusioni

Considerando che nel *Grafico 1* il 100% dei valori tocca la retta orizzontale con le barre d'errore e che il nostro valore di g si discosta dal valore atteso $g = 9.085 \frac{m}{s^2}$ nel luogo dell'esperimento (Pisa) dello 0.05% possiamo dire che il fit da noi ottenuto è buono. Il difetto principale è l'errore molto grande ottenuto per i fori più vicini al centro di massa. Dato che l'attrito tendeva a smorzare l'oscillazione, sarebbe forse stato più opportuno cronometrare per più volte un numero di periodi minore.

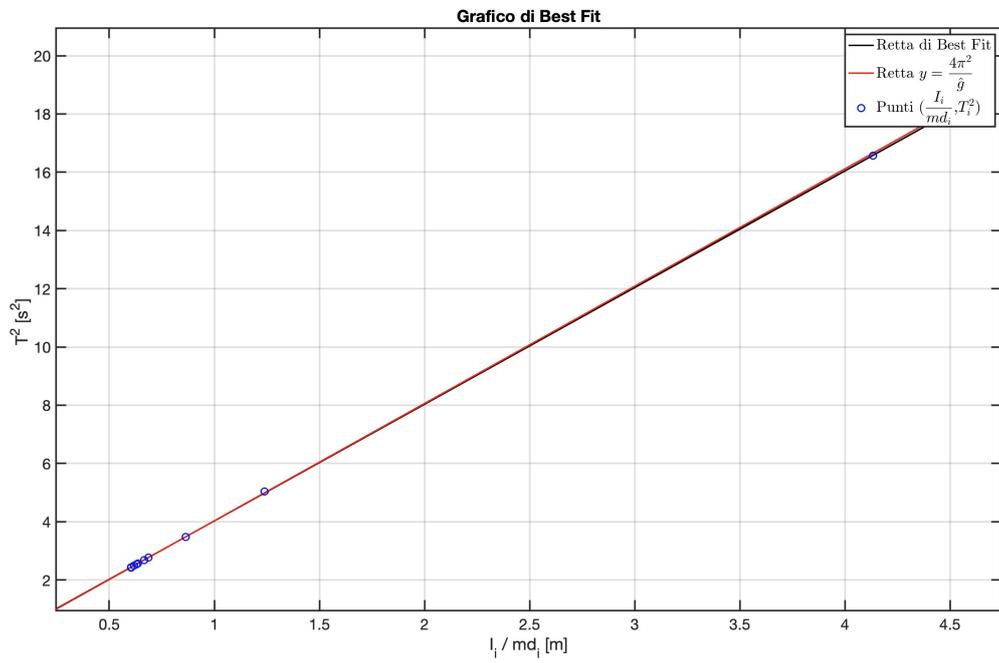
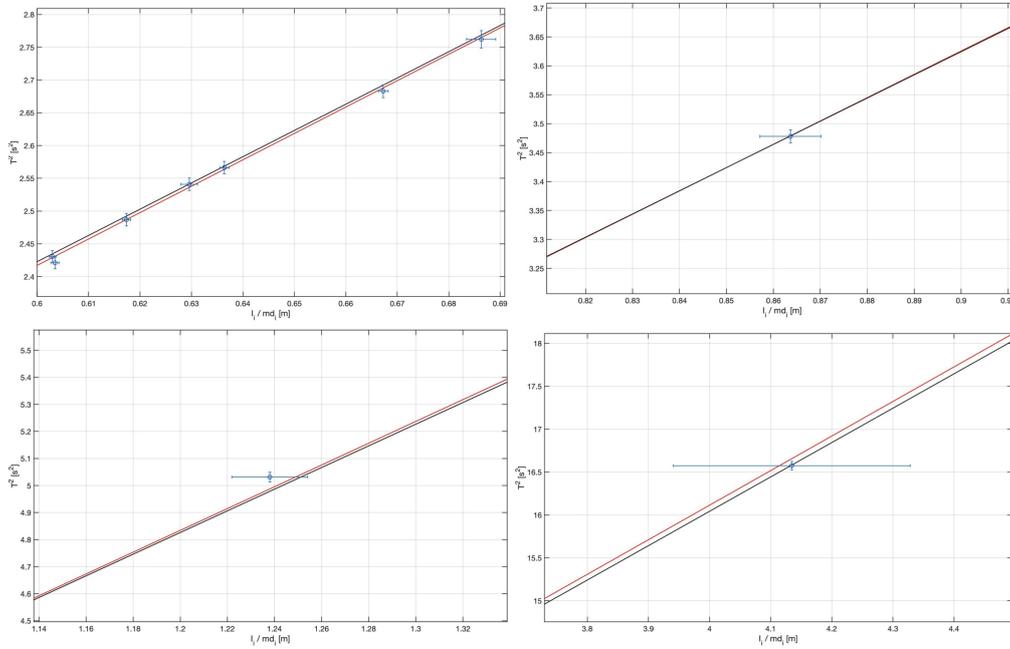


Grafico 2



Ingrandimenti