SPAZI METRICI E SPAZI NORMATI

Def. NORMA

Dato uno spatio vettoriale V reale o complesso una norma su V è una funtione $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V \quad \|v\| = 0 \iff v = \underline{0}$

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ → la norma è OMOGENEA

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$ → vale la DISUGUALIANZA TRIANGOLARE

Def. NORMA STANDARD (o EUCLIDEA) su $\mathbb{R}^N$

La norma standard su $\mathbb{R}^N$ è la funtione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

$$(x_1 \cdots x_N) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Def. SUCCESSIONE CONVERGENTE IN $\mathbb{R}^N$

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^N$. Diciamo che $x_n \to \bar{x}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon > 0 \mid \forall n > n_\varepsilon \quad \|x_n - \bar{x}\| < \varepsilon$

Proposizione: equivalenza tra la definizione di limite e limite per componenti

Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}^N$

Allora $\quad x_n \to \bar{x} \iff x_{in} \to \bar{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$

Def. SUCCESSIONE LIMITATA SU UNO SPAZIO NORMATO

Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spatio normato e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori in X. Allora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice limitata se

$\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| \leq M$

Proposizione: Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^N$ limitata, allora esiste una sottosuccessione convergente

Def. DISTANZA

Dato un insieme X, una distanza (o metrica) su X è una funtione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$ → la distanza è SIMMETRICA

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$ → vale la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Def. SPAZIO METRICO

Uno spatio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d è una distanza su X

Def. SUCCESSIONE CONVERGENTE IN UNO SPAZIO METRICO

(X,d) sp. metrico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a valori in X. Allora diciamo che $x_n \to \bar{x}$ se $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon>0 \mid \forall n>n_\varepsilon \quad \|x_n-\bar{x}\|<\varepsilon$

Def. PALLA APERTA

(X,d) spazio metrico, $x\in X$, $r\in\mathbb{R}^+$. Definiamo palla aperta di centro x e raggio r l'insieme $B(x,r)=\{y\in X \mid d(x,y)<r\}$

Def. APERTO METRICO

Dato (X,d) sp. metrico e $A\subseteq X$, diciamo che A è aperto se $\forall x\in A\ \exists r>0 \mid B(x,r)\subseteq A$

Def. CHIUSO METRICO

Dato (X,d) sp. metrico e $C\subseteq X$, diciamo che C è chiuso se il complementare $X\setminus C$ è aperto

Proposizione:

- L'unione arbitraria di una famiglia di aperti $\mathcal{F}=\{A_i\}_{i\in I}$ è aperta
- L'intersezione di una famiglia finita di aperti $\mathcal{F}=\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ è aperta

  $\downarrow$ passando al complementare...
- L'unione di una famiglia finita di chiusi $\mathcal{F}=\{C_i\}_{i=1,\dots,n}$ è chiusa
- L'intersezione arbitraria di una famiglia di chiusi $\mathcal{F}=\{C_i\}_{i\in I}$ è chiusa

Def. CHIUSURA

(X,d) sp. metrico $D\subseteq X$. Si definisce chiusura di D l'insieme

$$\bar{D}=\{x\in X \mid \forall r>0,\ B(x,r)\cap D\neq\emptyset\}$$

Gli elementi di $\bar{D}$ si dicono punti di accumulazione di D

Proposizione: $\bar{D}$ è chiuso ed è il più piccolo chiuso che contiene D

Lemma: L'insieme C è chiuso $\iff C=\bar{C}$

Proposizione: $\bar{D}$ sono tutti e soli i limiti di successioni in D.

D è chiuso $\iff \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq D$ tale che $x_n\to\bar{x}$ vale che $\bar{x}\in D$

Def. COMPATTO PER SUCCESSIONI

Dato uno spazio metrico (X,d), un insieme $D\subseteq X$ si dice compatto per successioni o sequenzialmente compatto se ogni successione $\{x_n\}\subseteq D$ ammette una sottosuccessione convergente in D

Proposizione: compatto per successioni $\Rightarrow$ chiuso ma non vale il viceversa

Per esempio $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $(\mathbb{R},|\cdot|)$ che è chiuso ma non compatto per successioni

Def. RICOPRIMENTO

Un ricoprimento di X è una famiglia $\{X_i,\ i \in I\}$ di sottoinsiemi di X tali che $\bigcup_{i \in I} X_i = X$

Def. COMPATTO

Uno spazio X si dice compatto (per ricoprimenti) se per ogni ricoprimento di aperti di X esiste un sottoricoprimento finito

Def. TOTALE LIMITATEZZA

Uno spazio metrico (X,d) si dice totalmente limitato se $\forall r>0\ \exists k \in \mathbb{N}$ $\exists\ x_1, \dots, x_k \in X$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r) = X$$

Def. SUCCESSIONI DI CAUCHY

Dato uno spazio metrico (X,d) è una successione $\{x_n\}$ a valori in X si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n,m \geq \bar{n}\ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Proposizione: $\{x_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ di Cauchy ma non vale il viceversa

Def. COMPLETEZZA

Uno spazio metrico (X,d) si dice completo se tutte le successioni di Cauchy sono convergenti

Proposizione: compatto per successioni $\Rightarrow$ completo

TEOREMA Dato uno spazio metrico (X,d) sono equivalenti:
(i) X è compatto per successioni
(ii) X è compatto
(iii) X è completo e totalmente limitato

LIMITI E CONTINUITÀ

Def. LIMITE IN UNO SPAZIO METRICO

(X,d_x), (Y,d_y) spazi metrici $f: X \to Y$

Si dice che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = v$ se

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \mid \forall x \in X\ \ d_x(x,\bar{x}) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), v) < \varepsilon$

NB! Non sto scartando il caso in cui $x = \bar{x} \Rightarrow$ se il limite esiste è necessariamente $f(\bar{x})$

Def. LIMITE INFINITO

(X,d) spazio metrico, $\bar{x} \in X$ e $f: X \to \mathbb{R}$. Diciamo che f tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$ se $\forall M>0\ \exists \delta>0 \mid \forall x \in X\ \ 0 < d(x,\bar{x}) < \delta \Rightarrow f(x) > M$

(la definizione è analoga per $-\infty$)

Def. LIMITE DELLA NORMA

Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, (Y,d) uno spazio metrico, $\bar{y} \in Y$.
Data $f: V \to Y$ diciamo che $\lim_{\|v\| \to +\infty} f(v) = \bar{y}$ se
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \mid \forall v \in V \; \|v\| > N \Rightarrow d_Y(f(v), \bar{y}) < \varepsilon$

Def. LIMITE DIREZIONALE

Data $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ si chiama limite direzionale in direzione w il limite $\lim_{t \to +\infty} f(tw)$

Proposizione se esiste $\ell \in \mathbb{R} \mid f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} \ell$ allora $\forall w \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$ $\lim_{t \to +\infty} f(tw) = \ell$
(il viceversa è falso)

Def. CONTINUITÀ

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) sp. metrici, $f: X \to Y$ si dice continua in $\bar{x} \in X$ se $\forall \varepsilon > 0$
$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in X \;\; d_X(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon$
f è continua se è continua in $\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in X$

Ciò equivale a dire che esiste $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)$

Per la nostra definizione folle se esiste è automaticamente $f(\bar{x})$ (cioè f continua in $\bar{x}$)

Def. CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) sp. metrici, $f: X \to Y$ si dice continua per successioni se
$\forall \{x_n\} \subseteq X \mid x_n \to \bar{x}$ si ha che $f(x_n) \to f(\bar{x})$

TEOREMA (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, $f: X \to Y$. Sono fatti equivalenti:
(i) f è continua
(ii) f è continua per successioni
(iii) $\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto
(iv) $\forall C \subseteq Y$ chiuso, $f^{-1}(C) \subseteq X$ è chiuso

Proposizione Somme, prodotti e composizioni di funzioni continue sono continue

Lemma "Le coordinate sono funzioni continue" ???

TEOREMA Weierstrass
Dato (X, d), $D \subseteq X$ compatto per successioni e $f: D \to \mathbb{R}$ continua, allora f ammette massimo e minimo

TEOREMA Heine - Borel
Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ è chiuso e limitato

TEOREMA Weierstrass generalizzato

Data $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua, se esiste $\ell = \lim_{|x| \to +\infty} f(x)$ finito, allora
(i) se $\exists\, a \mid f(a) > \ell$, allora f ammette massimo;
(ii) se $\exists\, b \mid f(b) < \ell$, allora f ammette minimo.

Def. LIPSCHITZIANITÀ

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici: una funzione $f: X \to Y$ si dice lipschitziana di costante L (o L-Lipschitz), con $L > 0$ se $\forall x_1, x_2 \in X$ vale $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L\, d_X(x_1, x_2)$

Def. CONTRAZIONE

Dato uno spazio metrico (X, d), una funzione $T: X \to X$ si dice contrazione se $\exists L < 1 \mid \forall x, y \in X$ vale che $d(T(x), T(y)) \leqslant L\, d(x, y)$

Osservazione lipschitziana $\Rightarrow$ continua
Le contrazioni sono lipschitziane quindi in particolare continue

TEOREMA Banach-Caccioppoli (o lemma di contrazione)

Dato (X, d_X) spazio metrico completo e $T: X \to X$ una contrazione, allora T ha un unico punto fisso, ossia:
$\exists!\, \hat{x} \in X$ tale che $T(\hat{x}) = \hat{x}$

CALCOLO DIFFERENZIALE

Def. DERIVATA DIREZIONALE

Data $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $x_0, v \in \mathbb{R}^N$, la derivata direzionale di f in x_0 in direzione v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon v) - f(x_0)}{\varepsilon} \quad \text{(si denota anche con } \partial_v f(x_0))$$

$$f(x_0 + \varepsilon v) = f(x_0) + \varepsilon \partial_v f(x_0) + o(\varepsilon |v|)$$

Def. DIFFERENZIABILITÀ

Dati una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, si dice che f è differenziabile se esiste un operatore lineare $Df(x_0): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che
$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$

Osservazione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile $\Rightarrow$ f continua
$\Rightarrow$ esistenza di tutte le derivate direzionali
(in particolare $\partial_v f(x_0) = Df(x_0) v$)

Proposizione Data una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $v_1, \dots, v_N$ direzioni linearmente indipendenti, se f ammette le N derivate direzionali in un intorno di x_0 ed esse sono continue in x_0, allora f è differenziabile

Def. DERIVATA PARZIALE
Le derivate direzionali nelle direzioni coordinate e_i si dicono derivate parziali, e si indicano classicamente con ∂_{x_i}

Def. CLASSE C^K
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, una funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice di classe C^K, con $K \in \mathbb{N}$ se ammette tutte le derivate parziali sino all'ordine K ed esse sono continue in ogni punto di Ω

TEOREMA Del differenziale totale
Data $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, se f è di classe C^1 allora f è differenziabile

Def. GRADIENTE
Data $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile in x_0, chiamiamo gradiente di f in x_0 il vettore

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_N} f(x_0) \end{pmatrix}$$

dunque $Df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v$, ossia il gradiente è il vettore che rappresenta il differenziale nella base canonica

Osservazione Il gradiente è la direzione di massima pendenza della funzione nel punto, mentre la derivata direzionale lungo la direzione perpendicolare al gradiente è nulla

Def. PUNTO CRITICO
Data una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, un punto critico di f è un punto $\bar{x}$ tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$

Def. DIFFERENZIABILITÀ (funzioni reali generiche)
Data $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, essa si dice differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $Df(x_0): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ t.c.

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + Df(x_0)(v) + o(|v|)$$

Tale applicazione viene detta differenziale di f in x_0.

Proposizione f come sopra differenziabile in x_0 se e solo se

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0) - J_f(x_0)v}{\|v\|} = 0$$

Jacobiana di f (nella prossima definizione)

nel caso in cui f è scalare al posto della Jacobiana avrò il gradiente

Def. MATRICE DI JACOBI

Data una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ differenziabile in x_0, si definisce la sua jacobiana o matrice di Jacobi come la matrice associata al differenziale $Df(x_0)$ nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^M$ e $\mathbb{R}^M$, ossia

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_M(x_0)^T \end{bmatrix}$$

TEOREMA Differenziazione della funzione composta

Date due funzioni $f: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ e $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ ed un punto $x \in \mathbb{R}^M$ tale che f è differenziabile in x e g è differenziabile in $f(x)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in x e vale

$$D(g \circ f)(\bar{x}) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

Def. MATRICE DI HESSE

La matrice Hessiana (o matrice di Hesse) di una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è la matrice delle derivate parziali seconde di f:

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_N \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}$$

Def. HESSIANO E LAPLACIANO

Data una funzione $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, e un punto $x_0 \in U$ tale che f ammette tutte le derivate seconde in x_0, definiamo l'hessiano di f nel punto x_0 come il determinante della matrice hessiana $\det H_f(x_0)$ e definiamo il laplaciano di f nel punto x_0 come la traccia della matrice hessiana:

$$\Delta f(x_0) := tr(H_f(x_0)) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$$

TEOREMA Schwartz

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall\, 1 \leq i \leq d \quad \forall x \in \Omega$$

Corollario: la matrice hessiana di una funzione C^2 è simmetrica

TEOREMA Formula di Taylor con resto di Lagrange (1° e 2° ordine)

Sia f una funzione di classe $C^1(A)$ e siano x, $x+h$ con $h \neq 0$ punti di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ | il segmento di estremi x, $x+h$ sia contenuto in A. Allora esiste $\vartheta \in (0,1)$, dipendente da x e da h, tale che

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x+\theta h) \cdot h$$

Nelle stesse ipotesi, ma con $f \in C^2(A)$

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x+\theta h)\, h$$

TEOREMA Formula di Taylor con resto di Peano (2° ordine)

Sia f una funzione di classe $C^2(A)$ e siano x, $x+h$ con $h \neq 0$ punti di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ | il segmento di estremi x, $x+h$ sia contenuto in A. Allora:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(x)\, h + o(|h|^2)$$

TEOREMA Formula di Taylor con resto di Peano e Lagrange (ordine generico)

Sia f una funzione di classe $C^k(A)$ e siano x, $x+h$ con $h \neq 0$ punti di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ | il segmento di estremi x, $x+h$ sia contenuto in A. Allora esiste $\vartheta \in (0,1)$, dipendente da x e da h, tale che

$$f(x+h) = f(x) + df(x) + \frac{1}{2} d^2 f(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!} d^k f(x+\vartheta h)$$

$$f(x+h) = f(x) + df(x) + \frac{1}{2} d^2 f(x) + \dots + \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!} d^k f(x) + o(|h|^k)$$

dove $d^k f(x) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}(x)\, h_{i_1} h_{i_2} \cdot \ldots \cdot h_{i_k}$

RICERCA DI MASSIMI E MINIMI LIBERI E VINCOLATI

Proposizione Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, se x_0 è punto di massimo o minimo locale per f e f è derivabile x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$

Proposizione Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, una funzione di classe C^2 in un intorno di x_0 allora valgono i seguenti fatti:

(i) x_0 minimo locale $\Rightarrow$ $H_f(x_0)$ semi-definita positiva
(ii) x_0 massimo locale $\Rightarrow$ $H_f(x_0)$ semi-definita negativa
(iii) $H_f(x_0)$ definita positiva e $\nabla f(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ x_0 minimo locale
(iv) $H_f(x_0)$ definita negativa e $\nabla f(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ x_0 massimo locale
(v) $H_f(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è né di massimo né di minimo

Def. **INSIEME DI LIVELLO**

Data una funzione $f: U \to \mathbb{R}$ e dato $c \in \mathbb{R}$, si definisce insieme di livello l'insieme

$$f^{-1}(c) = \{ x \in U \mid f(x) = c \}$$

Se $U \subseteq \mathbb{R}^2$, un insieme di livello è una curva ed è detta curva di livello

TEOREMA Moltiplicatori di Lagrange

Se $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sono due funzioni di classe C^1, $\bar{x} \in \Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid g(x) = cost \}$ e $\nabla \bar{g}(\bar{x}) \neq 0$ e $\bar{x}$ è punto di massimo o di minimo di $f|_\Gamma$, allora

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$$

TEOREMA Moltiplicatori di Lagrange (versione strong)

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $g = (g_1, \dots, g_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ un vettore di funzioni vincolo, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $M = \{ x \in \Omega \mid g(x) = 0 \}$ luogo degli zeri di g e $P \in M$ t.c. $Dg(P)$ ha rango massimo; se P è punto di estremo locale per $f|_M$, allora

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ t.c. } \begin{cases} \nabla f(P) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(P) \\ g(P) = 0 \end{cases}$$

TEOREMA Dini NB! Queste sono le ip. migliori possibili ($\neq$ da quelle di Pratelli)

Sia $F(x,y)$ una funzione continua e la sua derivata parziale $F_y(x,y)$ continua in un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se $(x_0, y_0) \in A$ e

$$F(x_0, y_0) = 0 \ \wedge \ F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esistono due intorni $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ tali che l'equazione $F(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $\varphi: (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ tale che

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Inoltre φ è continua e $\varphi(x_0) = y_0$.

Facendo l'ulteriore ipotesi che F sia di classe C^1 nell'aperto A, allora anche φ è di classe C^1 in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e

$$\varphi'(x) = - \frac{D_x F(x, \varphi(x))}{D_y F(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Infine $F \in C^k(A) \Rightarrow \varphi \in C^k((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$

TEOREMA Dini (per funzioni scalari in più variabili)

Sia $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$

Sia $F(x,y)$ una funzione continua e la sua derivata parziale $F_y(x,y)$ continua in un aperto A di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $(x_0,y_0) \in A$ e

$$F(x_0,y_0) = 0 \wedge F_y(x_0,y_0) \neq 0$$

allora esistono due intorni $B(x_0,\delta)$ e $(y_0-\sigma, y_0+\sigma)$ tali che l'equazione $F(x,y)=0$ definisce implicitamente un'unica funzione $\varphi: B(x_0,\delta) \to (y_0-\sigma, y_0+\sigma)$ tale che

$$F(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B(x_0,\delta)$$

Inoltre φ è continua e $\varphi(x_0) = y_0$.

Facendo l'ulteriore ipotesi che F sia di classe C^1 nell'aperto A, allora anche φ è di classe C^1 in $B(x_0,\delta)$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{F_{x_i}(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Infine $F \in C^k(A) \Rightarrow \varphi \in C^k(B(x_0,\delta))$

TEOREMA della funzione implicita (equivalente di Dini per funzioni vettoriali)

Sia $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1 e $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

Supponiamo che $F(x_0,y_0) = 0$ e $D_y F(x_0,y_0)$ sia invertibile

($D_y F(x_0,y_0)$ è la sottomatrice quadrata della jacobiana di F relativa alle derivate parziali delle ultime m variabili).

Allora esistono due intorni $B(x_0,r_1) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B(y_0,r_2) \subseteq \mathbb{R}^m$ tali che l'equazione $F(x,y) = 0 \in \mathbb{R}^m$ definisce implicitamente un'unica funzione $\varphi: B(x_0,r_1) \to B(y_0,r_2)$ tale che

$$F(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x) \quad \forall x \in B(x_0,r_1)$$

Inoltre $\varphi \in C^1(B(x_0,r_1))$ e

$$\underbrace{D\varphi(x)}_{m \times n} = -\underbrace{D_y F(x,\varphi(x))^{-1}}_{m \times m} \underbrace{(D_x F(x,\varphi(x)))}_{m \times n}$$

$J_F = [D_x F \,\vdots\, D_y F]$

Def. DIFFEOMORFISMO

Una applicazione $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ si dice diffeomorfismo di classe C^k se f è di classe C^k, è bigettiva e $f^{-1}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è ancora di classe C^k

TEOREMA Invertibilità locale (o diffeomorfismo locale)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $f: \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1, e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $\det Df(x_0) \neq 0$, allora esistono U e V intorni di x_0 e $f(x_0)$ tali che $f_{|U}: U \to V$ è un diffeomorfismo di classe C^1. Inoltre $\forall x \in U$ vale la relazione

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Def. CONVERGENZA PUNTUALE

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: X \to Y$. Si dice che f_n converge puntualmente a f se $\forall x \in X$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, ossia:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \ \forall n > \bar{n}, \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Def. CONVERGENZA UNIFORME

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: X \to Y$. Si dice che f_n converge uniformemente a f se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \ \forall n > \bar{n}, \ \forall x \in X \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Osservazione convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale

Proposizione La seguente è una distanza sullo spazio di funzioni da X in Y

$$\hat{d}(g, f) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)), \ x \in X\}$$

$f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{} f$ se e solo se $\hat{d}(f_n, f) \to 0$

Proposizione Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: X \to Y$ continue.
Se f_n converge uniformemente a f allora f è continua

$C(X, Y) := \{$funzioni continue da X in $Y\}$

TEOREMA $C(X, Y)$ completo $\Longleftrightarrow$ Y completo

Def. EQUICONTINUITÀ

Una famiglia di funzioni $\{f_i\}_{i \in I}$ con $f_i: X \to Y$ si dice equicontinua in x_0 se

$$\forall x \in X \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon \ \ \forall i \in I$$

Def. EQUILIMITATEZZA

Una famiglia di funzioni $\{f_i\}_{i\in I}$ con $f_i : X \to \mathbb{R}^n$ si dice equilimitata in x_0 se

$\exists M \quad \forall x \in X : |f_i(x)| < M \quad \forall i \in I$

TEOREMA Ascoli - Arzelà

Sia (X,d) spazio metrico compatto e sia $\{f_n\} \subseteq C(X,\mathbb{R}^n)$ una successione equicontinua e equilimitata.

Allora, a meno di sottosuccessioni $f_n \xrightarrow{unif.} f$