Appunti di Analisi in Più Variabili 2

Erika Pieroni Alessandro Malusà

11 maggio 2012

Indice

Capitolo 1

Riepilogo: la Misura di Lebesgue

27 settembre 2011
Giovanni Alberti

Indicheremo con $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue, definita sulla σ-algebra $\mathcal{M}$ (indicata anche con $\mathcal{M}^n$ o con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$) degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. La misura del vuoto sarà sempre 0, mentre quella dell'unione disgiunta di una famiglia di insiemi (misurabili) sarà la somma delle singole misure. Ricordiamo che $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ sono caratterizzati da:

- Se $R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, con I_n intervalli, allora $R \in \mathcal{M}$
- Nelle stesse ipotesi $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(I_1) \cdot \mathcal{L}(I_2) \cdot \cdots \cdot \mathcal{L}(I_n)$
- $E \in \mathcal{M} \iff \forall \varepsilon \, \exists A$ aperto, C chiuso tali che $C \subseteq E \subseteq C$ e $\mathcal{L}(A \setminus C) \leq \varepsilon$
- $\forall A$ aperto, A è misurabile e la sua misura eguaglia l'estremo superiore di $\sum_{i=1}^k \mathcal{L}(R_i)$, dove $\{R_i : 1 \leq i \leq k\}$ varia sulle famiglie di rettangoli n-dimensionali a due a due disgiunti contenuti in A

Ricordiamo che uno spazio topologico si dice $N1$ o a base locale numerabile se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile; si dirà $N2$ o a base numerabile se ammette una base numerabile.

Delle quattro proprietà enunciate, l'ultima segue dalle altre, a patto di ricordare che $\mathbb{R}^n$ ha base numerabile. Infatti, ogni aperto è scrivibile come unione numerabile di rettangoli aventi centro in $\mathbb{Q}^n$ e raggio razionale, in modo che siano tutti disgiunti (benché non sia richiesto che debbano essere tutti aperti!). Certamente è possibile ricoprire A con rettangoli di questo tipo, poiché essi formano una base di $\mathbb{R}^n$, senza la condizione che siano disgiunti. Dato che questo è possibile, scelgo una tale famiglia in modo che sia numerabile. Supponiamo che il primo rettangolo intersechi il secondo: l'intersezione sarà ancora un rettangolo. Ma questo fornisce un modo naturale di decomporre il secondo in 2^n sottorettangoli, il primo dei quali è l'intersezione tra i due. Procedendo iterativamente si può mostrare che questa costruzione porta alla decomposizione richiesta. La σ-additività della misura mi permette di concludere.

Es 1.0.1 *Insieme di Cantor*: L'insieme di Cantor è costruito induttivamente a partire da un compatto, togliendo a ogni passo un suo sottoinisieme aperto. Più precisamente, chiamiamo C_0 l'intervallo $[0,1]$, e dato C_n definiamo C_{n+1} come l'unione delle componenti connesse del precedente, ciascuna privata della terza parte centrale. Chiameremo insieme di Cantor l'intersezione C di tutti i C_n: essendo intersezione di compatti è un compatto, e pertanto misurabile in quanto chiuso. Per studiarne la misura determineremo quella del suo complementare in C_0, il quale ha misura 1. Osserviamo che $C_0 \setminus C$ può essere ottenuto come unione disgiunta di intervalli aperti. Come si può verificare facilmente, passando da C_n a C_{n+1} si tolgono 2^n intervalli, di misura $\frac{1}{3}$ rispetto a quelli precedenti. Dunque la misura di $C_0 \setminus C_{n+1}$ è

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

da cui

$$\mathcal{L}(C_0 \setminus C) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

e dunque $\mathcal{L}(C) = 0$. Questo costituisce un esempio di insieme perfetto (i cui punti sono tutti di accumulazione, cioè privo di punti isolati), pertanto più che numerabile, ma di misura nulla.

Oss 1.0.1: Non è detto che l'immagine tramite applicazione continua di un misurabile sia nuovamente misurabile. Per costruire un controesempio, ricordiamo che la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è completa, cioè sottoinsiemi di insiemi trascurabili sono sempre misurabili. Un qualsiasi sottoinsieme non misurabile rispetto a $\mathcal{L}^1$ è però misurabile rispetto a $\mathcal{L}^2$ come sottoinsieme della retta $y = 0$ nel piano, essendo questa trascurabile. Se però proietto il piano sulle ascisse, l'immagine di un tale insieme è non misurabile per ipotesi.

Ricordiamo che una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ sarà detta misurabile se la controimmagine di ogni aperto è misurabile, o se vale una qualsiasi altra condizione a questa equivalente. Inoltre, è sempre possibile definire l'integrale di una funzione a valori reali (estesi), purché non negativa.

Durante il corso viene adottata la convenzione per cui $0 \cdot (+\infty) = 0$: l'integrale di una funzione nulla su un qualsiasi insieme, seppur di misura infinita, o quello di una qualsiasi funzione, anche a valori infiniti, su un trascurabile, sarà 0.

I teoremi di Beppo-Levi, Lebesgue, Fatou e simili sono richiamati dai corsi precedenti.

Es 1.0.2 *Funzione di Dirichlet*: Nella teoria di Riemann la funzione indicatrice dei razionali (funzione di Dirichlet) non è integrabile, come visto nei corsi precedenti. Tuttavia, essa assume il valore 0 ovunque all'infuori di $\mathbb{Q}$, che è numerabile e pertanto trascurabile, ed è dunque integrabile secondo Lebesgue, e l'integrale varrà 0 su qualsiasi dominio.

Capitolo 2

Spazi L^p e Spazi di Hilbert

2.1 Disuguaglianze Utili

28 settembre 2011
Giovanni Alberti

Vediamo ora alcune disuguaglianze che ricorrono spesso nella teoria degli spazi L^p.

2.1.1 Disugualianza di Jensen

Introdurremo ora una nota diseguaglianza utile nel seguito.

Thm 2.1.1 *Disuguaglianza di Jensen*: Si supponga E misurabile in $\mathbb{R}^n$, con $\mathcal{L}^n(E) = 1$, e siano date una funzione sommabile $f : E \to I$, I intervallo aperto, e una $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora

$$\varphi\left(\int_E f\right) \leq \int_E \varphi \circ f \tag{2.1}$$

Segue una dimostrazione parziale, prima di quella più generale:

Dim: Supponiamo $f = \sum a_i \chi_{E_i}$ semplice, con $\{E_i\}_{i \in I}$ una partizione finita di E tramite insiemi misurabili. Indicando con λ_i la misura di E_i, la (2.1) diventa:

$$\varphi\left(\sum_i \lambda_i a_i\right) \leq \sum_i \lambda_i \varphi(a_i) \tag{2.2}$$

essendo $\varphi \circ f$ semplice e costante su ciascun E_i. Ma per ipotesi E misura 1, e pertanto le λ_i hanno somma 1, in quanto rappresentano le misure degli elementi di una sua partizione. Questo mostra che la diseguaglianza di Jensen, in questo caso particolare, altro non è che una riscrittura dell'ipotesi di convessità della φ.

Consideriamo ora il caso in cui f e φ siano limitate. In questo caso, esisterà $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici uniformemente convergente a f.

Per uniforme convergenza la successione degli integrali delle f_n convergerà a quello di f, ma per ogni n varrà $\varphi\left(\int_E f_n\right) \leq \int_E \varphi \circ f_n$. Ma φ è una funzione convessa definita su un aperto di $\mathbb{R}$, e dunque è continua. Passando al limite da ambo i membri dell'ultima disuguaglianza si ottiene la tesi, per questo caso.

Argomentiamo a parte l'esistenza di una successione (f_n) come quella richiamata in questa dimostrazione. Siano a, b rispettivamente gli estremi inferiore e superiore della funzione f. Dato $\varepsilon > 0$, esisterà un naturale n sufficientemente grande da rendere $\delta = \frac{b-a}{n}$ più piccolo di ε. Per i che varia tra 0 ed $n-1$, chiamiamo E_i la controimmagine di $[a+i\delta, a+(i+1)\delta)$ ed E_n quella del punto b. Se poi indichiamo con α_i il numero $a+i\delta$, abbiamo la funzione semplice $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ che dista, punto per punto, meno di ε da f.

Ecco la seconda prova, valida in generale sotto le ipotesi del teorema:

Dim: Chiamando per comodità $t = \int_E f$, esisterà c tale che, comunque dato $s \in I$ valga $\varphi(s) \geq \phi(t) + c(s-t)$. L'esistenza di una tale costante può essere mostrata osservando che, data la convessità di φ, esistono i limiti destro e sinistro del suo rapporto incrementale in ogni punto dell'intervallo, e sarà sufficiente scegliere come c un qualsiasi valore compreso tra questi nel punto t. Varrà allora:

$$\int_E \varphi \circ f \geq \int_E (\varphi(t) + c(f(x) - t))\, dx = \varphi(t) - ct + ct = \varphi(t) = \varphi\left(\int_E f\right)$$

che è la tesi.

Ex 2.1.1: Trovare la disuguaglianza analoga per E di misura m arbritraria e dimostrarla.

Suggerimento: La disugualianza può essere ricavata tramite un cambio di variabile. Inoltre, nella dimostrazione qui esposta valeva $t \in I$ per via del fatto che, essendo E di misura 1, su tale dominio l'integrale di una funzione (sommabile!) è uguale alla sua media.

Oss 2.1.2: L'ipotesi di sommabilità è essenziale, e la disuguaglianza non vale se si indebolisce tale condizione chiedendo solo l'integrabilità.

2.1.2 Disuguaglianza di Young

Def 2.1.1: Dato $p > 1$ un numero reale, chiameremo suo coniugato il numero q tale che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Diremo che il coniugato di 1 è ∞, e viceversa.

Thm 2.1.3 *Disuguaglianza di Young*: Dati $p, q > 1$ coniugati, $a, b \geq 0$, vale:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.3}$$

Dim: Siano $\alpha := a^p$, $\beta := b^q$. Allora la (2.3) diventa

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{p} \log \alpha + \frac{1}{q} \log \beta \leq \log(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q})$$

Ma questa diseguaglianza è nota per via della concavità della funzione logaritmo, e questo conclude la dimostrazione.

Def 2.1.2: Siano $1 \leq p < \infty$, E un insieme misurabile assegnato, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Chiameremo $\|f\|_p := \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ la norma $L^p(E)$. Laddove E sia evidente dal contesto si parlerà semplicemente di norma L^p.

Si parla anche di norma L^∞, e la si indica con $\|f\|_\infty$, intendendo l'estremo superiore essenziale, definito come $\inf\{c \in [0, \infty] : |f(x)| \leq c \text{ per q.o. } x \in E\}$.

Il motivo per cui abbiamo chiamato norme queste quantità è che, come si vedrà più avanti, esse soddisfano in effetti le proprietà che definiscono le norme, a condizione di restringerle a opportuni spazi di funzioni e di quozientarli rispetto a opportune relazioni di equivalenza. Evidentemente queste quantità non cambiano se la funzione f viene modificata su un insieme trascurabile, e questo giustifica la definizione data di sup essenziale.

Ex 2.1.2: Mostrare che $\|f\|_\infty$ è un minimo, cioè $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ per quasi ogni x.

2.1.3 Disuguaglianza di Hölder

Thm 2.1.4 *Disuguaglianza di Hölder*: Dati $p, q \geq 1$ coniugati, $f, g : E \to \mathbb{R}$ positive allora

$$\int_E fg \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{2.4}$$

Dim: Sfrutteremo la disuguaglianza di Young per il caso $p, q \neq 1$. Sia scelto $t \in (0, \infty)$, allora

$$\int_E fg = \int_E (tf)(\frac{1}{t}g) \leq \int_E \left(\frac{(tf)^p}{p} + \frac{(t^{-1}g)^q}{q} \right) = \frac{t^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{t^{-q}}{q} \|g\|_q^q$$

cioè $\forall t \in (0,\infty)$ vale $\int_E fg \leq \frac{t^p}{p}\|f\|_p^p + \frac{t^{-q}}{q}\|g\|_q^q$. Scelgo come valore particlare $t = \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$, e ottengo esattamente la diseguaglianza desiderata.

Il caso $p = 1$ (e analogamente per $p = \infty$) deve essere trattato a parte, poiché le ipotesi della diseguaglianza di Young lo escludono. Vale però:

$$\int_E fg \leq \int_E f\|g\|_\infty = \|g\|_\infty \int_E f = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

il che conclude.

È naturale, a questo punto, chiedersi in quali condizioni valga l'uguaglianza, almeno nel caso in cui le due funzioni abbiano norma finita.

Ex 2.1.3: Mostrare che l'uguaglianza vale per funzioni a norma finita se e soltanto se $f^p = c \cdot g^q$ quasi ovunque, per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Soluzione: La verifica che questa ipotesi garantisca l'uguaglianza è banale. Per mostrare l'altra implicazione, consideriamo la catena di diseguaglianze nella dimostrazione di Hölder, e scegliamo lo stesso t.

$$\int_E fg = \int_E (tf)(t^{-1}g) = \int_E \left(\frac{(tf)^p}{p} + \frac{(t^{-1}g)^q}{q}\right)$$

Qui avevamo sfruttato la disuguaglianza di Young, che vale in virtù della convessità del logaritmo. In Young abbiamo allora:

$$\frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta = \log\frac{\alpha}{p} + \log\frac{\beta}{q}$$

da cui, per le proprietà del logaritmo, $\alpha = \beta$, cioè $a^p = b^q$, che nella notazione usata in Hölder diviene $(tf)^p = \left(t^{-1}g\right)^q$ quasi ovunque.

2.1.4 Disuguaglianza di Minkowski

Thm 2.1.5: Comunque dati $1 \leq p \leq \infty$, f_1, $f_2 : E \to \mathbb{R}$, vale

$$\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$$

a patto che la quantità a sinistra sia finita.

Dim:

$$\begin{aligned}
&\int_E |f_1 + f_2|^p = \\
&= \int_E |f_1 + f_2|^{p-1}|f_1 + f_2| \overset{\clubsuit}{\leq} \int_E |f_1 + f_2|^{p-1}(|f_1| + |f_2|) = \\
&= \int_E |f_1 + f_2|^{p-1}|f_1| + \int_E |f_1 + f_2|^{p-1}|f_2| \overset{\spadesuit}{\leq} \||f_1 + f_2|^{p-1}\|_q(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) = \\
&= \|f_1 + f_2\|_p^{p-1}(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)
\end{aligned}$$

dove q è il coniugato di p, e la maggiorazione marcata con $\clubsuit$ è un'applicazione di quella triangolare, mentre il simbolo $\spadesuit$ contrassegna la diseguaglianza di Hölder. Occorre giustificare il passaggio $\||f_1+f_2|^{p-1}\|_q = \|f_1+f_2\|_p^{p-1}$. Osserviamo che:

$$(p-1)q = \frac{p-1}{\frac{1}{q}} = \frac{p-1}{1-\frac{1}{p}} = p\frac{p-1}{p-1} = p$$

da cui

$$\||f_1+f_2|^{p-1}\|_q = \left(\int_E |f_1+f_2|^{(p-q)q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_E |f_1+f_2|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

D'altronde vale anche

$$\|f_1+f_2\|_p^{p-1} = \left(\int_E |f_1+f_2|^p\right)^{\frac{1}{p}(p-1)} = \left(\int_E |f_1+f_2|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Si può dunque concludere che $\|f_1+f_2\|_p^p \leq \|f_1+f_2\|_p^{p-1}(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)$. Se $\|f_1+f_2\|_p^{p-1} = 0$, allora la disuguaglianza diviene banale; altrimenti semplificando si ha la tesi.

Oss 2.1.6: Esclusi i valori estremi $p = 1$ e $p = \infty$, la disuguaglianza vale anche se la norma della somma delle due funzioni è ∞. Nel primo caso, infatti, la somma delle norme di f_1 ed f_2 è certamente non negativa, e dunque vale l'asserto. Supponiamo invece che $\|f_1+f_2\|_p$ non sia finita: deve allora valere:

$$\begin{aligned}\infty = \left(\int_E |f_1+f_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ \leq \left(\int_E (|f_1|+|f_2|)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ \leq \left(\int_E |f_1|^p + \int_E |f_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ \leq \left(\int_E |f_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |f_2|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \\ = \|f_1\|_p + \|f_2\|_p &\end{aligned}$$

Dunque almeno una delle norme di f_1 ed f_2 è infinita, e vale l'uguaglianza $\|f_1+f_2\|_p = \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$. In altre parola, se le norme di due funzioni sono entrambe finite, allora lo è anche quella della loro somma.

2.2 Spazi L^p

L'aspetto interessante dell'osservazione precedente è che, se le norme di due funzioni sono finite allora anche la loro somma gode della stessa proprietà. Grazie a questo vale il seguente fondamentale risultato:

Prop 2.2.1: Fissati E, $1 \leq p \leq \infty$, lo spazio X delle funzioni $f : E \mapsto \mathbb{R}$ a norma finita costituisce uno spazio vettoriale.

Dim: L'insieme X è naturalmente immerso in uno spazio vettoriale, cioè quello formato da tutte le funzioni definite su E a valori in $\mathbb{R}$ esteso, pertanto è sufficiente mostrare che è chiuso rispetto alle operazioni. Quanto appena osservato permette di affermare che lo spazio è chiuso rispetto alla somma, mentre è facile mostrare che, comunque dati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in X$ si avrà $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p < \infty$.

Def 2.2.1: Per $1 \leq p \leq \infty$, lo spazio vettoriale finora indicato con X viene detto spazio $\mathcal{L}^p(E)$, o anche soltanto $\mathcal{L}^p$ qualora l'insieme E sia chiaro dal contesto.

In $\mathcal{L}^p$, se $p < \infty$ la funzione $\|\cdot\|_p$ fornisce una seminorma, in quanto:

- $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f \in X$
- $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$

dove il secondo punto è la diseguaglianza di Minkowski. Non si può però dire che questa sia una norma: ricordando che lo 0 di $\mathcal{L}^p$ è la funzione identicamente nulla, non è vero che questa sia l'unica funzione a norma nulla.

Es 2.2.1: La già nota funzione di Dirichlet rappresenta un esempio di funzione non identicamente nulla e a norma 0.

Anche in $\mathcal{L}^\infty$ sono soddisfatte le due proprietà sopra enunciate, ma allo stesso modo la seminorma non è una norma. Per questo motivo è naturale introdurre una relazione di equivalenza su $\mathcal{L}^p$ che permetta di passare al quoziente preservando le proprietà finora osservate e rendere la seminorma una norma vera e propria.

Osserviamo che l'insieme delle funzioni f a norma $\|f\|_p = 0$ forma un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}^p$. Avrà dunque senso quozientare lo spazio rispetto ad esso, cioè rispetto alla relazione di equivalenza $\|x - y\|_p = 0$. Questo equivale a chiedere che le due funzioni x ed y differiscano solo su di un insieme trascurabile.

Def 2.2.2:

1. Se $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p$, daremo la relazione di equivalenza $f_1 \sim f_2$ se $f_1 = f_2$ quasi ovunque, o equivalentemente se la loro differenza ha norma nulla.
2. Indicheremo con $L^p(E)$, o sbrigativamente L^p, lo spazio dato da $\mathcal{L}^p(E)/\sim$.

La seminorma di $\mathcal{L}^p$ passa al quoziente tramite $\sim$, e pertanto induce una seminorma su L^p. Per come abbiamo definito la relazione di equivalenza, però, è chiaro che l'unica classe a seminorma nulla è quella della funzione identicamente nulla, e pertanto quella che abbiamo è una norma a tutti gli effetti.

Lo spazio che abbiamo costruito <u>NON</u> è uno spazio di funzioni, ma di classi di funzioni. Avrà però senso parlare di integrale di un elemento di L^p definendolo come integrale di un suo qualsiasi rapresentante, in quanto funzioni che differiscano su di un insieme trascurabile hanno lo stesso integrale.

Abbiamo dunque costruito lo spazio metrico L^p, che, come vedremo, è uno spazio di Banach, in cui possono essere applicati tutti i risultati validi negli spazi metrici completi (ad esempio il teorema delle contrazioni). In effetti, la completezza di L^p è lo scopo dell'introduzione della misura di Lebesgue, dato che la stessa costruzione, fatta però con l'integrale di Riemann, non godrebbe di questa proprietà. Esistono ad esempio successioni di funzioni continue Riemann integrabili, convergenti in L^p a funzioni illimitate. Esistono inoltre classi di funzioni integrabili secondo Lebesgue che non ammettono rappresentanti integrabili secondo Riemann.

Es 2.2.2: La classe della funzione 0 ammette un rappresentante non Riemann-integrabile: la funzione di Dirichlet.

Osserviamo che la norma in L^2 è indotta dal prodotto scalare dato da:

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_E f_1 \cdot f_2$$

il quale, come si può vedere, è ben definito sulle classi essendo definito come integrale ed è finito purché lo siano le norme di f_1 ed f_2, grazie alla disuguaglianza di Hölder. Bilinearità e simmetria discendono dalle proprietà del prodotto e dell'integrale.

In generale, per $p \neq 2$, la norma in L^p non sarà indotta da alcun prodotto scalare, poiché non soddisfa l'identità del parallelogramma, espressa da

$$\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2 \tag{2.5}$$

4 ottobre 2011
Giovanni Alberti

2.2.1 Completezza degli spazi L^p

Ricordiamo ora un risultato noto dai precedenti corsi:

Prop 2.2.2: Sia (X, d) uno spazio metrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

Allora la successione è di Cauchy.

Dim: Se la serie delle distanze tra elementi consecutivi converge, allora la successione delle somme ridotte è di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, dunque, esisterà $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni n, m naturali maggiori di N, si abbia

$$\sum_{k=n}^{m} d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$$

Per disuguaglianza triangolare, però, la distanza tra x_n e x_m non eccede questa quantità, e, in ultima analisi, è minore di ε.

Thm 2.2.3 *Completezza di L^p*: Sia $1 \leq p \leq \infty$, E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ misurabile. Allora lo spazio $L^p(E)$ è completo.

Dim: Assumiamo $p < \infty$, e dimostriamo l'asserto per parti:

Passo 1 Dimostriamo l'esistenza di una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k_n}$, che chiameremo "rapida", con la proprietà che il suo k-esimo elemento disti in L^p dal successivo meno di 4^{-k}. Poiché la successione è di Cauchy, potremo scegliere un certo naturale n_0 tale che $\|f_{n_i} - f_{n_j}\|_p < 1$ per $i, j \geq n_0$. In particolare, per qualsiasi scelta di $n_1 > n_0$, f_{n_0} disterà da f_{n_1} meno di 1. Con la stessa costruzione si può definire ricorsivamente tutta la sottosuccessione. D'ora in avanti indicherò con f_k i suoi elementi.

Passo 2 Studiamo ora il comportamento dell'insieme A_k dato da quegli x tali che $|f_{k+1}(x) - f_k(x)|$ sia maggiore o uguale a 2^-k. Elevando alla p la relazione che caratterizza la sottosuccessione rapida, si ottiene:

$$4^{-kp} \geq \int_E |f_{k+1} - f_k|^p \geq \int_{A_k} 2^{-kp}$$

e da qui si conclude che la misura di A_k non eccede 2^{-kp}.

Passo 3 Definiamo ora l'insieme A come quello degli x appartenenti ad A_k frequentemente rispetto a k. Insiemisticamente questo è dato da $\bigcap_{h=1}^{\infty} (\bigcup_{k=h}^{\infty} A_k)$. Rispetto ad h, $\bigcup_{k=h}^{\infty} a_k$ è decrescente, e dunque la misura di A sarà il limite per $h \to \infty$ delle misure di tali insiemi. Ma queste non eccedono $\sum_{k \geq h} 2^{-pk}$, che è infinitesimo rispetto ad h essendo la coda di una serie convergente. Dunque A è trascurabile, cioè quasi ogni x è definitivamente fuori da A_k.

Passo 4 Per quasi ogni x varrà definitivamente $|f_{k+1}(x) - f_k(x)| < 2^{-k}$, e ciò significa che è ben definita quasi ovunque la funzione

$$f(x) = f_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$$

essendo somma di una serie assolutamente convergente. Per tutti gli x per cui tale somma non è ben definita posso stabilire un valore arbitrario per $f(x)$, ad esempio 0. La k-esima somma parziale, d'altronde, non è altro che quello di $f_k(x)$. Dunque la sottosuccessione rapida è convergente quasi ovunque. Questo non è sufficiente per la convergenza in L^p, ma fornisce un candidato punto limite per la successione.

Passo 5 Comunque scelti $k < k'$, per la disuguaglianza di Minkowski ho:

$$\|f_k - f_{k'}\|_p \leq \sum_{i=k}^{k'-1} \|f_{i+1} - f_i\|_p \leq \sum_{i=k}^{k'-1} 4^{-i}$$

Passando al limite e applicando il lemma di Fatou posso concludere che la norma L^p di $f_k - f$ non eccede la somma di 4^{-i} su $i \geq k$. Ciò significa che la successione rapida converge a f in L^p.

Abbiamo mostrato che f_n ha f come punto limite, e dato che la successione è di Cauchy questo implica che converge.

Per $p = \infty$, la condizione che una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia di Cauchy è che, comunque dato ε positivo esista un naturale N tale che per $n, m > N$ sia $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per quasi ogni x. Abbiamo, dunque, per ciascuna coppia (m, n), un insieme trascurabile fuori dal quale vale la proprietà che caratterizza le successioni di Cauchy. Il nostro obiettivo è mostrare che possiamo scegliere un insieme trascurabile fuori dal quale vale la proprietà richiesta indipendentemente dalla scelta di n ed m.

Sia fissato un naturale k: esisterà un N che soddisfi la condizione di Cauchy in L^p. Per ogni (n, m) posso definire $A^k_{(n,m)}$ come l'insieme su cui $|f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}$. Essendo tale insieme trascurabile, e l'insieme delle coppie (n, m) numerabile, l'unione A^k al variare di tali coppie sarà ancora trascurabile. Fissato k, dunque, esisterà un naturale N tale la condizione di Cauchy è soddisfatta da N in poi quasi ovunque, ovvero fuori da un trascurabile che dipende solo da k. Ma l'unione A degli A^k è ancora trascurabile, dato che k varia sui naturali: questo significa che, fuori da un insieme di misura nulla, la successione di funzioni è di Cauchy rispetto alla norma uniforme, cioè converge uniformemente ad una funzione limitata f. Estendendo f in modo arbitrario su A ottengo il limite L^∞ di f_n, e questo conclude.

Era stato osservato che la stessa costruzione permette di definire gli spazi L^p tramite l'integrale di Riemann, ma questo non dà luogo a spazi completi. Ci chiediamo ora quale punto della dimostrazione appena fatta richiede l'uso della teoria di Lebesgue. Per successioni di funzioni integrabili positive, convergenti a funzioni integrabili, la tesi del lemma di Fatou vale anche nella teoria di Riemann, sebbene la dimostrazione sia più complessa. Nella teoria di Lebesgue (e della misura in generale) il passaggio al limite preserva la misurabilità grazie alla struttura di σ-algebra di $\mathcal{M}$, pertanto nelle ipotesi del lemma di Fatou è sufficiente supporre la convergenza quasi ovunque senza imporre condizioni aggiuntive di misurabilità del limite. Con Riemann questo non è vero, come mostra l'esempio seguente.

Es 2.2.3: Se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una numerazione dei razionali tra 0 e 1, e se f_n è la somma delle indicatrici di q_i fino ad n, f_n converge puntualmente alla funzione di Dirichlet, la quale però non è Riemann integrabile, come visto nell'esempio 1.0.2.

2.2.2 Diversi tipi di convergenza e approssimazioni in L^p

Nell'ambito degli spazi di funzioni misurabili abbiamo ora due distinte nozioni di convergenza per successioni. Ne introduciamo ora una terza, per poi studiare le implicazioni che sussistono tra i vari tipi.

Def 2.2.3: Diremo che una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in misura ad una fuzione f se per ogni ε positivo la misura di $\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ tende a zero per $n \to \infty$.

Prop 2.2.4 :

1. $f_n \to f$ q.o. su un domino di misura finita $\implies f_n \to f$ in misura
2. $f_n \to f$ in L^p con $p < \infty \implies f_n \to f$ in misura
3. $f_n \to f$ in misura $\implies \exists f_{n_k} \to f$ q.o.
4. $f_n \to f$ in L^p con $p < \infty \implies \exists f_{n_k} \to f$ q.o.
5. (Teorema di Egorov) $f_n \to f$ q.o. su E di misura finita $\implies \forall \varepsilon > 0\ \exists A$ tale che $f_n \to f$ uniformemente fuori da A, e A ha misura minore di ε
6. l'enunciato del Teorema di Egorov è falso se si omette l'ipotesi di finitezza della misura di E

Dim :

1. NOTA: a lezione questa dimostrazione è stata lasciata per esercizio.

   Sia fissato $\varepsilon > 0$. Per ogni naturale k sia $A_k = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. L'insieme $A = \bigcap_{h=0}^{\infty} (\bigcup_{k=h}^{\infty} A_k)$ è formato dagli x per i quali il valore di f_n dista frequentemente da quello di f più di ε, e dunque ha misura nulla per ipotesi. D'altronde, $\bigcup_{h=k}^{\infty} A_k$ è decrescente in k, e dato che la misura di E è finita quella di A è il limite di queste. Ma questo implica che anche la misura di A_k è infinitesima, e questo fornisce la tesi.

2. Per ogni ε positivo, sia A_n come nel punto precedente. Allora vale:

   $$\int_E |f_n - f|^p \geq \int_{A_n} |f_n - f|^p \geq \int_{A_n} \varepsilon^p = \mathcal{L}(A_n)\varepsilon^p$$

   cioè $\mathcal{L}(A_n) \leq \left(\varepsilon \|f_n - f\|_p\right)^p \to 0$, e questa è la condizione per la convergenza in misura.

3. Abbiamo già mostrato questo risultato nei punti 1-4 della dimostrazione della completezza di L^p.

4. Come nel caso precedente, l'idea sarà quella di costruire una sottosuccessione rapida e mostrarne la convergenza quasi ovunque. Data la convergenza in misura, esisterà una sottosuccessione $(f_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mathcal{L}(A_k) \leq 2^{-k}$, dove con A_k indichiamo l'insieme $\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq 2^{-k}\right\}$. Come prima definiamo A come l'insieme degli x appartenenti ad A_k frequentemente in k, e analogamente al punto 3 della dimostrazione sopra menzionata la misura si mostra che tale insieme è trascurabile. Per $x \notin A$ si ha $f_{n_k}(x) \to f(x)$: tali x, infatti, soddisfano definitivamente $|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}$, e cioè la successione converge in tali punti.

5. Per dimostrare il Teorema di Egorov si fa uso di un risultato apparentemente più debole: nelle ipotesi del teorema, per ogni δ e per ogni ε positivi esistono un insieme A di misura minore di ε e un naturale N tali che $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ per ogni $x \notin A$ e per ogni $n > N$. Per ogni n naturale definisco A_n l'insieme degli x per cui $|f_m(x) - f(x)| \geq \delta$ per qualche

$m \geq n$. Dato che la successione converge quasi ovunque, l'intersezione di tutti questi A_k ha misura nulla, contenendo gli x per cui non si ha convergenza puntuale. Ma dato che A_k è decrescente, essendo in misura finita questo significa che la misura di A_k tende a 0. Ciò significa che, da un certo N in poi, A_k ha misura minore di ε. Basterà dunque scegliere $A = A_N$ per concludere.

Forti di questo risultato preliminare, dimostriamo Egorov. Ciò che vogliamo è trovare un insieme A che "vada bene per qualunque δ": dovrà valere che, fissato δ, $|f_n - f| < \delta$ definitivamente fuori da un A che non dipenda da δ. Per ogni n naturale positivo avrò un A_n di misura minore di $2^{-n}\varepsilon$ dato da quanto mostrato prima, fuori dal quale f_n ed f distino meno di 2^{-n}: la misura dell'unione A di tali A_k non sarà maggiore di ε. Fissato δ esisterà n con $2^{-n} - \delta$, e fuori da A_n le funzioni f_n ed f disteranno puntualmente meno di δ, definitivamente. A maggior ragione tale condizione varrà fuori da A: la successione converge uniformemente sul complementare di questo insieme, di misura minore di ε.

6. Consideriamo al posto di E l'intera retta reale, e come successione quella delle indicatrici di $(-\infty, -n)$: $f_n = \chi_{(-\infty,-n)}$. Per ogni n l'insieme dei punti in cui il valore di f_n dista più di $1/2$ ha misura infinita: ciò confuta la tesi di Egorov in questo caso.

Oss 2.2.5: La convergenza in norma non implica quella puntuale, nemmeno quasi ovunque. Cstruiamo una successione convergente in L^p ma non puntualmente sull'intervallo $[0, 1]$. Ogni n naturale può essere scritto in modo unico come $2^k + h$, con $2^k + 1 > n$. Per ogni n definiamo quindi f_n come la funzione indicatrice dell'intervallo $[h2^{-k}, (h + 1)2^{-k}]$. L'integrale di $|f_n|^p$ vale 2^{-kp} ed è dunque infinitesimo, pertanto la successione converge a 0 in L^p per p finito, ma f_n assume frequentemente entrambi i valori 0 e 1: la successione non converge in nessun punto.

Nemmeno l'altra implicazione è vera: la successione $n\chi_{(0,1/n]}$ converge puntualmente a 0, ma la norma L^p di queste è 1 per ogni p finito.

Vediamo ora un primo risultato di densità, molto utile nel seguito.

Thm 2.2.6: Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di misura finita, X l'insieme delle restrizioni ad E delle funzioni continue a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$ (classe che indicheremo con $C_c^0(\mathbb{R}^n)$). Allora X è incluso in $L^p(E)$ per ogni p ed è denso in esso se p è finito.

Oss 2.2.7: In L^∞ la tesi del teorema è falsa: in $C_c^0([0, 1])$, ad esempio, la norma ∞ equivale a quella uniforme, rispetto alla quale sappiamo che le funzioni continue formano un insieme chiuso. Dunque C_c^0 è un sottospazio chiuso e proprio in L^∞ (la classe dell'indicatrice di $[0, 1/2]$, ad esempio, non ammette alcun rappresentante continuo), che pertanto non può essere denso.

Nella dimostrazione del teorema faremo uso di un lemma:

Lemma 2.2.8: Nelle ipotesi del teorema, per p finito le funzioni semplici (combinazioni lineari di indicatrici sommabili) sono dense in $L^p(E)$.

Dim *(Lemma 2.2.8)*: La dimostrazione è divisa in due passi:

Passo 1 Ogni $f \in L^p$ è limite di funzioni limitate. Definisco f_n che vale n dove $f > n$, $-n$ dove $f < -n$, f altrimenti. Grazie al Teorema di Lebesgue la successione converge a f in L^p.

Passo 1 Ogni funzione f limitata in L^p è limite uniforme di funzioni semplici: se $M = \sup|f(x)|$, scelto ε positivo e n naturale con $\frac{2M}{n} < \varepsilon$, posso suddividere l'intervallo $[-M, M]$ in n parti uguali. La controimmagine E_i di ciascuna di queste è misurabile, su E_i la funzione f è compresa tra $\frac{2i-n}{n}M$ e $\frac{2i-n+1}{n}M$. Segue la funzione $\varphi = \sum \frac{2i-n}{n} M\chi_{E_i}$ dista in ogni punto meno di ε da f: da qui la convergenza uniforme. Ma su E di misura finita la convergenza uniforme implica quella in L^p.

Questo dimostra la tesi.

Dim *(Teorema 2.2.6)*: Se una funzione è continua e il suo supporto è compatto, allora assumerà in $\mathbb{R}^n$ massimo e minimo assoluti: in particolare è limitata in E. Segue che la sua norma L^p è finita per ogni p.

Per p finito, sarà sufficiente mostrare che ogni funzione semplice in L^p è limite di funzioni in X. Per fare questo, basterà argomentare un risultato ancora più semplice, limitandosi a funzioni indicatrici anziché semplici: se φ è una combinazione lineare di indicatrici ψ^i approssimate da ψ^i_n, la stessa combinazione lineare delle ψ^i_n per n fissato darà una φ_n che approssima φ.

Sia allora $\psi = \chi_F$ con $F \subseteq E$ misurabile. Fissato $\varepsilon > 0$, allora, esisteranno A e C rispettivamente aperto e chiuso in E con $C \subseteq F \subseteq A$ e $\mathcal{L}(A \setminus C) < \varepsilon$. Definiamo allora:

$$g(x) = \frac{\text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}{\text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus A) + \text{dist}\,(x, C)}$$

Tale funzione g è continua, essendo costruita con somme e prodotti di funzioni continue in virtù della chiusura di $\mathbb{R}^n \setminus A$ e di C, e vale 1 in C e 0 fuori da A: si discosta da ψ solo in $A \setminus C$. D'altra parte, vale sempre $|g - \psi| \leq 1$, e la distanza L^p tra g e ψ è minore di ε. Questo conclude la dimostrazione.

Un altro risultato utile è il seguente:

Thm 2.2.9 *Teorema di Lusin*: Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura finita e $f : E \to \mathbb{R}$ è misurabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione g continua e un insieme E' misurabile di misura minore di ε tali che, fuori da E', $f \equiv g$.

11 ottobre 2011
Giovanni Alberti

Dim : Supponiamo f limitata. Avendo E misura finita, $f \in L^p$ per ogni p. In particolare, essendo le funzioni continue dense in L^p, posso scegliere una successione $f_n \to f$ in L^1 di funzioni continue. A meno di scegliere una sottosuccessione, posso assumere che la convergenza sia puntuale quasi ovunque. Dal lemma di Egorov (5) segue che è possibile scegliere un insieme A di misura arbitrariamente piccola fuori dal quale la convergenza sia uniforme. Questo garantisce che, sul complementare di A, f coincide con una funzione che è continua su tale insieme: non possiamo ancora concludere, poiché l'enunciato parla di una funzione continua su tutto E. Sia allora A come dal teorema di Egorov di misura minore di $\varepsilon/2$: esisteranno un chiuso C e un aperto O con $C \subseteq A \subseteq O$, e la misura della differenza minore di $\varepsilon/2$. Definisco ora una funzione fuori da $O \setminus C$, data dal limite di f_n fuori da O e da 0 su C. Tale funzione è continua su un chiuso, e per il lemma di Titze può essere estesa ad una continua su E. Questo conclude il caso in cui f sia limitata.

Si può passare ora al caso generale con un artificio che consiste nel comporre f con una funzione limitata per ricondursi al caso precedente. Considero $\tilde{f} = \arctan \circ f$: esisterà $\tilde{g}$ continua su E che coincide con $\tilde{f}$ fuori da un opportuno insieme. Considero ora $g = \tan \circ \tilde{g}$: questa sarà la funzione cercata. La funzione arctan è uniformemente continua su tutto l'asse, e pertanto posso scegliere $\tilde{g}$ coincidente con $\tilde{f}$ fuori da un insieme abbastanza piccolo da ridurre a meno di ε la misura della sua immagine tramite tan.

2.3 Spazi di Hilbert

Def 2.3.1 *Spazio di Hilbert*: Sia dato uno spazio vettoriale reale X. Chiameremo prodotto scalare su X una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineare e simmetrica, cioè lineare in ciascun argomento una volta fissato l'altro, e tale che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ comunque dati $x, y \in X$. Un prodotto scalare si dice definito positivo se, per ogni $x \in X$, vale $\langle x, x \rangle \geq 0$, e l'uguaglianza vale solo per $x = 0$. Se la norma indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rende X uno spazio metrico completo, diremo che X, munito di tale prodotto, è uno spazio di Hilbert.

Ogni spazio vettoriale di dimensione finita con prodotto scalare definito positivo è di Hilbert, e in questi spazi la linearità è sufficiente a garantire la continuità. Questo però non è vero in dimensione infinita, e anzi esistono sempre, in questo caso, funzioni lineari ma non continue.

Oss 2.3.1 : Il prodotto scalare è una funzione continua:

$$|\langle x + h, \tilde{x} + \tilde{h} \rangle - \langle x, \tilde{x} \rangle| \leq |\langle x, \tilde{h} \rangle| + |\langle \tilde{x}, h \rangle| + |\langle h, \tilde{h} \rangle| \leq \|x\| \cdot \|\tilde{h}\| + \|\tilde{x}\| \cdot \|h\| + \|h\| \cdot \|\tilde{h}\|$$

dove l'ultimo passaggio è un'applicazione della disuguaglianza di Schwartz applicata ai tre prodotti scalari. In alternativa, si può ricorrere alla formula di polarizzazione:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

e concludere sfruttando la continuità della norma.

Es 2.3.1 *Spazi di Hilbert*:

- $L^2(E)$ è uno spazio vettoriale, e la funzione $\langle f, \tilde{f} \rangle = \int_E f\tilde{f}$. La verifica che questo spazio gode delle proprietà richieste è già stata sostanzialmente fatta.
- Lo spazio ℓ^2 delle successioni di numeri reali a quadrato sommabile con il prodotto scalare dato da $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ per $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un modo per vedere che questo spazio è di Hilbert è osservare che corrisponde a $L^2(E)$ con $E = \mathbb{N}$, con σ-algebra l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ e la misura quella che conta i punti.

Def 2.3.2 *Base di Hilbert*: Sia X uno spazio di Hilbert. Diciamo che una famiglia indicizzata $(x_i)_{i\in I}$ di vettori è un sistema ortonormale se per ogni $i, j \in I$ vale $\langle i, j \rangle = \delta_{i,j}$. Si chiama base di Hilbert un sistema ortonormale massimale (si usa dire anche completo).

La condizione di massimalità può essere formulata nel seguente modo: se $\langle x, x_i \rangle = 0$ per ogni $i \in I$, allora $x = 0$. Infatti, se un sistema non è massimale allora può essere esteso, cioè esiste un elemento $x \in X$ ortogonale a tutti gli x_i e di norma unitaria, in particolare non nullo. Viceversa, se x è un vettore non nullo ortogonale a tutti gli x_i, è possibile estendere il sistema ortonormale aggiungendo x (a meno di normalizzazioni), e questo mostra che $(x_i)_{i\in I}$ non è massimale.

Lemma 2.3.2: Sia $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile in X, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a quadrato sommabile. Allora la successione $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ converge a un qualche $\bar{x} \in X$ (si dirà $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \bar{x}$). Vale inoltre $\|\bar{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, e $\langle \bar{x}, e_n \rangle = a_n$.

Dim: Sia $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Mostriamo che questa successione è di Cauchy: in effetti, se $\varepsilon > 0$ e $n \le m$, $\|y_n - y_m\|^2 = \sum_{i=n}^{m} \|a_i e_i\|^2 = \sum_{i=n}^{m} a_i^2$. La condizione di Cauchy sulla serie degli a_n^2 implica che questa somma, per n abbastanza grande, è minore di ε^2. Si avrà quindi $\|y_n - y_m\| < \varepsilon$, cioè y_n è di Cauchy, ed essendo X completo abbiamo la convergenza della successione a qualche $\bar{x}$. Inoltre, se $m \ge n$, si ha $\langle y_m, e_n \rangle = a_n$, e per la continuità del prodotto scalare vale $\langle \bar{x}, e_n \rangle = a_n$. Inoltre, varrà $\|y_n\| = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, e per la continuità della norma si ottiene l'uguaglianza voluta per la norma quadra di $\bar{x}$.

Thm 2.3.3: Sia e_n un sistema ortonormale numerabile in X, x un elemento dello spazio, $x_n = \langle x, e_n \rangle$. Allora:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \le \|x\|^2$ (disuguaglianza di Bessel);

2. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ converge a qualche $\bar{x} \in \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}}$;

3. $\|\bar{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq \|x\|^2$;

4. $x - \bar{x} \perp e_n$ per ogni n, e dunque $x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}}$;

5. se (e_n) è massimale, cioè se è una base di Hilbert, allora $\bar{x} = x$, e quindi $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n$ e $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ (uguaglianza di Parseval).

Oss 2.3.4: Per fare un esempio in dimensione finita, quanto fatto corrisponde a considerare due vettori ortonormali in $\mathbb{R}^3$ e un qualsiasi altro elemento, e proiettare quest'ultimo sullo spazio generato dalla coppia.

Dim *Teorema 2.3.3*:

1. Per ogni fissato n il vettore x può essere scritto come $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n + y$, dove y è un qualche vettore ortogonale ad e_i per ogni $i \leq n$. Allora
$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
Poiché questo vale per ogni n naturale, deve valere anche per la somma della serie.

2. Conseguenza immediata del lemma 2.3.2.

3. Conseguenza immediata del lemma 2.3.2.

4. $\langle x - \bar{x}, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle \bar{x}, e_n \rangle = x_n - x_n$, dunque $x - \bar{x} \perp \mathrm{Span}\{e_n\}$. D'altra parte, se $y \in \overline{\mathrm{Span}\{e_n\}}$, esisterà una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathrm{Span}\{e_n\}$ convergente a y. Ma ciascun y_n è ortogonale a $x - \bar{x}$, e la successione $\langle x - \bar{x}, y_n \rangle$ è costantemente 0. Passando al limite e sfruttando la continuità del prodotto scalare si ottiene $\langle x - \bar{x}, y \rangle$. In alternativa, sempre per la continuità del prodotto scalare, l'insieme degli y tali che $\langle x - \bar{x}, y \rangle = 0$ è un insieme chiuso in X, e contenendo $\mathrm{Span}\{e_n\}$ ne contiene anche la chiusura.

5. Se $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è massimale, poiché $x - \bar{x}$ è ortogonale a ciascun e_n, deve valere $x - \bar{x} = 0$, cioè $x = \bar{x}$.

Ora ci possiamo chiedere: se $(e_i)_{i\in I}$ è un sistema ortonormale più che numerabile, è possibile parlare degli x_i^2? Cosa significa che la somma degli $x_i e_i$

converge? Vorremmo attribuire un significato alla somma infinita, anche più che numerabile.

Oss 2.3.5: Sia dato X uno spazio di Hilbert ed $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sua base di Hilbert numerabile: possiamo costruire una funzione $T : X \to \ell^2$ data da $x \mapsto (x_1, x_2, \cdots)$ sempre secondo la notazione usata nel teorema 2.3.3. Questa mappa sarà lineare, grazie alle proprietà del prodotto scalare, e l'identità di Parseval (punto 5 del teorema) implica che si tratta di un'isometria. Per la formula di polarizzazione, dalla norma è possibile ricavare il prodotto scalare, e dunque T conserva anche il prodotto scalare. Dal lemma 2.3.2, poi, segue che T è surgettiva: ogni spazio di Hilbert che ammetta un sistema ortonormale completo numerabile è dunque isomorfo a ℓ^2, tramite una mappa che conserva i prodotti scalari.

Sulla famiglia $\mathcal{S}$ di tutti i sistemi ortonormali è possibile introdurre un ordinamento: se $S_1 = (x_i)_{i\in I}$ ed $S_2 = (y_j)_{j\in J}$ sono due sistemi ortonormali, dirò che $S_1 \geq S_2$ se $J \subseteq I$, e per ogni $j \in J$ $y_j = x_j$. Se $K = \{(x_i)_{i\in I} : I \in \mathcal{I}\}$ è una catena in $\mathcal{S}$, cioè un sottoinsieme su cui la restrizione dell'ordinamento è totale, allora possiamo considerare l'insieme di indici $\bar{I}$ dato da $\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$. Per ogni $i \in \bar{I}$ sarà ben definito un x_i (si usa il fatto che K è una catena): considero allora $(x_i)_{i\in\bar{I}}$. Se $i, j \in \bar{I}$, allora esisterà un I tale che $i, j \in I$, e dunque x_i e x_j fanno parte di uno stesso sistema ortonormale: il loro prodotto scalare è dunuqe 0, e sono chiaramente unitari. Dunque quello che abbiamo costruito è un sistema ortonormale, maggiore di ogni elemento di K. Possiamo dunque applicare il lemma di Zorn: poiché in $\mathcal{F}$ ogni catena ammentte maggioranti, tale maggiorante potrà essere scelto massimale in $\mathcal{F}$. Se ne conclude che in uno spazio di Hilbert non banale ogni sistema ortonormale può essere completato ad uno massimale, e dunque lo spazio ammette una base di Hilbert.

Oss 2.3.6: Se $\mathcal{F}$ è un sistema ortonormale, allora è una base di Hilbert se e solo se $\operatorname{Span}\mathcal{F}$ è denso in X.

Dim: L'enunciato è sempre vero, ma assumeremo come ulteriore ipotesi che $\mathcal{F}$ sia anche numerabile.

- $\Rightarrow$ Dal teorema 2.3.3 segue che ogni vettore $x \in X$ è limite di una successione a valori in $\operatorname{Span}\mathcal{F}$.
- $\Leftarrow$ Se $\mathcal{F}$ non è massimale, esiste un vettore x unitario e ortogonale a ogni elemento di $\overline{\operatorname{Span}\mathcal{F}}$. Dunque $\overline{\operatorname{Span}\mathcal{F}} \neq X$, e $\operatorname{Span}\mathcal{F}$ non è denso.

Oss 2.3.7: Se $\mathcal{F}$ è una base di Hilbert di X, allora è al più numerabile numerabile se e solo se X è separabile.

Dim:

- $\Rightarrow$ $X = \overline{\operatorname{Span}\mathcal{F}} = \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{Q}}\mathcal{F}}$, e questo esibisce un denso numerabile.

$\Leftarrow$ Sia $\mathcal{D}$ un denso numerabile in X. Per ogni $e \in \mathcal{F}$ esiste un $x_e \in \mathcal{D}$ che disti meno di $1/2$ da e. Dato che due elementi qualsiasi (distinti) di una base di Hilbert distano $\sqrt{2}$, la mappa $e \mapsto x_e$ è iniettiva: dunque la cardinalità di $\mathcal{F}$ non è maggiore di quella di $\mathcal{D}$.

Un modo per ricavare una base di Hilbert numerabile consiste nello scegliere un denso numerabile indicizzato in X, e applicare l'algoritmo di Gram Schmidt. Questo procedimento non aumenta la cardinalità dell'insieme (anche se la può diminuire), e fornisce dunque una base di Hilbert al più numerabile.

Usando la teoria spettrale, poi, è possibile ricavare basi di Hilbert come famiglie di autovettori di un operatore autoaggiunto.

12 ottobre 2011
Giovanni Alberti

Oss 2.3.8: Le nozioni di base (secondo la definizione vista nei corsi di algebra lineare) e di base di Hilbert sono distinte. In dimensione infinita, in particolare, una base di Hilbert non è mai una base. Supponiamo infatti che la base di Hilbert infinita $\mathcal{F}$ sia anche una base, e data in tale famiglia una successione $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi a due a due distinti consideriamo il vettore $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$. Supponiamo poi che x possa essere scritto come combinazione lineare (finita!) di elementi di $\mathcal{F}$, cioè $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i$. Allora per ognuno degli f_i che compaiono nella somma vale $\alpha_i = \langle x, f_i \rangle$, e per tutti gli altri elementi f di $\mathcal{F}$ vale $\langle x, f \rangle = 0$. Poiché si è supposto che $\mathcal{F}$ sia una base di X, tale scrittura di x come combinazione lineare è unitca. Ma sappiamo già che per gli e_n vale $\langle x, e_n \rangle = \frac{1}{n}$, e questo ci porta ad un assurdo.

Da qui in poi, a meno di indicazioni contrario, "base" significherà "base di Hilbert", mentre si userà "base algebrica" per indicare una base propriamente detta.

Es 2.3.2 *Basi ortonormali*:

- Una base di Hilbert di ℓ^2 è data da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove e_n è la successione costante 0, salvo per l'elemento n-esimo, che vale 1. Che sia un sistema ortonormale è evidente, rimane da mostrare la massimalità, o equivalentemente la densità dello Span. Se però un elemento $X \in \ell^2$ fosse ortogonale ad e_n per ogni n, per quanto già mostrato X sarebbe 0.

- Lo spazio $L^2([0,1])$ possiede la base di Haar (trattata nel dettaglio nell'esercitazione del 13 ottobre). Si consideri la funzione f che vale 1 fra 0 e $1/2$, -1 fra $1/2$ e 1 e 0 altrove. Per ogni naturale $n \geq 1$ si suddivida l'intervallo $[0,1]$ in 2^n parti di uguale lunghezza, e scelta una di esse si riscali la f in modo che il suo supporto sia esattamente la zona scelta. Al variare di tutte le possibili costruzioni fatte in questo modo si ottiene una famiglia di funzioni a due a due ortogonali in L^2: Se due funzioni hanno supporto disgiunto chiaramente saranno ortogonali; d'altra parte se i supporti di due funzioni in questa famiglia si intersecano, allora sono l'uno incluso nell'altro. Se g e h sono queste funzioni (distinte), e se il supporto di g è incluso in quello di h, allora h è costante sul supporto di g, e dunque $g \cdot h = \pm g$. Ma tutte queste funzioni hanno media integrale nulla, e questo conclude. Aggiungendo alla famiglia la costante 1, e normalizzando le funzioni in modo che la loro norma L^2 sia uguale a 1, si ottiene un sistema ortonormale. Per la massimalità si può mostrare che lo Span di questo sistema è denso in L^2. In effetti, combinazioni lineari di queste danno le indicatrici degli intervalli dialici (quelli della forma $[k/2^n, (k+1)/2^n]$), e da queste si costruiscono le indicatrici degli intervalli, e dunque degli aperti e dei misurabili. Ma tali funzioni sono dense nello spazio che ci interessa. Il vantaggio della base di Haar è che consente di approssimare funzioni a quadrato sommabile con un numero ristretto di termini, e questo trova applicazioni in diversi campi.

Thm 2.3.9 *Completamento ortogonale*: Sia Y un sottospazio chiuso di X. Allora, per ogni $x \in X$, esistono $y \in Y$ e $\tilde{y} \perp Y$ tali che $x = y + \tilde{y}$, e tale decomposizione è unica. Inoltre, per qualsiasi $z \in Y \setminus \{y\}$ vale $\|x-y\| < \|x-z\|$.

Dim: Assumeremo nuovamente che X sia separabile, ricordando che negli spazi metrici ogni sottospazio di un separabile è a sua volta separabile (questo non vale in generale per spazi topologici se non sotto opportune ipotesi di numerabilità). Dall'ipotesi che Y sia chiuso segue la sua completezza come spazio vettoriale con un prodotto scalare deinito positivo (la restrizione di quello in X), e questo rende Y a sua volta uno spazio di Hilbert. Essendo separabile, esso ammette una base di Hilbert numerabile. La dimostrazione del teorema 2.3.3 ci fornisce la decomposizione cercata. L'unicità può essere dedotta dalla disuguaglianza enunciata, ma segue anche da ossevazioni di carattere algebrico: se $x = y_1 + \tilde{y}_1 = y_2 + \tilde{y}_2$ sono due decomposizioni con le proprietà sopra enunciate allora $y_1 - y_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$: ma i due vettori che vengono qui eguagliati sono tra loro ortogonali, e sono dunque uguali a zero. Infine, se $z \in Y$ è diverso da y, varrà $\|x-z\|^2 = \|x-y+y-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 > \|x-y\|^2$.

Dato $x_0 \in X$, si consideri il funzionale $\Lambda_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ dato da $x \mapsto \langle x_0, x \rangle$. Per le proprietà del prodotto scalare un tale funzionale è continuo.

Thm 2.3.10 *Riesz*: Sia $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $\Lambda = \Lambda_{x_0}$.

Dim: Se $\Lambda \equiv 0$ basterà scegliere $x_0 = 0$. Altrimenti, $Y = \ker \Lambda$ è un chiuso proprio in X, essendo controimmagine del chiuso $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Dunque esiste un elemento $x_0 \in Y^\perp$ non nullo, in virtù del teorema 2.3.9: $X = Y \oplus Y^\perp$, con Y sottospazio proprio, e dunque $Y^\perp$ è un sottospazio non banale di X. A meno di normalizzazioni posso assumere $\Lambda(x_0) = 1$. Allora $\ker \Lambda = Y \subseteq (Y^\perp)^\perp \subseteq x_0^\perp = \ker \Lambda_{x_0}$. Per un risultato di algebra lineare, dunque, Λ_{x_0} è un multiplo di Λ, essendo questi due funzionali lineare a valori reali, cioè $\Lambda_{x_0} = c\Lambda$ per qualche

$c \neq 0$. Dunque $\Lambda = \frac{1}{c}\Lambda_{x_0} = \Lambda_{\frac{x_0}{c}}$.

A questo punto è legittimo chiedersi se possano esistere sottospazi non chiusi di X. In dimensione finita sappiamo che tutte le funzioni lineari sono continue, e ogni sottospazio è nucleo di una funzione lineare: in questo caso ogni sottospazio è dunque chiuso. In dimensione infinita, invece, questo non vale: le funzioni continue, ad esempio, costituiscono un sottospazio denso e proprio di $^2(I)$.

Analogamente, ha senso chiedersi se esistano funzionali lineari non continui. Anche in questo caso la risposta è affermativa, anche se sarà necessario considerare spazi di dimensione infinita. Sia X un tale spazio, Y un sottospazio proprio, $\mathcal{B}$ una base algebrica di Y estesa a una $\mathcal{B}'$ di X. Si scelga un elemento $x_0 \notin Y$ di $\mathcal{B}'$, e il funzionale che associa ad ogni vettore la sua coordinata associata a x_0 rispetto alla base algebrica. Tale funzionale è lineare, come è noto dai corsi di algebra lineare. D'altra parte, Y è incluso nel nucleo di questo funzionale, che non è identicamente nullo. Se si sceglie Y denso, l'ipotesi che tale funzionale sia anche continuo condurrebbe immediatamente ad un assurdo: il nucleo sarebbe un sottospazio chiuso contenente un denso, e sarebbe l'intero spazio.

Se X è uno spazio vettoriale con prodotto scalare definito positivo, non necessariamente completo (talvolta si indicano questi spazi come "preHilbert"), ed $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale massimale, è vero che ogni elemento x può essere scritto come somma di $x_n e_n$, con gli x_n costruiti come sopra? In generale no: l'ipotesi di completezza dello spazio è necessaria. Per dimostrare questo risultato negli Hilbert avevamo sfruttato la completezza per dimostrare che la somma convergeva a un certo $\bar{x}$ per sistemi ortonormali generici, e che per sistemi massimali questo $\bar{x}$ era proprio x, ma questo non è vero in generale.

Gestione delle basi nel caso non separabile

Sia I un insieme qualsiasi, $(a_i)_{i\in I}$ a valori reali positivi. Possiamo dare un significato alla "somma" degli a_i? Potremmo definirla come l'estremo superiore delle somme finite:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J\in\mathcal{P}_f(I)} \sum_{j\in J} a_j$$

dove l'insieme $\mathcal{P}_f(I)$ denota le parti finite di I. Questa somma, peraltro, non è altro che l'integrale di a_i come funzione su I rispetto alla misura che conta i punti. Questa somma esiste sempre, ma vorremmo dare un senso anche a somme infinite generiche, anche di vettori. Diremo che $\sum_{i\in I} x_i$ converge a x se per ogni ε positivo esiste un $\bar{J} \subseteq I$ finito tale che, per ogni $J \supseteq \bar{J}$ sottoinsieme finito di I vale $\|x - \sum_{j\in J} a_j\| \leq \varepsilon$.

Lemma 2.3.11 : Sia $(e_i)_{i\in I}$ un sistema ortonormale, $(a_i)_{i\in I}$ a quadrato sommabile. Allora la somma degli $a_i e_i$ converge a qualche elemento di X.

Il lemma generalizza quanto visto nella lezione precedente con l'ipotesi ulteriore di numerabilità del sistema ortonormale.

Va osservato che, se $\sum_{i\in I} a_i$ converge, allora i termini non nulli di $(a_i)_{i\in I}$ sono al più numerabili. Nella definizione che abbiamo dato, inoltre, permutare gli indici non ha alcuna influenza sulla somma, cosa che per le serie a priori non vale. La somma di una serie numerica dipende in generale dall'ordine dei termini (teorema di Riemann-Dini).

Ex 2.3.1 ℓ^2 *è uno spazio di Hilbert*: Sia data $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione qualsiasi, e definiamo $\|x\| = \left(\sum x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Se $\|x\|, \|\tilde{x}\| < \infty$, allora per la disuguaglianza di Schwartz vale $\sum |x_n\tilde{x}_n| \leq \|x\| \cdot \|\tilde{x}\| < \infty$, e pertanto il prodotto scalare è ben definito per successioni a quadrato sommabile. Per la precisione, vale per ogni n:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{x}_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \cdot \|\tilde{x}\|$$

e dall'arbitrarietà di n si ottiene la diseguaglianza cercata.

Chiaramente ogni multiplo scalare di una successione a quadrato sommabile ha a sua volta quadrato sommabile; inoltre, se $x, \tilde{x} \in \ell^2$ allora, sfruttando $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, si ottiene $\|x+\tilde{x}\|^2 \leq 2\left(\|x\|^2 + \|\tilde{x}\|^2\right) < \infty$. Dunque ℓ^2 è uno spazio vettoriale.

Sia ora $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in ℓ^2. Dunque, per ogni fissato n, si ha $|x_n^{m_1} - x_n^{m_2}| \leq \|x^{m_1} - x^{m_2}\|^2$, da cui la proprietà di Cauchy componente per componente. In altre parole, la successione numerica $(x_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy per ogni n. Dunque per ogni n è ben definito x^∞ come successione dei limiti di x_n^m rispetto ad m. Ora vorremmo mostrare che $x^m \to x^\infty$ per $m \to \infty$.

La tesi è che, per ogni $\varepsilon > 0$, $\|x^m - x^\infty\| < \varepsilon$ per m abbastanza grande. Si avrà:

$$\sum_{n=1}^{N}(x_n^m - x_n^\infty)^2 = \lim_{m'\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(x_n^m - x_n^{m'})^2$$

Dato che si tratta di un procedimento di limite, possiamo considerare solo il caso in cui $m' \geq m$. La sommatoria che compare nel limite, poi, non è maggiore di $\|x^m - x^{m'}\|^2$, minore di ε^2 per n abbastanza grande. Per l'arbitrarietà di N si conclude che questo vale anche passano alla somma della serie, da cui $\|x^m - x^\infty\| \leq \varepsilon$ definitivamente in m.

18 ottobre 2011
Giovanni Alberti

Spesso si parla di spazi di Hilbert anche su $\mathbb{C}$. Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, si chiama prodotto hermitiano definito positivo (secondo alcune notazioni su usa chiamare scalare anche questo prodotto, e spesso si dà per scontata la positività) una funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ tale che:

- $x \mapsto \langle x, \tilde{x}\rangle$ è lineare per ogni fissato $\tilde{x} \in X$;
- $\langle x, \tilde{x}\rangle = \overline{\langle \tilde{x}, x\rangle}$ per ogni $x, \tilde{x} \in X$;
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ per ogni x, e vale l'uguaglianza se e solo se $x = 0$.

Def 2.3.3: Uno spazio vettoriale complesso X con prodotto scalare definito positivo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è detto di Hilbert se la metrica indotta dalla norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ è completa.

Ricordiamo che $2\,\mathrm{Re}\,\langle x, \tilde{x}\rangle = \|x+\tilde{x}\|^2 - \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2$, e analogamente $2\,\mathrm{Im}\,\langle x, \tilde{x}\rangle = \|x + i\tilde{x}\|^2 - \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2$.

Vale un risultato analogo al teorema 2.3.3:

Thm 2.3.12: Sia X uno spazio di Hilbert complesso, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base di Hilbert (definita in modo analogo al caso reale) numerabile. Per ogni $x \in X$ sia $x_n = \langle x, e_n\rangle$ (prestando attenzione che il prodotto *non* è commutativo!). Allora:

- $\|x\|^2 \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ per $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormale generico (disuguaglianza di Bessel). Nel caso di basi di Hilbert vale l'uguaglianza;
- $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$;
- $\langle x^1, x^2\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^1 x_n^2$ (identità di Parseval).

Es 2.3.3: Esempi di spazi di Hilbert complessi sono:

- $L^2_{\mathbb{C}}(E)$ con il prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_E f \cdot \overline{g}$;
- $\ell^2_{\mathbb{C}}$: lo spazio delle successioni complesse a quadrato sommabile (cioè tali che la serie dei moduli quadri converge in $\mathbb{R}$.

Capitolo 3

Serie di Fuorier

3.1 La serie di Fourier di una funzione

Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, periodica di periodo 2π (diremo anche 2π-periodica). Vorremmo scrivere f come $\sum c_n e^{inx}$, chiedendoci se questo sia possibile, e in caso affermativo come possano essere ottenuti i coefficienti e in che senso valga l'uguaglianza, cioè quale significato assuma l'eventuale convergenza della serie. Questo problema fu aperto da Fourier per ragioni "pratiche": in particolare il suo scopo era studiare le equazioni del calore e delle onde. In definitiva, è proprio in vista di questo problema che sono state sviluppate la misura di Lebesgue e la teoria degli spazi di Hilbert.

3.2 La base di Fourier

Il risultato fondamentale di questa teoria sta nel fatto che $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, dove $e_n = e^{inx}$, costituisce una base di Hilbert di $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ (che di seguito indicheremo con L^2 omettendo di specificare il pedice $\mathbb{C}$) con il prodotto hermitiano dato da $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{g}$. Da questo seguirà, detto $c_n = \langle f, e_n\rangle$ l'n-esimo coefficiente di Fourier di f, la convergenza in norma L^2 di $\sum c_n e^{inx}$, e convergerà ad f (nel senso di L^2!).

Thm 3.2.1: Data $f \in L^2([-\pi,\pi])$, sia

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\langle f, e_n\rangle$$

Allora:

- $2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2$ (Bessel);
- $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ nel senso della convergenza in L^2, ricordando che il valore della somma non dipende dall'ordine;

- $\langle f, g\rangle = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}$ (Parseval).

Il risultato seguirà dal teorema 2.3.12 e dal fatto che $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sono una base. Dimostriamo l'ortonormalità delle e_n:

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\overline{e^{imx}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1 & \text{se } n = m \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Per la massimalità ricorreremo ad un teorema, dal quale potremo ricavare la densità di $\mathrm{Span}(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Prima di enunciare il teorema introduciamo alcune notazioni.

Sia k uno spazio metrico compatto (o spazio topologico compatto e T_2, $C(k)$ (rispettivamente $C_{\mathbb{C}}(k)$ lo spazio delle funzioni continue reali (complesse), dotato della norma della convergenza uniforme. Su questo spazio sono definite somma, prodotto per scalare e un prodotto tra funzioni, che lo rendono un'algebra. Dato $\mathcal{F} \subseteq C(k)$ ($C_{\mathbb{C}}(k)$), si dice che è una sottoalgebra se è chiuso per somma, prodotto per scalare e tra funzioni; diremo invece che separa i punti se per ogni $x_1 \neq x_2 \in k$ esiste $f \in \mathcal{F}$ tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Thm 3.2.2 *Stone-Weierstrass (complesso)*: Sia $\mathcal{F} \subseteq C_{\mathbb{C}}(k)$ con le seguenti proprietà:

- è una sottoalgebra;
- separa i punti;
- contiene le costanti;
- è chiuso per coniugio, cioè contiene $\overline{f}$ per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Allora $\mathcal{F}$ è denso in $C_{\mathbb{C}}(k)$.

La dimostrazione di questo teorema non è stata affrontata a lezione, ma è stata data durante un incontro facoltativo.

Lo spazio di funzioni che ci interessa per questa teoria è $C(k)$, dove k è $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, omeomorfo alla circonferenza S^1, che possiamo identificare anche con $[-\pi, \pi]/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica gli estremi. Questo spazio di funzioni può essere identificato con quello delle continue 2π-periodiche su $\mathbb{R}$. Se infatti p è la proiezione al quoziente (indipendentemente da quale delle due definizioni di k usiamo), vediamo che ogni funzione f continua e 2π-periodica su $\mathbb{R}$ è costante sulle fibre, e passa dunque al quoziente, cioè induce una funzione continua $\hat{f}$ su k.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C} \arrow[dl, "\hat{f}"'] \\
\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

D'altronde, una funzione su $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ induce in modo naturale una funzione su $\mathbb{R}$, mentre data f definita su $[-\pi,\pi]/\sim$ è possibile definirne una su R replicando periodicamente f sull'asse reale: per ogni $x \in [-\pi,\pi]$ costruisco $\tilde{f}$ imponendo $\tilde{f}(x+2k\pi) = f(x)$, dove l'apparente ambiguità nella scelta di $\tilde{f}\left((2k+1)\pi\right)$ è risolta dall'identificazione degli estremi dell'intervallo. Poiché abbiamo un'identificazione tra lo spazio delle funzioni complesse continue su S^1 e quelle continue su $\mathbb{R}$ 2π-periodiche, confonderemo i due spazi e li indicheremo indistintamente con $C_{\text{per}}\left([-\pi,\pi]\right)$, o semplicemente C_{per}.

Ora, essendo S^1 uno spazio metrico compatto, possiamo applicare il teorema di Stone-Weierstrass a C_{per}. Sia $\mathcal{F} = \text{Span}\left\{ e^{inx} : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq C_{\text{per}}$, lo spazio dei cosiddetti "polinomi trigonometrici", cioè combinazioni lineari di $(e^{ix})^n$, dove n varia su $\mathbb{Z}$. Vogliamo verificare le ipotesi di Stone-Weierstrass:

- $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale, e poiché $e_n e_m = e_{n+m}$ la proprietà distributiva garantisce la chiusura per prodotto;
- $\mathcal{F}$ separa i punti: e^{ix} è iniettiva su S^1;
- $\mathcal{F}$ contiene $e^{i0x} \equiv 1$, e di conseguenza tutte le costanti;
- $\mathcal{F}$ è chiuso per coniugio, dato che $\overline{e^{inx}} = e^{-inx}$, e che il coniugio commuta con la somma e col prodotto.

Questo garantisce la densità di $\mathcal{F}$ in C_{per} rispetto alla norma del sup. Ma la convergenza uniforme implica quella in L^2, e dunque la densità è anche nel senso di L^2; inoltre, C_{per} è denso in $L^2([-\pi,\pi])$, e si può finalmente concludere che $\mathcal{F}$ è denso in L^2. Segue che la famiglia indicata sopra è in effetti un sistema ortonormale massimale.

3.3 Convergenza della Serie di Fourier per funzioni C^1

Lemma 3.3.1: Sia $f \in C_{\text{per}} \cap C^1$. Allora $f' \in C\left([-\pi,\pi]\right) \subseteq L^2\left(-\pi,\pi\right)$, e $c_n(f') = inc_n(f)$, per ogni n.

Dim:

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -inf(x)e^{-inx}\,dx = \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = inc_n(f) \end{aligned}$$

Si è usato $f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, valido grazie alla periodicità della funzione.

Senza l'ipotesi di periodicità della funzione si ha il semplice controesempio $f(x) = x$.

Da Bessel segue immediatamente che, per f che soddisfa le ipotesi del lemma, $\sum_{-\infty}^{+\infty} |nc_n(f)|^2 < +\infty$.

Lemma 3.3.2: Se $\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^{2\alpha} |c_n|^2 < \infty$ per qualche $\alpha > 1/2$, allora la somma della serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|$ è finita.

Dim: Per ogni N, vale

$$\sum_{-N}^{N} |c_n| = \sum_{-N}^{N} \frac{1}{|n|^2} |c_n||n|^\alpha \leq \left(\sum_{-N}^{N} \frac{1}{|n|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{-N}^{N} |n|^{2\alpha} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|n|^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{-\infty}^{-\infty} |n|^{2\alpha} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove la prima diseguaglianza è quella di Schwartz. Per l'arbitrarietà di N si conclude che il risultato vale anche per $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|$, che di conseguenza è finita, ricordando la convergenza dellsa serie $\sum |n|^{-2\alpha}$.

Corollario 3.3.3: Se $f \in C_{\text{per}} \cap C^1$, allora la somma dei moduli dei coefficienti di Fourier è finita.

Dim: Ricordando che la successione (bilatera) dei coefficienti di Fourier di una funzione ha quadrato sommabile, e che $c_n(f') = inc_n(f)$, basterà applicare il Lemma con $\alpha = 1$ ai coefficienti di f'.

Da questo segue immediatamente che, per funzioni C^1, la serie converge totalmente, e quindi uniformemente, a qualche funzione g. Tale funzione sarà continua, essendo limite uniforme di una serie di funzioni continue, e sarà uguale ad f quasi ovunque, essendo questa somma della stessa serie in L^2. Ma due funzioni continue e coincidenti quasi ovunque sono uguali. Perciò, sotto queste ipotesi, la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f.

3.4 Relazioni tra la regolarità di una funzione e comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier

Thm 3.4.1: Sia $f \in C^k_{\text{per}}$ (cioè di classe C^k, 2π-periodica e con le prime k derivate 2π-periodiche), allora

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^{2k} |c_n|^2 < \infty$$

Da questo segue:

$$c_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \quad \text{per } n \to \pm\infty \tag{3.1}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^{k-\frac{1}{2}-\delta} |c_n| < \infty \quad \forall \delta > 0 \tag{3.2}$$

Dunque, un'elevata regolarità della funzione implica un rapido decadimento dei coefficienti di Fourier per $n \to \infty$.

Viceversa, se vale una delle due condizioni:

$$c_n = o\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right) \quad \text{con } \alpha > k+1 \tag{3.3}$$

oppure

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^{2\alpha} |c_n|^2 < \infty \quad \text{con } \alpha > k + \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

allora vale

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n|^k |c_n| < \infty \tag{3.5}$$

e di conseguenza $f \in C^k_{\text{per}}$.

Dim: Se $f \in C^k_{\text{per}}$, si può facilmente mostrare per induzione che $c_n(f^{(h)}) = (in)^h c_n(f)$ per ogni intero compreso tra 1 e k. Da questo, per la sommabilità dei moduli quadri dei coefficienti di $f^{(k)}$, segue la prima parte della tesi. (3.1) è quindi immediata, mentre (3.2) può essere dimostrata in modo del tutto analogo al lemma 3.3.2.

Se vale (3.5), allora segue da risultati sulla convergenza in norma C^k che $f \in C^k$, e la periodicità segue ovviamente da quella dei termini della serie. Da (3.3) segue che $|n|^k |c_n| = o\left(n^{k-\alpha}\right) = o\left(n^{-\delta}\right)$ per qualche $\delta > 1$, e dunque la serie converge per confronto asintotico. (3.4), di nuovo, implica (3.5) analogamente alla dimostrazione del lemma 3.3.2.

Oss 3.4.2: Il teorema mette in evidenza che la regolarità di una funzione è strettamente legata al comportamento asintotico dei suoi coefficienti di Fourier, e in ultima analisi alla velocità di convergenza della serie. Di conseguenza, più è regolare una funzione, minore sarà il numero di coefficienti necessari per approssimarla entro una precisione stabilita. Viceversa, se una funzione non è continua non sarà facile approssimarla bene con pochi termini della serie di Fourier.

19 ottobre 2011
Giovanni Alberti

Va osservato che la convergenza uniforme della serie di Fourier di una funzione non è in generale garantita dalla sua sola continuità: esistono anzi funzioni continue le cui serie di Fourier hanno somma illimitata. Sotto quali ipotesi, dunque, si ha la convergenza uniforme? Se $f \in C^1$ abbiamo verificato il risultato, ma in realtà basta meno: ad esempio f continua e periodica, e C^1 a tratti, e la dimostrazione è analoga. Ancora meno restrittiva è la condizione, sufficiente, che f sia C_{per} e α-Hölderiana per qualche $\alpha > 1/2$. Ecco una traccia della dimostrazione:

Passo 1 Basterà mostrare che $\sum |n|^{2\alpha} |c_n|^2 < \infty$ per qualche $\alpha > 1/2$.

Passo 2 Se $f \in C_{\text{per}} \cap C^{0,\alpha}$ allora

$$\int_0^1 \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx \right] \frac{dh}{h^{1+2a}} < +\infty$$

per ogni $a < \alpha$.

Passo 3 L'integrale sopra riportato, essendo una norma L^2, si scrive bene in termini dei coefficienti di Fourier. Se c_n sono i coefficienti di f, quelli di $f(x+h)$ (come funzione di x per h fissato) sono $c_n e^{inh}$, e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 \, dx = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n (e^{inh-1})|^2$$

Passo 4 Dai due precedenti segue che

$$\begin{aligned} \infty > & \int_0^1 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n (e^{inh-1})|^2 \frac{dh}{h^{1+2a}} = \\ = & 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int_0^1 |(e^{inh-1})|^2 \frac{dh}{h^{1+2a}} \geq 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^{2a} |c_n|^2 \end{aligned}$$

Se le stesse ipotesi sono valide a tratti, vale il teorema di Dirichlet, secondo il quale la serie di Fourier converge puntualmente alla funzione in ogni punto in cui questa sia continua, e alla media aritmetica tra i limiti destro e sinistro dove non lo è.

Un teorema molto difficile, e relativamente recente, mostra che se $f \in L^2$ la sua serie di Fourier converge alla funzione stessa quasi ovunque. Questo non segue dalla convergenza L^2, la quale implica soltanto la convergenza quasi ovunque a f di una sottosuccessione delle somme parziali.

Può essere utile tenere a mente che può essere costruita anche una serie di Fourier reale, i cui termini sono seni e coseni di nx per n non negativo. Questo risultato può essere ottenuto a partire dalla serie di Fourier complessa, ma è anche possibile mostrare che una costante (normalizzata) e le funzioni indicate formano una base dello spazio di Hilbert reale $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Anche qui i coefficienti della serie saranno ottenuti per mezzo del prodotto scalare, ma i conti saranno meno agevoli.