Un po' di pignolerie

ℵ Aleph ℵ

October 17, 2010

Contents

1 Introduzione

Dicono di noi matematici che siamo dei filosofi pignoli. E infatti è vero, e siccome a noi piace mettere i puntini sulle x, adesso ve la ciucciate voi.

Per chi non se lo ricordasse, si stava parlando di esponenziali e logaritmi. Come ogni cosa in matematica, anche questi meritano un pochina di attenzione da un punto di vista del rigore matematico, richiedendo qualche piccolo accorgimento e una dimostrazione ogni tanto, qua e là. Ho pensato di scrivere queste dispense un po' perchè vi facciate un'idea sommaria di come funziona la matematica, un po' per farvi vedere che non tutto è scontato (anzi, spesso quasi niente lo è), e nel contempo di mostrarvi come si fa il giro intorno a questo tipo di problema. Il punto è questo: la matematica non è fatta di formule e tabelline che vi dicono come si risolve un'equazione senza metterci il minimo sforzo (come invece vi insegnano al liceo), quella è roba da ingegneri. La matematica è fatta di intuizioni che diventano prima idee e poi teoremi, passando per astuti stratagemmi che permettono di arrivare al punto desiderato (o di convincerci che l'intuizione è falsa, e casomai di quanto e si è sbagliato) in modo da essere definitivamente sicuri una volta per tutte della e verità di quanto si era supposto. La furbizia è richiesta, e quello che voglio qui è farvi vedere che tipo di trucchi si usano comunemente, almeno in uno dei mille ambiti della matematica. Questo ovviamente è un fine secondario rispetto al vero e obiettivo: convincervi che quello che vi ho raccontato sugli esponenziali è vero, usando stavolta gli strumenti di un matematico: non sia mai che andiate in giro dicendo che l'esponenziale razionale è estendibile per continuità perché ve l'ha detto Aleph! E siccome mi puzzava raccontarvi che il logaritmo è una funzione strettamente crescente senza dirvi perchè, eccoci qua.

Un altro motivo per cui sono convinto che sia utile e costruttivo fare questo lavoro, è che spesso mi accorgo, quando mi si chiede di dimostrare qualcosa sugli esponenziali, mi trovo in difficoltà. Non che non sia capace di farlo, ma spesso si confondono teoremi e definizioni, soprattutto quando si parla di cose tanto usate come gli esponenziali. Per un matematico la funzione e^x è il cucciolo che cresce insieme a lui, e quando a posteriori cerca di fare dimostrazioni necessarie sulle proprietà basilari si incarta. La domanda gli si pone inesorabilmente davanti: cosa posso usare!? Per questo è necessario avere ben chiara una definizione che sia una, chiara e coerente. La coerenza va dimostrata, ovviamente, così come l'equivalenza con eventuali altre definizioni. Questo un po' per una questione di rigore, un po' perchè se Gino chiede a Ugo di dimostrare una cosa e quello gli risponde che è vera per definizione, può darsi che si incartino, se hanno definizioni diverse ma equivalenti. È quindi evidente la necessità di comprendere entrambi l'equivalenza, in modo che possano poi mettersi d'accordo su quale scegliere convenzionalmente come definizione sapendo che in realtà non cambia nulla. Perchè dimostrare non serve solo a verificare, ma anche (e soprattutto) a capire PERCHÈ.

Durante la stesura di queste dispense mi sono sorte molte idee costruttive per estendere, ampliare, divagare... Ho cercato di compattare per benino il tema centrale degli esponenziali, rimandando poi alle appendici tutte le questioni non strettamente necessarie che si aprono per via.

Ah, ovviamente, nel frattempo approfitto per imparare il LaTeX, che fa sempre comodo per la tesi. XD

2 Gli esponenziali discreti

Il signor Kronecker, uno dei più insigni capoccioni del secolo XIX, diceva che Dio ha creato i numeri naturali, e che tutto il resto è opera dell'uomo. Per quanto dubbia possa apparire una simile affermazione, essendo sprovvista di una valida e opportuna dimostrazione, è pur vero che la maestra, quando alle elementari vi ha raccontato che cos'è una potenza, vi ha detto che fare a^n significa "moltiplicare a per se stesso n volte". Ebbene, come si potrà vedere meglio dalle appendici che confido di scrivere, dire una cosa del genere ha senso solo se n è un numero naturale: è il solito problema di entrare e uscire dalla porta π volte. È un po' difficile. In effetti, la nozione di potenza con esponente negativo o razionale non è così immediata, se non viene adeguatamente introdotta. Tuttavia, siccome vogliamo fare le cose in modo pignolo, non ci accontentiamo nemmeno dell'espressione, invero assai rozza, "moltiplicare a per se stesso n volte". Cominciamo allora a formalizzare un po' meglio questa cosa.

2.1 Le successioni esponenziali

Se alle elementari la maestra ci ha parlato di potenze con esponenti naturali invece di partire in quarta con quelli frazionari o reali, un motivo ci sarà. E infatti, un motivo c'è. E non è nemmeno così difficile da immaginare quale sia: per definire qualcosa di complesso è sempre utile appoggiarsi a qualcosa di più facile che sia già stato definito. In effetti, chi c'è di apparentemente più scemo ed elementare dei naturali?

Ragioniamo un attimino: qual è la caratteristica peculiare che distingue i naturali da tutti gli altri numeri? Come si vedrà dall'appendice (appena ci sarà), già il signor Peano (e probabilmente non è neanche stato il primo) si era accorto che questa caratteristica è l'induzione. Quando si deve definire qualcosa sui naturali è sempre [relativamente] facile: prima la si stabilisce sullo 0, poi si racconta come ricavare, da un n qualunque, il caso di $n + 1$. Abbiamo già visto l'esempio del fattoriale, e, che ci crediate o no, persino somma e prodotto sono definite in questo modo.

Benissimo allora, vediamo come comportarci con l'esponenziale, facendo finta di non aver mai visto una potenza, o di doverlo raccontare a qualcuno per fargli capire quello che stiamo facendo. Questo va contro lo spirito di molti matematici che vogliono studiare le cose senza capirle: ci pensano gli ingegneri a capire, i matematici definiscono e dimostrano. Beh, noi ci teniamo comunque a capire, per due motivi fondamentali: perché noi non siamo matematici (non tutti per lo meno, e io comunque lo sono a seconda del contesto :p), e in secondo luogo perché non tutti i matematici vogliono rimanere cretini per tutta la vita, e qualcuno capisce anche quello che fa. Alla luce di queste cosiderazioni, mi sembra evidente che cominciare dal caso a^0 è alquanto masochista e imbarazzante. Provate un po' a spiegare a vostra nonna perchè $a^0 = 1\ \forall a$, che peraltro è FALSO. D'altronde esistono anche matematici che si rifiutano di accettare lo zero come naturale, proprio perché in contesti analoghi a questo può essere alquanto imbarazzante. Per ora faremo finta di essere di questi matematici, e cominceremo a dire che $a^1 = a\ \forall a$, che è già una bella cosa. Ora, domanda da premio Abel: se so che $a^n = x$, quanto dovrà essere a^{n+1}? Beh, insomma... non voglio insultare la vostra intelligenza. Ecco allora che abbiamo costruito la definizione induttiva dell'esponenziale, ovviamente di base fissata $a \in \mathbb{R}$, come funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Scriviamola un po' ammodino:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a \cdot a^n \end{cases}$$

Godete e siate felici. Non sarà molto, però... Ora, combinando questa definizione con quelle di somma e prodotto, si può risalire alle ben note "proprietà delle potenze":

$$\begin{cases} a^n \cdot a^m = a^{n+m} & \forall a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \\ (a^n)^m = a^{n \cdot m} & \forall a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Leggendo le proprietà sopra elencate uno potrebbe dire: "Eh, ma io me ne ricordo cinque proprietà, perchè lì ce ne sono solo tre?" Al che io risponderei con una bacchettata sulle dita, stile vecchia maestra. Perchè dite quello che volete ma le maestre delle elementari dominano su tutto, e perciò le citerò in continuazione. Vediamo un attimo quali sono le due proprietà incriminate, quelle che non ho nominato:

$$\begin{cases} \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & \forall a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N} \\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & \forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ebbene, una proprietà è cretina, l'altra è FALSA. In realtà non è proprio falsa, ma a me piace dirlo. Vedremo però che non è così distante dall'esserlo: diciamo che è falsa per ora.

La proprietà cretina (la più facile da studiare) è la seconda. Non è falsa, però è ridondante. Non l'avevamo forse già detto che il prodotto di due potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha come base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso di partenza? E non è forse vero che in $\mathbb{R}$ dividere è lo stesso che moltiplicare per l'inverso? Quindi, dai, l'avevamo già detto...

Per la proprietà FALSA (che non è falsa, ma a me garba dirlo) è meglio aprire un altro paragrafo.

Prima, però, qualche altra piccola osservazione. Visto che quello che ci interessa poi è passare alle funzioni, e studiare cosucce come monotonìa, convergenza, divergenza, limiti eccetera. Fissiamo ora un certo $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo la successione $s_n = a^n$, magari tralasciando il punto $n = 0$, che tanto non è granchè interessante. Come al solito l'unico punto di accumulazione del dominio della funzione è $+\infty$. Studiamo ora, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'eventuale monotonia della successione e il limiti:

$a > 1$ è il caso più comune, e quello che uno si aspetta quando si parla di esponenziale. La monotonia è evidente: ogni termine della successione è a volte il precedente, ed essendo $a > 1$ la successione è crescente. Questo ci dice che deve ammettere limite, finio o infinito che sia, e comunque maggiore di 1. Indovinate dove andrà a finire? Un'idea penso che ce l'abbiamo un po' tutti. Per vedere che quest'idea è verosimile, sfrutteremo la disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x > -1$$

Ora, ricodiamo il principio per cui, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono due sucessioni tali che per ogni n si abbia $a_n \geq b_n$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverga, allora diverge anche $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ora, essendo $a > 1$, esiste ed è unico (valà!?) $\alpha > 0$ tale che $a = 1 + \alpha$. Vediamo che la successione $1 + n\alpha$ diverge (se proprio volete una valida motivazione a questo fatto, andatevi a cercare la proprietà archimedea), così diverge anche $(1+\alpha)^n$, che ci dovrebbe ricordare qualcuno.

$a = 1$ successione costante, tende a 1. Giuro.

$0 < a < 1$ la successione è monotona, decrescente stavolta, per le stesse identiche ragioni sceme di prima. Ora chiamo $\alpha \equiv \frac{1}{a}$, e ottengo $a^n = \frac{1}{\alpha^n}$. $\alpha > 1$, dunque α^n diverge, e a^n deve convergere a 0.

$a = 0$ successione costante, tende a 0. Davvero.

$-1 < a < 0$ per n dispari $a^n < 0$, per n pari $a^n > 0$, quindi non ci può essere monotonia, dato che la successione oscilla sopra e sotto lo zero. Per quanto riguarda il limite, ci possiamo accontentare di osservare che $|a^n| = |a|^n$, e come successione tende a 0 per quanto detto sopra. Ora, se una successione, in valore assoluto, tende a zero, allora tende a zero pure lei. Se volete per i due carabinieri.

$a \leq -1$ uno schifo: niente monotonia, perchè la successione oscilla in continuazione sopra e sotto lo zero, nè convergenza, dato che viene sempre mantenuta una distanza di almeno 2 tra termini successivi. E come se non bastasse, non possiamo nemmeno dire che la successione diverge, perché si dice che una funzione va all'infinito solo dova ci va "sempre dalla stessa parte", mentre qui va ogni tanto sotto zero, ogni tanto sopra. Barea.

2.2 Aumenta la sfida: da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$

Si parlava prima di una proprietà provvisoriamente falsa. Riscriviamola:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

e avevamo detto $\forall a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$. Però, scusate tanto, se parliamo da una funzione di dominio $\mathbb{N}$, come facciamo ad applicare nell'argomento operazioni che non sempre sono definite su $\mathbb{N}$? "Vabbè - dice uno - se un pignolo e basta, basta passare a $\mathbb{Z}$ e siamo tutti contenti!" Eh, sì, bisogna passare a $\mathbb{Z}$, peccato che là dentro non siano definiti gli esponenziali... Che vuol dire moltiplicare 3 per sè stesso -5 volte? Beh, con abuso di notazione, uno può pensare di "tornare indietro" dal moltiplicare, cioè dividere, per 5 volte, però... dai, suona malissimo! Ora entra in gioco un'altra importante osservazione: molto spesso, in matematica, si generalizzano cose "ovvie" a casi in cui non lo sono più, conservando però le vecchie proprietà che già avevamo. In sostanza, non ci portiamo le "potenze" in $\mathbb{Z}$, ma solo le loro proprietà. Sono le proprietà stesse a definire gli oggetti, e non viceversa. Direbbe Vigna che un matematico non sa COSA siano gli oggetti di cui parla, ma sa COME si comportano.

In effetti, quello che stiamo cercando di costruire non è così distante da quello che abbiamo fatto quando abbiamo inventato lo stesso $\mathbb{Z}$: ci serviva poter "tornare indietro" dalla somma, e ci siamo inventati un numero x tale che $17+x=8$, cosa che prima non potevamo fare a piangere in greco una settimana. Ora noi vogliamo che rimanga vera la proprietà che il prodotto di due potenze con la stessa base sia una potenza della stessa base e con esponente la somma dei due. Presa per buona questa cosa, abbiamo che (essendo n naturale):

$$a = a^{1+n-n} = a^{1-n} \cdot a^n = a\left(a^{-n}a^n\right) \Rightarrow 1 = a^{-n}a^n = a^0 \ \forall a \neq 0$$

che è quello che ci ha raccontato la maestra, e che ora possiamo anche raccontare alla nonna. E ora possiamo anche dire che a^{-n} è il reciproco di a^n. Tutto torna, e ora possiamo anche dire che la proprietà enunciata sopra vale, a condizione di definire la funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ data, fissato a reale e non nullo, da:

$$a^z = \begin{cases} a^z & z > 0 \\ 1 & z = 0 \\ \frac{1}{a^{-z}} & z < 0 \end{cases}$$

Ora, e solo ora, che abbiamo definito l'esponenziale intero, possiamo dire che tutte quelle proprietà sono vere. Notare che quello che abbiamo fatto non è stato definire una funzione che godesse delle proprietà richieste, per poi accorgerci che guardacaso era quella che ci aspettavamo. Avremmo potuto farlo, ma avremmo dovuto dimostrare esistenza e unicità di una funzione con le proprietà richieste. Quello che abbiamo fatto, invece, è stato osservare come funzionano queste proprietà per definire l'esponenziale in modo oculato e non a caso.

Ora un po' di analisi. Osserviamo intanto che $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, quindi tutti gli esponenziali sono riconducibili al caso $|a| \geq 1$. Infatti, come potete facilmente convincervi, quando si sa come si comporta $f(x)$ si sa anche come si comporta $f(-x)$, essendo questa simmetrica a quella rispetto all'asse y. Quindi, se vogliamo studiare $\left(\frac{1}{2}\right)^z$ basta studiare 2^z e poi specchiare il tutto. Inoltre, se $a > 0$, $(-a)^z$ si comporta come a^z, ma a segni alterni: i punti della successione saranno alternativamente sopra e sotto l'asse x.

Vediamo dunque il caso $a > 1$ (il caso $a = 1$ è scemo, diventa di nuovo la funzione identicamente 1). Sul semiasse positivo la funzione è identica alla già nota successione a^n, e quindi è ancora crescente e divergente. Sul semiasse negativo abbiamo α^n vista allo specchio, dove $\alpha \equiv \frac{1}{a} < 1$. Essendo vista alla rovescia, stavolta sarà crescente, e non decrescente, mentre il limite rimane lo stesso. Dunque per $a > 1$ abbiamo a^z strettamente crescente su tutto $\mathbb{Z}$, convergente a 0 per $z \to -\infty$, divergente a $+\infty$ per $z \to +\infty$. Notare che la funzione è sempre positiva.

Come dicevo prima, per il caso $a < -1$ ci basta prendere $|a|^z$ e specchiare rispetto all'asse x tutti i punti di posizione dispari. Il limite a $-\infty$ rimane 0, per le solite ragioni, mentre a $+\infty$ non esiste il limite.

3 Una piccola digressione: i radicali

Tra le proprietà degli esponenziali naturali e interi ne abbiamo trovata una che riguarda i prodotti tra esponenti: $\forall a \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Al che uno dice, se $\left(a^4\right)^3 = a^{12}$, allora $\left(a^{\frac{12}{3}}\right) = a^4$. Ma se invece scriviamo $\left(a^{12}\right)^{\frac{1}{3}}$? Uno si dovrebbe scandalizzare: avere come esponente $\frac{12}{3}$ è solo un modo brutto per metterci 4, quindi niente di nuovo, ma $\left(a^{12}\right)^{\frac{1}{3}}$ significa prendere a^{12} ed elevarlo alla $\frac{1}{3}$. E da quando in qua un esponente può essere una frazione. Per di più, se prima, con i negativi, potevamo arrampicarci sugli specchi e trovare un senso intuitivo all'esponente intero, qui con i razionali non c'è molto da fare. a moltiplicato per se stesso un terzo di volta? Ecchecosè?

Diamo un po' un'occhiata a quello che stiamo facendo. Secondo la scrittura $a^4 = \left(a^{12}\right)^{\frac{1}{3}}$, quello che noi facciamo per calcolare a^4 è elevarlo prima alla 12. Poi però ci accorgiamo che è troppo, e che dobbiamo "tornare un po' indietro", perchè quello che abbiamo trovato non è a^4, ma quello che si ottiene "moltiplicandola per se stessa tre volte". Ci troviamo di fronte al problema della radice n-esima: quello che vogliamo trovare è "quel numero che elevato al cubo dia a^{12}". Metto tra virgolette perchè questa volta va di lusso, ma in altri contesti non ha sempre senso parlare di "quel numero che", perchè spesso non esiste, e se esiste ce n'è più d'uno.

3.1 Esistenza e unicità delle radici (vi garberebbe...)

Come al solito, il problema di poter parlare o meno di "quel numero che" si riduce a un'esistenza e unicità. La domanda dunque è questa: per quali $n \in \mathbb{N}$ (generalizzando facilmente al caso intero) e quali $x \in \mathbb{R}$ ha senso parlare di $\sqrt[n]{x}$, cioè di "quel numero che" elevato alla n dia x?

Stavolta, invece che fissare a e studiare a^n al variare di n, fissiamo n naturale, con la solita convenzione che zero non è naturale e studiamo x^n come funzione di x, naturalmente da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Quello che ci piacerebbe è che la funzione sia sempre invertibile, cioè che per ogni y reale esista un x che elevato alla n dia proprio y. Sfortunatamente, perchè questo sia vero, occorrono condizioni su n (come ben sappiamo). Vediamo ora qualche fatto opportunamente dimostrato:

- Per n dispari x^n è iniettiva e surgettiva, e quindi invertibile. Cioè, per n dispari esiste $\sqrt[n]{x}$ per ogni x reale. L'iniettività è di facile dimostrazione: supponiamo $x^n = y^n$, con $y \neq 0$ (altrimenti anche $x = 0$ e la tesi è verificata), allora $1 = \left(\frac{x^n}{y^n}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^n$. Ma da questo segue che anche $\frac{x}{y} = 1$, cioè $x = y$. Notare che qui abbiamo fatto uso del fatto che 1 è l'unica radice n-esima reale di 1 per ogni n DISPARI. Se vogliamo convincerci meglio di questo fatto basta osservare che l'esponenziale intero è iniettivo appena $|a| \neq 1$, e vale 1 in 0, ma qui abbiamo supposto $n > 0$, e dunque si deve avere $|\frac{x}{y}| = 1$. Il caso $\frac{x}{y} = -1$, però, è da escludersi, perchè $(-1)^n$ vale -1 per ogni n dispari. Per la surgettività basta notare che i limiti a $\pm\infty$ sono rispettivamente $\pm\infty$. Se non vi fidate, lo mostriamo per induzione. Se n è dispari allora esiste m tale che $n = 2m + 1$. L'induzione sarà su m. Per $m = 0$ non mi ci metto neanche. Supponiamo ora che la mamma ci abbia già detto che per un certo m_0 i limiti sono quelli previsti. Vogliamo vedere allora cosa succede per $m_0 + 1$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{2(m_0+1)+1} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 x^{2m_0+1} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \lim_{x\to\pm\infty} x^{2m_0+1} = \pm\infty$$

  dove si è dato per noto il limite a $\pm\infty$ di x^2, che è abbastanza banale. Per induzione segue la tesi. Ora, comunque preso un valore y reale positivo, dato che il limite a $+\infty$ di x^n è $+\infty$, esisterà sempre un M reale tale che x^n si mantiene maggiore di y per ogni $x > M$. Scegliamo un opportuno x_0 maggiore di M, e sappiamo che $0 < y < x_0^n$. Ma abbiamo visto che x^n è continua, e per il teorema dei valori intermedi ogni valore compreso tra 0 e x^n viene assunto dalla funzione, e quindi anche y. Analogamente il caso $y < 0$. Dunque la funzione è surgettiva, e quindi invertibile.

- Per n pari x^n non è nè iniettiva nè surgettiva, quindi non è mai detto che, preso un y reale, esista x tale che $x^n = y$, e se c'è molto probabilmente non è neanche unico. Per dimostrarlo, vediamo che $x^n = (-x)^n$ per ogni x. Infatti, n pari vuol dire che è scrivibile come $2m$ per qualche m, e quindi $x^n = x^{2m} = \left(x^2\right)^m = \left((-x)^2\right)^m = (-x)^{2m} = (-x)^n$. Inoltre, si dimostra per induzione che per $x \geq 0$ ed n naturale vale anche $x^n \geq 0$, e così per n pari $x^n \geq 0 \; \forall x$. Questo ci suggerisce che i negativi non hanno "radici" reali, mentre per i positivi che ne abbiano ce ne sono sempre almeno due: una positiva e una negativa. Zero ammette ovviamente se stesso come unica radice. Quindi, se vogliamo avere qalche speranza di poter trovare una sorta di ripiego, siamo costretti a restringere dominio e codominio della funzione a $\mathbb{R}^+$, cioè al semiasse reale positivo, 0 compreso. Ora occorre mostrare che, fissato un n pari, per ogni $y \geq 0$ reale esiste un unico $x \geq 0$ reale tale che $x^n = y$. Per farlo useremo quel famoso assioma di continuità che non abbiamo ancora usato e che nessuno ha mai capito a che cavolo serva nè per quale arcano motivo lo abbiano inventato.

3.2 Esistenza e unicità delle radici (stavolta per davvero)

La formulazione "ortodossa" dell'assioma di continuità è: data comunque una successione di intervalli dimezzati in $\mathbb{R}$, esiste ed è unico un punto appartenente all'intersezione di tutti gli intervalli. Da questo segue (se non ci credete fatemi un fischio che ve lo dimostro) che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ammetta un maggiorante ammette anche un estremo superiore. Notare che su $\mathbb{Q}$ questo è FALSO, e ci sono controesempi a fuego quanti ne volete. Sfrutteremo per i nostri loschi scopi questa coseguenza, facendo finta che sia essa stessa l'assioma di continuità. In realtà non è proprio un "fare finta", perchè si dimostra che le due cose sono equivalenti. In altre parole, in un campo ordinato vale l'assioma di continuità se e solo se ogni sottoinsieme che ammetta maggiorani ammette estremo superiore.

Ora vogliamo vedere che, per ogni $a \geq 0$ e per ogni n naturale esiste un unico $b \geq 0$ tale che $b^n = a$. Consideriamo ora l'insieme $A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^n < a\}$. A è limitato, perchè, ad esempio, $(a+1)^n \geq 1 + na > a$ per la disuguaglianza di Bernoulli, e x^n è una funzione crescente sul semiasse positivo. Dunque esiste $\sup A$, chiamiamolo b. b^n non può eccedere a, perchè altrimenti esisterebbe $c < b$ tale che $a < c^n < b^n$, contro l'ipotesi che b sia il minimo maggiorante di A, e non può nemmeno essere più piccolo di a, o esisterebbe $c > b$ tale che $c^n < a$, contro il fatto che b è un maggiorante di A. Dunque una radice n-esima esiste, e l'unicità segue dalla monotonia, ergo iniettività, di x^n.

Solo dopo questa dimostrazione possiamo dire che abbia senso parlare di $\sqrt[n]{x}$, sia come funzione che come "valore". A questo punto, per $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, possiamo definire $x^{\frac{1}{n}}$ come l'unico reale positivo y tale che $y^n = x$.

4 L'esponenziale razionale

Dopo tanta fatica arriva l'agognato esponenziale razionale. Alcune osservazioni: posto che d'ora in avanti parliamo nuovamente di funzioni esponenziali e non di potenze (vale a dire che l'argomento della funzione è l'esponente e non la base), dovremo restringere un attimo l'insieme delle basi accettabili per un esponenziale. 0 non va bene, perchè non ha senso parlare di 0^0, dato che una tale scrittura, stando a quanto detto prima, vorrebbe dire $\frac{0}{0}$, cioè quell'unico numero che moltiplicato per 0 dia 0. Questo numero è tutt'altro che unico, e quindi non ha senso parlarne. Ma non va bene neanche una base negativa, dato che se $a < 0$ non esiste, per esempio, $a^{\frac{1}{2}}$. Quindi, d'ora in avanti, parleremo sempre e solo di esponenziali con base positiva. Questo non vuol dire che le potenze non siano definite per basi negative, perchè $\sqrt[3]{-1}$ è una cosa che, se non vediamo tutti i giorni, quanto meno non disturba. Prima di procedere con la definizione e lo studio di $a^q : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, vorrei però dire due parole su un'altra funzione, forse un po' scema, ma affatto scontata.

4.1 Una successione a caso: l'esponenziale $a^{\frac{1}{n}}$

Scopo di questo paragrafo è quello di introdurre qualche lemmino (dicesi "lemma" un teorema minore che occorre per dimostrare altri teoremi più interessanti) che ci tornerà utile nel seguito. Quello che vorremmo tanto vedere è che il famigerato esponenziale razionale gode di tante proprietà simpatiche: monotonia, continuità, convergenza e divergenza agli infiniti giusti...

Vediamo allora le proprietà di $a^{\frac{1}{n}}$, dove $a > 0$. Già sospettiamo cosa deve succedere: la successione sarà monotona, e ci aspettiamo che sia anche convergente, a 1, più o meno. Prendiamo ad esempio $a > 1$. Allora la successione è limitata verso il basso da 1: questo perchè $a^{\frac{1}{n}}$ è l'unico reale positivo che elevato alla n dia a. Ma sappiamo che per ogni $\alpha \leq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a^n \leq 1$, e quindi $a^{\frac{1}{n}}$ non può che essere maggiore di 1. Peschiamo ora due naturali m ed n, con $m < n$. Vogliamo far vedere che allora $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$. Ricordandoci della crescenza della funzione x^n nell'intervallo $[0, +\infty)$ per ogni n, possiamo elevare ambo i mebri alla $m \cdot n$, e trovare a^n e a^n. Qui usiamo la crescenza di a^n per verificare che $a^m < a^n$, da cui la tesi. Dunque $a^{\frac{1}{n}}$ è decrescente e limitata verso il basso da 1: segue che è convergente, ma non sappiamo ancora dove. Siamo abbastanza convinti che questo limite sia proprio 1, e ora lo dimostriamo. Per ogni $\varepsilon > 0$, vogliamo vedere che esiste $\bar{n}$ naturale tale che $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. E infatti, essendo $1 + \varepsilon > 1$, segue che la successione $(1 + \varepsilon)^n$ è divergente. Esisterà dunque $\bar{n}$ tale che $(1 + \varepsilon)^{\bar{n}} > a$. Ma allora, sempre per crescenza di x^n in x, si deve avere $a^{\frac{1}{\bar{n}}} < 1 + \varepsilon$, e dunque la convergenza a 1. Nel caso $a < 1$ valgono cose analoghe dimostrate nello stesso modo. Siccome non ho voglia di scrivere le dimostrazioni, me la tiro anche io come i professori fighi e dico "la dimostrazione è lasciata per esercizio". La dimostrazione delle stesse cose per $a = 1$, invece, è lasciata come castigo a quei somari che non vedono al volo cosa succede.

4.2 Un'altra osservazione preliminare: densità di $\mathbb{Q}$ in sè

Se vi ricordate, il motivo per cui abbiamo deciso di andarcene da $\mathbb{Z}$ e passare a $\mathbb{Q}$ (peraltro con rinunce non indifferenti, dato che siamo stati costretti ad abbandonare tutti gli $a < 0$) è che quest'ultimo somiglia a $\mathbb{R}$ molto più del suo "antenato". Questa somiglianza è data da una proprietà molto importante, anch'essa di carattere topologico, che si chiama densità. In $\mathbb{Z}$, se ci troviamo in un punto z a caso, siamo sempre sicuri che, prima di trovare un'altro punto siamo sempre costretti a "muoverci di almeno 1". In realtà non ha molto senso dire così, dato che, in $\mathbb{Z}$ non c'è proprio niente tra un punto e un'altro, quindi non ci stiamo veramente "spostando". Questo mi serviva per dire che, presi due interi distanti tra loro 1, è impossibile trovarne un terzo nel mezzo. In $\mathbb{Q}$ questo problema non si pone, e non solo esistono punti arbitrariamente vicini, ma valgono pure due proprietà equivalenti:

1. comunque presi p, q razionali, esiste sempre un terzo elemento che sia compreso tra di loro (densità di $\mathbb{Q}$ in se stesso);

2. comunque scelto un numero razionale p e un naturale n, esiste sempre un

altro razionale q che dista da p meno di $\frac{1}{n}$.

Queste due sono verosimilmente equivalenti, cioè possiamo usare l'una o l'altra indifferentemente. Dato che non è questo l'oggetto principale che stiamo trattando ora, rimando la dimostrazione alle appendici. La cosa che mi preme è osservare un fatto apparentemente banale e ben noto a tutti, che potremmo indicare come cioè che rende $\mathbb{Q}$ più figo di $\mathbb{Z}$. In realtà ci sono altre ragioni ben più profonde per cui uno abbandona gli interi per passare ai razionali, ma per quello che serve a noi ci possiamo accontentare di questo. Quello che ci interessa, in realtà, è l'aspetto topologico della questione.

Ciò detto, tornando ai nostri affezionati esponenziali, ci immaginiamo che in qualche modo anche loro risentano di tutto questo. Se provate a disegnare a^n o a^z come successione esponenziale o esponenziale discreto, vi accorgete che il risultato è un insieme di punti messi tutti ben benino in fila, che si presentano a intervalli ben regolari, con morte e desolazione in mezzo. A pensarci bene, lo stesso insieme $\mathbb{Z}$, rappresentato su un foglio, è fatto in questo modo, mentre $\mathbb{Q}$, almeno a occhio nudo, è una retta "continua" indistinguibile da $\mathbb{R}$. Quello che ci aspettiamo, dunque, è che anche il grafico dell'esponenziale si comporti allo stesso modo. Questo, tradotto in termini matematici, vuol dire che noi ci aspettiamo che a^q sia una funzione continua su $\mathbb{Q}$, ed è questo l'oggetto del prossimo paragrafo.

4.3 Finalmente l'esponenziale razionale

Poste tutte quante tali premesse, possiamo cominciare a definire e dimostrare cose interessanti sull'esponenziale a^q come funzione da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. D'ora in avanti assumiamo $a > 1$, dato che il caso $0 < a < 1$ è del tutto analogo, mentre per $a = 1$ si ha la funzione identicamente 1.

Scrivendo $x = \frac{p}{q}$, dove $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, con p e q coprimi (cioè la frazione è ridotta ai minimi termini), definiamo a^x come $(a^p)^{\frac{1}{q}}$, che poi sarà lo stesso che $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Vediamo prima di tutto la crescenza. Siano $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $x_2 = \frac{p_2}{q_2}$, con p_1, p_2 interi, q_1, q_2 interi strettamente positivi, e sia $x_1 < x_2$. Allora esistono p_1', p_2', q interi tali che $x_1 = \frac{p_1'}{q}$, $x_2 = \frac{p_2'}{q}$, con $q > 0$. Segue ovviamente $p_1 < p_2$. Ora si ha, per $i = 1, 2$:

$$a^{x_i} = a^{\frac{p_i}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_i}$$

Essendo $a^{\frac{1}{q}} > 1$, l'esponenziale intero con base $a^{\frac{1}{q}}$ è crescente, e quindi otteniamo $a^{x_1} < a^{x_2}$, cioè a^q è crescente.

A questo punto uno potrebbe pensare di aver finito. Infatti, presi $x_1 < x_2$ razionali, la densità garantisce che esiste x_3 tale che $x_1 < x_3 < x_2$. Ma allora deve valere anche $a^{x_1} < a^{x_3} < a^{x_2}$, e cioè comunque presi y_1 e y_2 nell'immagine di a^q ne esiste un terzo che sia compreso tra di loro. Balle. Cioè, è vero, ma chissenefrega? Abbiamo solo dimostrato che l'immagine di a^q è densa in se stessa, ma quello che ci interessava vedere è che in questo insieme non ci sono "buchi", come in $\mathbb{Z}$, cioè che i punti dell'immagine sono arbitrariamente vicini tra di loro. Noi non vogliamo cioè che ci siano punti in questo insieme abbastanza distanti da tutti gli altri da dover essere costretti a fare un percorso di almeno ε per raggiungerne un altro. Vediamo che quanto dimostrato non significa ancora niente in questo proposito. Consideriamo infatti una funzione f, definita a tratti come segue:

$$f = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & q < 0 \\ \frac{3}{2} & q = 0 \\ q + 2 & q > 0 \end{cases}$$

f gode di tutte le proprietà che abbiamo già verificato valere per a^q, e in particolare è monotona crescente. Ma se ci troviamo nel punto $\frac{3}{2}$, nel dominio di f, ma per trovarne un altro ci dobbiamo allontanare di almeno $\frac{1}{2}$.

Voglio mostrare che, comunque preso un punto nell'immagine di a^q, ne esiste sempre un altro arbitrariamente vicino a lui. In formule: $\forall q \in \mathbb{Q}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists p \in \mathbb{Q} : |a^p - a^q| < \varepsilon$. Ci crediamo? Io sì. E se ve lo dico io confido ci crediate anche voi. Ma siccome ogni tanto dico cavolate pure io, e siccome stiamo facendo matematica prima di credere a una cosa la vogliamo dimostrare. Cominciamo allora con una cosa semplice semplice: scelto un $\varepsilon > 0$ consideriamo $|a^p - a^q|$, e raccogliamo un fattore a^p: per positività dell'esponenziale possiamo portare a^p fuori dal valore assoluto e chiamare $r = q - p$. Otteniamo allora l'espressione $a^p\,|1 - a^r|$. Ma sappiamo già che per ogni $\bar{\varepsilon} > 0$ eiste un $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \bar{\varepsilon}$, per quanto dimostrato sulla successione di prima. Analogamente esiste anche $\bar{m}$ tale che se $m \geq \bar{m}$ allora $1 - a^{-\frac{1}{m}} < \bar{\varepsilon}$. Dunque, per la monotonia già dimostrata, se r è un numero razionale tale che $-\frac{1}{\bar{m}} \leq r \leq \frac{1}{\bar{n}}$, allora si ha $|1 - a^r| < \bar{\varepsilon}$. Bello, no? Questo vale PER OGNI $\bar{\varepsilon}$, quindi lo possiamo scegliere noi come ci pare. Ora scegliamo $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^p}$. Sia δ il più piccolo tra $\frac{1}{\bar{m}}$ e $\frac{1}{\bar{n}}$. Allora si ha $|1 - a^r| < \frac{\varepsilon}{a^p}$, cioè $a^p\,|1 - a^r| < \varepsilon$ e quindi, finalmente, $|a^p - a^q| < \varepsilon$, a patto che $|r| < \delta$, cioè $|p - q| < \delta$. Questo vuol dire che, se nel dominio mi avvicino abbastanza a p, allora anche l'esponenziale si avvicinerà ad a^p a meno di un errore arbitrariamente piccolo. Questo può essere tradotto in molti modi. Uno è il seguente: comunque scelto p razionale, il limite per x che va a p di a^x esiste ed è proprio a^p. Figo! Scriviamolo bene, va, che poi ci torna anche utile:

$$\forall p \in \mathbb{Q}\ \lim_{x \to p} a^x = a^p$$

Questo è quello che, se vi ricordate, avevamo chiamato "essere una funzione continua". Udite udite, signore e signori: abbiamo dimostrato che l'esponenziale è una funzione continua sui razionali! E vedremo che il passo per la continuità su $\mathbb{R}$ è proprio breve breve...

Rimane solo una piccola formalità: dimostrare i limiti a $\pm\infty$. Osserviamo che, per monotonia, $a^x \geq a^{\lfloor x \rfloor}$, dove la funzione $\lfloor x \rfloor$ rappresenta la parte intera di x, cioè il più grande intero più piccolo di x. Ma sappiamo già che la funzione esponenziale diverge a $+\infty$, e così dovrà fare a^x come esponenziale razionale, per una facile estensione del teorema dei due carabinieri. Analogamente, poichè

$0 < a^x \leq a^{\lfloor x \rfloor + 1}$, e poichè l'esponenziale intero tende a 0 se $z \to -\infty$, segue che l'esponenziale razionale si comporta allo stesso modo.

Ovviamente, per $0 < a < 1$ valgono le stesse identiche cose, solo che la monotonia sarà decrescente e i limiti vengono scambiati.

5 Ritagli

Ecco una celebre diseguaglianza, che porta il nome di Bernoulli, a cui vi dovrete abituare presto, essendo appartenuto non a uno, bensì a tre fratelli parimenti brillanti e famosi. La diseguaglianza è la seguente:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

e vale per ogni n naturale e per ogni $x > -1$. Ovviamente, per fighi che fossero i Bernoulli, finchè non avremo dimostrato la loro disequazione questa avrà lo stesso valore che avrebbe se ce l'avesse raccontata il nostro amico maniaco vecchiettomane. Vediamo allora di imboccarci le maniche: dimostreremo la nostra asserzione nel modo più spontaneo che ci sia per i naturali. Per $n = 0$ la disequazione è vera: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x$, cioè $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Ora supponiamo che per un certo n la disuguaglianza sia già stata verificata, o che la mamma ci abbia detto che è vera. Allora:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

dove si è usata l'ipotesi induttiva nel secondo passaggio, ricordando che $(1+x) \geq 0$. Anche il passo induttivo è stato dimostrato, e concludiamo per induzione che i Bernoulli non ci hanno presi in giro.