Lezione 8 - 10/04/19

lunedì 8 aprile 2019 10:40

Teoremi di Sylow - Enunciati:

Primo teo di Sylow: Sia G un gruppo finito e sia p un primo tale che $p^b \mid |G|$ e $p^{b+1} \nmid |G|$ con $b \geq 1$. Allora $\forall\, 0 \leq a \leq b$ $\exists$ un sottogruppo di G di ordine p^a

Secondo teo di Sylow: Sia G come prima e sia H un p-Sylow $(|H| = p^b)$. Sia $K < G$ con $|K| = p^a$. Allora:

1) Esiste $g \in G$ tale che $K < gHg^{-1}$
2) Se K è un p-Sylow, allora esiste $g \in G$ t.c. $K = gHg^{-1}$

Terzo teo di Sylow: Sia G come prima. Allora vale la seguente relazione per n_p numero di p-Sylow

$$n_p \equiv 1 \pmod p$$

Oss: Per il II teo di Sylow è ben definita una azione

$$\begin{aligned} G \times X_p &\longrightarrow X_p \\ (g, H) &\longrightarrow gHg^{-1} \end{aligned}$$

Dove X_p è l'insieme dei p-Sylow di G. Inoltre, dato che sono tutti coniugati sono tutti isomorfi tra di loro.

Oss: Il III teo di Sylow ci dice che $n_p \equiv 1 \pmod p$, ma abbiamo anche un'altra informazione e cioè che $n_p = |\mathrm{orb}(H)|$ con H p-Sylow dell'azione definita sopra (in quanto è transitiva per il II teo). Ma allora sappiamo anche che

$$n_p \mid |G|$$

Teorema di Struttura dei Gruppi abeliani finitamente generati: Sia G un gruppo abeliano finitamente generato, allora G è della forma

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/d_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/d_k) \quad \text{con } d_1 \mid d_2 \dots \mid d_k \text{ univocamente determinati}$$

con $\mathbb{Z}^r$ detta PARTE LIBERA e $\mathbb{Z}/d_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/d_k$ detta PARTE DI TORSIONE

Equivalentemente esiste una struttura di G in relazione ai p-Sylow:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} P_i \right)$$

Dove i P_i sono i p-Sylow di G che sono univocamente determinati.

Esempio Sia $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_{45} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Troviamo le 2 rappresentazioni: $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

p-Sylow: $G \cong \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{27}) \oplus \mathbb{Z}_5$

Divisori: $G \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \big(\overbrace{\mathbb{Z}_3}^{\text{III a parti. da dx}} \times \overbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9}^{\text{II a partire da dx}} \times \overbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_5}^{\text{I a partire da dx}} \big) \cong$

$$\mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{270})$$

Oss: I p-Sylow e la parte libera di gruppi abeliani finitamente generati sono sottogruppi caratteristici. Questo implica che per calcolare gli $\mathrm{Aut}(G)$ con G abeliano fin. gen è sufficiente saper calcolare $\mathrm{Aut}(\text{p-Sylow})$ e $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$

ù