Lezione 2 - 20/03/19

sabato 16 marzo 2019 21:59

AZIONI IMPORTANTI: Sia G un gruppo che agisce su X. Vediamo alcune azioni:

(1) Sia $X = G$. Definiamo l'azione per coniugio di G su G

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, x) \longrightarrow g \cdot x = gxg^{-1}$$

È una azione; Diamo alcuni nomi

Def: Sia $x \in X = G$. Definiamo $Z(x) = \text{stab}(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ il CENTRALIZZATORE di x ovvero gli elementi g che commutano con x.

Oss: $Z(x)$ è un sottogruppo di G in quanto è uno stabilizzatore.

Def: Sia $x \in X = G$. Definiamo $cl(x) = \text{orb}(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ t.c. } g \cdot x = y\}$ la CLASSE DI CONIUGIO di x

Attenzione! Le classi di coniugio NON sono sottogruppi

Come diventa la formula delle classi?

$$|X| = |G| = \sum_{x \in \frac{X}{G}} |G|/|Z(x)|$$

Ma se $x \in Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in H\}$, allora $Z(x) = G$ $(gxg^{-1} = gg^{-1}x = x)$ e dunque vale che $|cl(x)| = 1$. La formula delle classi diventa quindi

$$\boxed{|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \frac{X}{G},\, x \notin Z(G)} |G|/|Z(x)|}$$

Fatto Utile 1: Sia G t.c. $|G| = p^2$. Allora G è abeliano

Dim: Dobbiamo dimostrare che $Z(G) = G$. $Z(G) < G$ dunque $|Z(G)| = 1, p, p^2$.
Supponiamo che $|Z(G)| = p$. Allora

$$G/Z(G) \simeq \mathbb{Z}_p \quad \text{ciclico}$$

Dunque G abeliano; Assurdo
Supponiamo che $|Z(G)| = 1$. Allora consideriamo l'azione per coniugio

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, x) \longmapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$

Per la formula delle classi abbiamo:

$$p^2 = |G| = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{Z(G)}} + \sum_{\substack{x \in \frac{X}{G} \\ x \notin Z(G)}} |G|/|Z(x)|$$

Dato che $|G|/|Z(x)| = 1, p, p^2$ allora affinché l'uguaglianza abbia senso (leggere mod p)

Dato che $|G|/|Z(x)| = 1, p, p^2$ allora affinché l'uguaglianza abbia senso (leggere mod p)
Si deve avere che $\exists x^*$ t.c. $|Z(x)| = p^2$ ma questo è assurdo (vorrebbe dire $x \in Z(G)$). $\square$

(2) Sia G gruppo e sia $X = \{H < G\}$. Consideriamo l'azione per coniugio

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, H) &\longmapsto g \cdot H = gxg^{-1} \end{aligned}$$

È ben definita in quanto il coniugio è un automorfismo.

Def: Sia $H \in X$ chiamiamo $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = stab(H)$ il <u>NORMALIZZATORE</u> di H.

Oss: il Normalizzatore è un sottogruppo di G.

Fatto: Sia $H < G$. $N_G(H)$ è il più grande sottogruppo di G in cui H è normale
Dim: Sicuramente vale che $H \trianglelefteq N_G(H)$: sia $g \in N(H) \Rightarrow gHg^{-1} = H$.
Devo ora dimostrare che se K è un sottogruppo in cui H è normale, allora $K \subseteq N(H)$.
Sia dunque $k \in K \Rightarrow kHk^{-1} = H \Rightarrow k \in N(H) \Rightarrow K \subseteq N(H)$. $\square$

Oss Se $H \trianglelefteq G$, allora $N(H) = G$.

Oss: La bigezione $orb(x) \longleftrightarrow |G|/|stab(x)|$ ci dice che

$$|N(H)| \cdot |orb(H)| = |G|$$

Dunque il numero di coniugati di H divide la # di G. In particolare è proprio l'indice $[G : N(H)]$.

(3) Sia G un gruppo e $H < G$. Consideriamo l'azione su G/H insieme

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, xH) &\longmapsto g \cdot xH = gxH \end{aligned}$$

Questa azione permuta i laterali.

Fatto Utile 2: Sia $H < G$ con $[G : H] = p$ con p il più piccolo primo che divide la # di G. Allora H è normale in G.
Dim: Considero l'azione e l'immersione in $S_{|X|}$

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, xH) &\longmapsto gxH. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow S_p \\ g &\longmapsto \varphi_g : \begin{aligned} G/H &\longrightarrow G/H \\ xH &\longrightarrow gxH \end{aligned} \end{aligned}$$

Vorrei dire che $\ker\Phi = H$. Sappiamo che $|\mathrm{Im}\,\Phi| \mid |G|$ e anche $|\mathrm{Im}\,\Phi| \mid p! \Rightarrow |\mathrm{Im}\,\Phi| \mid \mathrm{MCD}(p!, G) = p$ per l'ipotesi su $|G|$. Dunque $\mathrm{Im}\,\Phi \cong \mathbb{Z}_p$ oppure $\mathrm{Im}\,\Phi \cong e$.
Ma $\mathrm{Im}\,\Phi \neq e$ in quanto preso $g \in G\setminus H$, allora $\varphi_g \neq id$ (Manda H in gH)
Dunque $|\mathrm{Im}\,\Phi| = p$. Se ora mostro che $\ker\Phi \subseteq H$ ho la tesi per #.

Sia $g \in \ker\Phi \Rightarrow \Phi(g) = \varphi_g = id$. In particolare dunque

$$\varphi_g(H) = gH = H \quad \text{cioè } g \in H \quad \Rightarrow \ker\Phi \subseteq H$$

$\square$

(4) Sia G gruppo e $H \trianglelefteq G$. Considero l'azione

$$\begin{aligned} G \times H &\longrightarrow H \\ (g, h) &\longrightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

Tale azione è ben definita perché H è normale