Teorema: CORRISP. BIUNIVOCA TRA IDEALI: Sia $f: A \longrightarrow B$ omomorfismo <u>surgettivo</u> di anelli. Allora
Esiste una corrispondenza biunivoca:

$$\left\{ \begin{array}{c} I \subseteq A \text{ ideali tali che} \\ \ker f \subseteq I \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ J \text{ ideali di } B \right\}$$

Inoltre valgono i seguenti due fatti:
I primo $\iff$ J primo
I massimale $\iff$ J massimale

Dim: È la dimostrazione della corrispondenza tra sottogruppi già vista negli esercizi. Unica osservaz. in più è che non è detto che $f(I)$ sia ideale di B. Ho bisogno della surgettività.
Facciamo le due verifiche extra: Sia $I \subseteq A$ $J = f(I)$
Considero

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/J$$

Dato che f è surgettiva e π lo stesso allora $\pi \circ f$ è surgettiva. Inoltre vale che $\ker \pi \circ f = I$ per costruzione. Dunque

$$A/I \simeq B/J$$

e questo isomorfismo prova i due fatti. $\square$

Def. Sia $I \subseteq A$ ideale e $f: A \longrightarrow B$ di anelli. Dato che $f(I)$ non è detto che sia un ideale definiamo $I^e = \langle f(I) \rangle$ <u>IDEALE ESTESO</u>

Def. Sia A un dominio di Integrità. Diremo che $S \subseteq A$ sottoinsieme è <u>MOLTIPLICATIVO</u> se:
- $0 \notin S$
- $1 \in S$
- $a, b \in S \implies ab \in S$

Esempi: Sia $A = \mathbb{Z}$, allora abbiamo
1. $S = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $S = \{\text{dispari}\}$
3. $S = \mathbb{Z} \setminus p$ con p ideale primo
4. $S = \mathbb{Z} \setminus (0)$ (caso speciale di sopra)

Def: Definiamo in $S \times A$ la relazione

$$(s,a) \sim (t,b) \iff sb = at \qquad \left(\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \iff bs = at \right)$$

E definiamo l'anello <u>$S^{-1}A$</u> come l'insieme delle coppie $(s,a) = \frac{a}{s} \in S \times A$ a meno di relazione di equivalenza con le operazioni

$$+ : \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st} \qquad \cdot \ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Oss: Si deve verificare che la def. è ben posta cioè $S^{-1}A$ è anello

Oss: La mappa naturale $f: A \longrightarrow S^{-1}A$ $\quad a \longmapsto \frac{a}{1}$ è un morfismo iniettivo di anelli.

Oss: Moralmente nel nuovo anello gli elementi di S (che sono $\frac{s}{1}$) sono adesso invertibili. Se considero dunque $\mathbb{Z}$ e $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ottengo $S^{-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$

Def: Sia $f: A \longrightarrow S^{-1}A$. Chiamiamo $S^{-1}I = I^e = \langle f(I) \rangle$ con I ideale di A.

OSSERVAZIONE CRUCIALE: Se I è proprio non è detto che $S^{-1}I$ sia proprio. In particolare se $I \cap S \neq \emptyset$, allora $S^{-1}I$ scoppia cioè $S^{-1}I = S^{-1}A$

Infatti se $S \cap I \neq \emptyset \Rightarrow \exists s \in I \cap S \Rightarrow \frac{s}{1}$ è invertibile in $S^{-1}A$ e $\frac{s}{1} \in S^{-1}I \Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}A$.

Proposizione: Ogni ideale di $S^{-1}A$ è della forma $S^{-1}I$ con I ideale di A.

Dim: Sia J ideale in $S^{-1}A$. Considero

$$I = \{ \text{Numeratori di } \tfrac{a}{s} \text{ con } \tfrac{a}{s} \in J \} \subseteq A$$

Allora I è ideale di A e $S^{-1}I = J$.

Proposizione: Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi $p \subseteq A$ t.c. $p \cap S = \emptyset$ e gli ideali primi di $S^{-1}p$. $\quad p \longleftrightarrow S^{-1}p$

Dim: Basta mostrare che p primo $\Leftrightarrow S^{-1}p$ primo, $p \subseteq q \Leftrightarrow S^{-1}p \subseteq S^{-1}q$.

Def: Un dominio di integrità A si dice DOMINIO EUCLIDEO se esiste una funzione "grado"

$$d: A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

con le seguenti proprietà:

1. $d(x) \leq d(xy) \quad \forall x, y \in A \setminus \{0\}$
2. $\forall a, b \in A \quad b \neq 0 \quad \exists q, r \in A$ t.c. $a = qb + r$ dove $d(r) < d(b)$ oppure $r = 0$.

Def: Un dominio di integrità A si dice un DOMINIO A IDEALI PRINCIPALI (PID) se tutti i suoi ideali sono principali

Def: Un dominio di integrità A si dice DOMINIO A FATTORIZZAZIONE UNICA se ogni elemento diverso da 0 si scrive in modo unico come prodotto di un elemento invertibile e un prodotto di primi $\quad x = \mu \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ con $\mu \in A^*$ p_i primi.

Teorema: Vale EUCLIDEO $\Rightarrow$ PID $\Rightarrow$ UFD.

Dim: (Sketch)

- Se ho la f.z grado e $I \subseteq$ Euclideo prendo $x \in I$ con grado minimo e $I = (x)$
- In un PID le catene $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ di ideali stabilizzano (ACC)
- In PID elemento irriducibile = elemento primo

- In un PID le catene $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ di ideali stabilizzano (ACC)
- In PID elemento irriducibile = elemento primo
- Sia $x \in$ PID allora la fattorizzo in irriducibili = primi e il procedimento ha fine per ACC

Oss: I Viceversa sono FALSI

1. $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ è PID, ma non è EUCLIDEO
2. $\mathbb{k}[x,y]$ è UFD, ma non è ovviamente PID.

Proposizione: $I \subseteq \mathbb{Z}[x]$. I è massimale se e solo se I è della forma

$$I = (p, f(x)) \qquad \text{con } p \text{ primo in } \mathbb{Z} \text{ e } f(x) \text{ irriducibile in } \mathbb{Z}_p[x].$$

Sketch Dim:

- Considero due casi ① $\mathbb{Z} \cap I = (p)$ primo e ② $\mathbb{Z} \cap I = (0)$.
- Caso ① deve esserci qualcos'altro t.c. $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x))$ sia campo
- Caso ② Impossibile

$\square$

Proposizione:

1. Se A PID $\Rightarrow S^{-1}A$ è PID
2. Se A UFD $\Rightarrow S^{-1}A$ è UFD

|| I viceversa sono falsi MI RACCOMANDO

Dim: Lunga, lasciamo perdere, ma tenere a mente il risultato