Esercizi 8

lunedì 8 aprile 2019 20:35

Esercizio 36: Sia G un gruppo di ordine $3 \cdot 5 \cdot 17$. Provare che:

(a) Esiste un sottogruppo H di ordine 17 caratteristico

(b) Il quoziente G/H è ciclico

(c) G è un gruppo ciclico.

Esercizio 37: Determinare tutti i gruppi abeliani finiti di ordine dispari che hanno esattamente 10 sottogruppi (compresi G stesso e $\{e\}$)

Esercizio 38: Costruire un esempio di un gruppo di ordine 18 con un sottogruppo non normale, un sottogruppo normale non caratteristico e un sottogruppo caratteristico non banale

Esercizio 39: Classificare i gruppi di ordine 52.

Esercizio 40: Siano p e q primi dispari distinti e G di ordine $p^3 q$. Mostrare che

(1) L'ordine del centro di G non è uguale a q

(2) G NON è semplice

Esercizio 41: Sia $G \cong \mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/2$

(1) Contare i sottogruppi di G di ogni possibile ordine

(2) Tutti i sottogruppi di ordine 4 sono caratteristici

Esercizio 42: Sia G di ordine pqr con p, q, r primi distinti. Dimostrare che:

(1) G ha un sottogruppo normale di ordine primo

(2) G ha un sottogruppo normale di indice primo

Esercizio 43:

(1) Mostrare che un gruppo di ordine p^2q^2 con p, q primi distinti NON è semplice

(2) Sia $n(p,q)$ il numero di classi di isomorfismo di G di ordine p^2q^2. Calcolare $n(p,q)$ al variare dei primi p, q distinti.

Esercizio 44: Calcolo di $|\mathrm{Aut}(P)|$ con P un p-Sylow Abeliano: Seguire la seguente traccia per giungere al risultato. A un certo punto metteremo dei numeri; meglio capire l'idea piuttosto che perdersi in formalismi.

(1) Mostrare che $pP = \{x \in P \mid \exists y \text{ t.c. } py = x\}$ è caratteristico in P.

(2) Sia $\varphi : P \longrightarrow P$ un automorfismo di P, allora

$$\overline{\varphi} : \frac{P}{pP} \longrightarrow \frac{P}{pP} \qquad \overline{\varphi}(x + pP) = \varphi(x) + pP$$

È automorfismo di P/pP (ovvero dimostrare che questo diagramma commuta con $\overline{\varphi}$ Aut)

$$P \xrightarrow{\varphi} P$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ P/pP \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & P/pP \end{tikzcd}$$

(3) Mostrare che se $P \cong (\mathbb{Z}/p^{\alpha_1})^{\beta_1} \times \dots \times (\mathbb{Z}/p^{\alpha_n})^{\beta_n}$, allora $\frac{P}{pP} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}$

(4) Osservare che dunque è ben definita una mappa

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Aut}(P) &\longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\frac{P}{pP}\right) \cong GL_{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}(\mathbb{Z}/p) \\ \varphi &\longmapsto \overline{\varphi} \end{aligned}$$

(5) Considerare adesso $P = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/8$ e considerare un automorfismo generico $\varphi : P \longrightarrow P$ come una matrice 4×4

$$M(\varphi) = A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,4} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4,1} & \cdots & a_{4,4} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a_{i,1} \in \mathbb{Z}/2,\ a_{i,2} \in \mathbb{Z}/4,\ a_{i,3} \in \mathbb{Z}/4,\ a_{i,4} \in \mathbb{Z}/8$$

e un elemento di P come una quadrupla (a,b,c,d). Osservare che questa notazione è ben definito un morfismo e dare condizioni NECESSARIE sui coefficienti di A affinché A sia auto.

(6) Mostrare che $\Phi : \mathrm{Aut}(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P/pP)$ non è altro che la lettura modulo 2 (o modulo p in generale) dei coefficienti della matrice.

(7) Calcolare $|\ker \Phi|$ e $|\mathrm{Im}\, \Phi|$ e dedurne la cardinalità di $\mathrm{Aut}(P)$.

Esercizio 45: Sia G gruppo finito e sia $P \leq G$ un p-Sylow. Mostrare che

$$N_G(N_G(P)) = N_G(P)$$

Cioè il normalizzatore del normalizzatore di un p-Sylow rimane invariato.