Esercizi 16

martedì 28 maggio 2019 10:05

Esercizio 86: Sia $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt{5}$

(i) Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{5})$

(ii) Determinare il campo di spezzamento $\mathbb{K}$ e il gruppo di Galois del pol. minimo di α su $\mathbb{Q}$

(iii) Descrivere le sottoestensioni di $\mathbb{K}$ che sono di Galois su $\mathbb{Q}$ e il cui gruppo di Galois è abeliano

Esercizio 87: Sia $\zeta_9 \in \mathbb{C}$ una radice nona primitiva dell'unità e siano $\alpha = \zeta_9^3$, $\beta = \zeta_9 + \zeta_9^{-1}$.

(a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$ sono le uniche estensioni $\mathbb{K}$ di $\mathbb{Q}$ per cui $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{Q}(\zeta_9)$

(b) Determinare i gruppi di Galois

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_9, i)/\mathbb{Q}(\alpha)\right) \qquad \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_9, i)/\mathbb{Q}(\beta)\right)$$

(c) Trovare tutte le sottoestensioni di $\mathbb{Q}(\zeta, i)$ di grado primo su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 88: Sia ζ_{15} una radice 15-esima primitiva dell'unità. Contare le sottoestensioni di grado 2 su $\mathbb{Q}$ e descrivere ognuna di esse come $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ con m intero libero da quadrati

Esercizio 89: Sia $\mathbb{K}$ un campo di caratteristica 0 oppure finito; $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio irriducibile di grado 4 e siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le sue radici in Ω chiusura algebrica.
Poniamo:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 \\ \gamma &= \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 \\ \delta &= \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 \end{aligned} \qquad \mathbb{L} = \mathbb{K}(\beta, \gamma, \delta)$$

Mostrare che:

(a) $\mathbb{L}$ è normale su $\mathbb{K}$

(b) il polinomio minimo di β su $\mathbb{K}$ ha grado minore o uguale a 3

(c) Se $\mathbb{K}$ è finito, allora $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$

Esercizio 90: Sia ζ_7 radice settima primitiva:

(i) Mostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4) = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$

(ii) Mostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1}, \sqrt{-7}) = \mathbb{Q}(\zeta_7)$

Esercizio 91: Sia ζ_p una radice p-esima primitiva con $p \neq 2$ primo. Sia $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$. Provare

$$\sum_{\varphi \in G} \varphi(\zeta_p) = -1 \qquad \prod_{\varphi \in G} \varphi(\zeta_p) = 1$$

Esercizio 92: Calcolare $[S_{10}, S_{10}]$ e $[D_5, D_5]$.