Esercizi 10

domenica 5 maggio 2019 17:30

Esercizio 54: Sia A dominio e sia $p \subseteq A$ ideale primo. Dimostrare che $S^{-1}A$ ha un solo ideale massimale che è $S^{-1}p$.

Esercizio 55: Sia $A = \mathbb{Q}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e sia $S_1 = A \setminus \{0\}$ e $S_2 = A \setminus (x)$. Provare che S_1 e S_2 sono due parti moltiplicative di A e che $S_1^{-1}A$ <u>non</u> è isomorfo a $S_2^{-1}A$.

Esercizio 56: Sia $A = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid n \text{ è dispari}\}$. Provare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ e mostrare che un ideale $I \subseteq A$ è generato da 2^k per qualche k. Trovare infine il campo delle frazioni di A.

Esercizio 57: Sia A dominio e sia S insieme moltiplicativo. Provare che se I è un ideale massimale nella famiglia degli ideali di A che non intersecano S, allora I è un ideale primo.

Esercizio 58: Sia A un anello e sia $I \subseteq A$ ideale. Sia $I[x] \subseteq A[x]$ l'insieme dei polinomi in $A[x]$ a coefficienti in I:

① Dimostrare che $I[x]$ è ideale di $A[x]$

② $I(x)$ è l'ideale generato da I in $A[x]$.

③ È vero che se I è primo, allora $I[x]$ è primo?

Esercizio 59: Sia A anello. Dimostrare che A è campo $\Longleftrightarrow$ $A[x]$ è PID

Esercizio 60: Sia A dominio a fattorizzazione unica, x un elemento primo di A e S la sua parte moltiplicativa $A \setminus (x)$. Dimostrare che

① la localizzazione $S^{-1}A$ è un anello a ideali principali

② L'intersezione di tutti gli ideali diversi da $\{0\}$ di $S^{-1}A$ è uguale a $\{0\}$

Esercizio 61: Siano A un dominio, S una sua parte moltiplicativa e $S^{-1}A$ l'anello delle frazioni. Provare che

(i) Se I ideale di A, allora $S^{-1}\sqrt{I} = \sqrt{S^{-1}I}$

(ii) Se I, J ideali, cosa si può dire di $S^{-1}(I \cap J)$ e $S^{-1}I \cap S^{-1}J$?

Esercizio 62: Sia A dominio, S parte moltiplicativa. S si dice <u>SATURA</u> se soddisfa la seguente proprietà: $[(s \in S,\ d \in A,\ d \mid s) \Rightarrow d \in S]$. Dimostrare che:

① Esiste sempre la <u>SATURAZIONE</u> di S ovvero la più piccola parte moltiplicativa $\tilde{S}$ satura che contiene S

② Se S e T sono parti moltiplicative vale che: S e T hanno la stessa saturazione se e solo se $S^{-1}A = T^{-1}A$ (come sottoinsiemi in $\mathrm{Quot}(A)$)

Esercizio 63: Sia A anello e N l'ideale degli elementi nilpotenti di A. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti

① A possiede un unico ideale primo

② Ogni elemento di A è invertibile o Nilpotente

③ Il quoziente A/N è un campo

① A possiede un unico ideale primo
② Ogni elemento di A è invertibile o Nilpotente
③ Il quoziente A/N è un campo.