Esercizio 1: Siano $H, K < G$ con $H \triangleleft G$. Sia $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. Dimostrare che $HK < G$. L'enunciato rimane vero se H non è normale?

Esercizio 2: Siano A, B gruppi abeliani. Supponiamo esistano $r : B \longrightarrow A$ e $i : A \to B$ tali che $r \circ i : A \longrightarrow A$ sia l'identità. Dimostrare che $B = \ker(r) \times \mathrm{Im}(i)$

Esercizio 3: Sia $\varphi : H \longrightarrow K$ un isomorfismo di gruppi. Mostrare che $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{Aut}(K)$

Esercizio 4:
- Sia A un gruppo abeliano. Mostrare che $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ di ordine 2. È vero il viceversa?
- Sia G un gruppo tale che $f : G \longrightarrow G$ t.c. $f(g) = g^{-1}$ è un automorfismo. Mostrare che G è abeliano.
- Sia G tale che ogni elemento di G ha ordine 2. Mostrare che G è abeliano.

Esercizio 5: Fissato $p > 2$ primo, determinare tutti i gruppi G tali che $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathbb{Z}/p$

Esercizio 6:
- Costruire esplicitamente l'immagine di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ tramite il morfismo di Hamilton-Cayley
- Dimostrare che se $G \cong \mathbb{Z}/p^n$ con p primo allora il più piccolo m per cui $\mathbb{Z}/p^n$ si immerge in S_m è proprio p^n. Se p non è primo è ancora vero?

Esercizio 7: Sia $H \triangleleft G$ e sia X un insieme su cui agisce X. Chiamiamo $X^H = \mathrm{Fix}_H(X) = \{x \in X \mid h.x = x \ \forall h \in H\}$. Dimostrare che
- H agisce su X
- G/H agisce su X^H

Esercizio 8: Un azione di G su X si dice TRANSITIVA se $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$ t.c. $g(x) = y$.
- Mostrare che un azione è transitiva se e solo se esiste un'unica orbita
- $|X|$ divide $|G|$

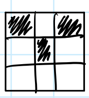
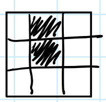
Esercizio 9: FORMULA DI BURNSIDE: Definiamo $X^g = \{x \in X \mid g.x = x\} = \mathrm{Fix}_g(X)$. Seguire i seguenti passi per trovare la formula di Burnside (X, G finiti)

$$\# \text{orbite} = |X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

1) $\displaystyle\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)|$

2) $\displaystyle\sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)| = |G| \cdot \left|\frac{X}{G}\right|$

Esercizio 10: Un esempio Concreto: Sia $G = D_4$ e sia $X = \left\{ \begin{matrix} \text{Scacchiere } 3\times3 \text{ con} \\ \text{caselle nere o bianche} \end{matrix} \right\}$

Esempio  $\in X$  $\in X$ ...

- Osservare che D_4 agisce su X in maniera naturale

- Osservare che D_4 agisce su X in maniera naturale
- Sia $H = \langle r \rangle \lhd D_4$. Descrivere X^H e l'azione vista nell'esercizio 7 di H su X^H.
- Calcolare il numero delle orbite dell'azione descritta con la formula di Burnside. e osservare che questo ci da tutte le possibili colorazioni (a meno di rotazione e specchi) della scacchiera