Algebra 1 - Seconda esercitazione
11/06/2019

Esercizio 1: Sia G un gruppo. G si dice *risolubile* se esiste una catena finita:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n = \{e\}$$

tale che G_i/G_{i+1} sia un gruppo abeliano per ogni $i = 0, ..., n-1$. G si dice *risolubile per commutatori* se la catena:

$$G = G_0 \supset [G_0, G_0] = G_1 \supset [G_1, G_1] = G_2 \supset ... \supset [G_{n-1}, G_{n-1}] = G_n = \{e\}$$

termina in un numero finito di passi. Mostrare che:
(i) Se G e K sono risolubili, allora $G \times K$ è risolubile;
(ii) Se G è risolubile e H è sottogruppo di G, allora H è risolubile;
(iii) G è risolubile se e solo se $[G, G]$ è risolubile;
(iv) G è risolubile se e solo se G è risolubile per commutatori.

Esercizio 2: (i) L'anello $\mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + 1, y^2 - 2x)$ è un dominio?
Sia A anello con unità e sia X un insieme. Sia $X_A = \{f : X \longrightarrow A\}$ con le seguenti operazioni: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Discutere se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(ii) Esiste un morfismo iniettivo da A in X_A.
(iii) Se A è commutativo, allora X_A è commutativo;
(iv) Se A è UFD, allora X_A è UFD.

Esercizio 3: (i) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile e sia $\mathbb{L}$ il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$. Mostrare che se $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$ è dispari, allora tutte le radici di f sono reali.
(ii) Sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile e sia $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(r_1, ..., r_n)$ il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$. Mostrare che se $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q})$ è abeliano, allora $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(r_i)$ per ogni $i = 1, ..., n$ (cioè ogni radice di f è un elemento primitivo).