# Problema dei tre corpi ristretto circolare
# Punti lagrangiani

**Posizione**
I punti lagrangiani sono i punti di equilibrio del problema dei tre corpi ristretto circolare. Per tale problema, le equazioni del moto del terzo corpo nel sistema di riferimento sinodico centrato nel baricentro della binaria sono

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2n\dot{y} + n^2 x - \dfrac{Gm_1}{r_1^3}(x+\mu d) - \dfrac{Gm_2}{r_2^3}(x-(1-\mu)d) \\ \ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2 y - \dfrac{Gm_1}{r_1^3} y - \dfrac{Gm_2}{r_2^3} y \end{cases} \tag{1}$$

dove il parametro $\mu = m_2/(m_1+m_2)$, $m_1$ e $m_2$ sono le masse dei corpi della binaria, $r_1$ e $r_2$ sono le distanze del terzo corpo dai corpi della binaria, e per il moto medio $n$ della binaria vale $n^2 = G(m_1+m_2)/d^3$. Non abbiamo equazioni nella componente $z$, poichè abbiamo considerato una formulazione planare del problema, cioè che il terzo corpo si muove nello stesso piano della binaria.

I punti di equilibrio sono i punti per cui velocità e accelerazione sono nulle (nel sistema di riferimento sinodico). Ponendo quindi $\dot{x} = \dot{y} = 0$, cerchiamo i punti $(x, y)$ che annullano le equazioni differenziali descritte sopra. Dallo studio delle curve di livello dell'integrale primo di Jacobi con velocità nulla, sappiamo che esistono tre punti lagrangiani con $y = 0$ ($L_1$, $L_2$ e $L_3$) e due punti lagrangiani con $y \neq 0$ ($L_4$ e $L_5$).

Iniziamo dal caso $y \neq 0$. Dividendo la seconda equazione per $y$, otteniamo

$$\frac{Gm_1}{r_1^3} = n^2 - \frac{Gm_2}{r_2^3}$$

che sostituito alla prima equazione

$$n^2 x - \left(n^2 - \frac{Gm_2}{r_2^3}\right)(x+\mu d) - \frac{Gm_2}{r_2^3}(x-(1-\mu)d) = 0$$

da cui

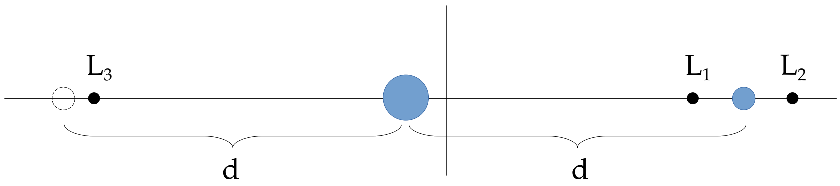
$$n^2 \mu d - \frac{Gm_2}{r_2^3} d = 0 \rightarrow \frac{Gm_2}{d^2} - \frac{Gm_2}{r_2^3} d = 0 \rightarrow r_2 = d$$

Mettendo questo risultato nella seconda equazione, otteniamo ugualmente $r_1 = d$. Questa soluzione ci dice che i punti $L_4$ e $L_5$ formano dei triangoli equilateri con i due corpi della binaria. Tali punti hanno coordinate

$$L_4/L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) d$$

Consideriamo il caso in cui $y = 0$, cioè punti di equilibrio che stanno sulla stessa retta dei corpi della binaria. In questo caso la seconda equazione del moto è automaticamente verificata, mentre la prima diventa

$$n^2 x - \frac{Gm_1}{|x+\mu d|^3}(x+\mu d) - \frac{Gm_2}{|x-(1-\mu)d|^3}(x-(1+\mu)d) = 0$$




che, una volta appurato il segno dei delle quantità dentro il modulo, equivale a cercare le radici di un polinomio di quinto grado. In effetti, non riusciamo a trovare una soluzione analitica esatta di tale equazione.

Possiamo però trovare delle soluzioni approssimate, considerando il caso in cui $m_1 \gg m_2$. In questo caso, infatti, ci aspettiamo che i punti $L_1$ e $L_2$ si trovino vicini alla posizione del corpo secondario, e che $L_3$ si trovi ad una distanza simile al corpo secondario ma dall'altra parte rispetto al primario (si veda la figura).

Cerchiamo il punto $L_1$, che si troverà tra i due corpi della binaria e ad una distanza $D \ll d$ dal corpo secondario. La componente $x$ sarà quindi $-\mu d + d - D > 0$, che una volta sostituita nell'equazione del moto

$$\begin{aligned} n^2(-\mu d + d - D) - \frac{Gm_1}{(d-D)^2} &= -\frac{Gm_2}{D^2} \\ n^2 d\left(1 - \frac{D}{d}\right) - \frac{Gm_1}{d^2}\left(1 + 2\frac{D}{d}\right) &= -\frac{Gm_2}{D^2} \\ -3\frac{Gm_1}{d^2} &= -\frac{Gm_2}{D^2} \implies D = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}d \end{aligned}$$

dove nel membro di sinistra abbiamo trascurato i termini proporzionali a $m_2/d^2$ perchè molto più piccoli della quantità a destra. Quindi le coordinate di $L_1$ sono

$$L_1 = \left(-\mu + 1 - \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}, 0\right) d \approx \left(1 - \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}, 0\right) d$$

Cerchiamo ora il punto $L_2$, che si troverà oltre la posizione del corpo secondario, ad una distanza $D \ll d$ da esso. La componente $x$ sarà quindi $-\mu d + d + D > 0$, che una volta sostituita all'equazione del moto

$$\begin{aligned} n^2(-\mu d + d + D) - \frac{Gm_1}{(d+D)^2} &= \frac{Gm_2}{D^2} \\ n^2 d\left(1 + \frac{D}{d}\right) - \frac{Gm_1}{d^2}\left(1 - 2\frac{D}{d}\right) &= \frac{Gm_2}{D^2} \\ 3\frac{Gm_1}{d^2} &= \frac{Gm_2}{D^2} \implies D = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}d \end{aligned}$$

dove nel membro di sinistra abbiamo trascurato i termini proporzionali a $m_2/d^2$ perchè molto più piccoli della quantità a destra. Quindi le coordinate di $L_1$ sono

$$L_2 = \left(-\mu + 1 + \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}, 0\right) d \approx \left(1 + \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}}, 0\right) d$$

Cerchiamo ora il punto $L_3$, che si troverà dalla parte opposta del corpo secondario, ad una distanza $d - D$ dal corpo primario. La componente $x$ sarà quindi $-\mu d - d + D < 0$, che una volta sostituita all'equazione del moto

$$\begin{aligned}
n^2(-\mu d - d + D) + \frac{Gm_1}{(d-D)^2} &= \frac{Gm_2}{(2d-D)^2} \\
n^2 d\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2} + 1 - \frac{D}{d}\right) + \frac{Gm_1}{d^2}\left(1 + 2\frac{D}{d}\right) &= \frac{Gm_2}{4d^2} \\
-3\frac{Gm_1}{d^3}D &= -\frac{7}{4}\frac{Gm_2}{d^2} \implies D = \frac{7}{12}\frac{m_2}{m_1}d
\end{aligned}$$

Questa volta i termini in $m_2/d^2$ non possono essere trascurati, perchè dello stesso ordine del membro di destra. Quindi le coordinate di $L_3$ sono

$$L_3 = \left(-\mu - 1 + \frac{7}{12}\frac{m_2}{m_1}, 0\right) d \approx \left(-1 - \frac{5}{12}\frac{m_2}{m_1}, 0\right) d$$

**Stabilità**