

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

11 Settembre 2017

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità del punto di equilibrio;
- trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Sia dato il potenziale

$$U(x, y) = \arctan(x^2 - 1) \arctan(1 - y^2)$$

e si consideri il sistema dinamico gradiente

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} ; \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} .$$

- Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità .
- Dimostrare che il quadrato aperto $|x| < 1, |y| < 1$ è positivamente invariante.
- Dimostrare che le rette $x = 0, y = 0, y = x$ e $y = -x$ sono invarianti.

Esercizio 3: Si consideri il problema del moto di un pendolo di massa m e lunghezza ℓ in un piano verticale che viene fatto ruotare con velocità angolare costante Ω attorno ad un asse verticale passante per il punto di sospensione del pendolo, e soggetto ad un'accelerazione di gravità costante verso il basso e di intensità g . Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il pendolo forma con il semiasse negativo delle ordinate (vedi figura).

- Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.
- Scrivere la funzione Hamiltoniana (in funzione del momento p e della coordinata θ) e le equazioni di Hamilton.
- Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, in funzione del parametro $g/(\Omega^2 \ell)$.
- La funzione Hamiltoniana è l'energia del sistema? Se no, calcolare la potenza del motore che fa girare il pendolo.

