CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

7 Giugno 2017

Esercizio 1 Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il seguente sistema dinamico discreto lineare in $\mathbf{R}^3$:

$$X_{k+1} = A\, X_k.$$

a) Si discuta la stabilità del punto fisso.

b) Si determinino tutte le orbite periodiche e il loro periodo. Inoltre calcolare X_{2017} sapendo che la condizione iniziale di partenza è

$$X_0 = (x, y, z)^T = (4, 1, 0)^T.$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -U_x \\ \dot{y} = -U_y \end{cases} \quad , \quad U(x, y) = x\,[(x^2 + y^2)^2 - 4\,x^2]$$

a) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.

b) Tracciare nel piano (x, y) un disegno qualitativo delle soluzioni del sistema (aiutarsi con le curve di livello del potenziale U e con eventuali rette invarianti).

c) Trovare un compatto appartenente al bacino di attrazione per ognuno degli eventuali punti asintoticamente stabili.

d) Si consideri il dato iniziale $(x_0, y_0) = (3, 0)$ e si scriva l'integrale per calcolare il tempo necessario a raggiungere il punto di coordinate $(2, 0)$.

Esercizio 3: In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxz, con asse z verticale ascendente. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi lungo la curva $z = -x^4/4$. Il piano verticale viene fatto ruotare attorno all'asse z con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $g > 0$ diretta verso il basso, ed una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il punto materiale con l'asse z mantenendosi parallela all'asse delle ascisse. Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'ascissa x del punto materiale.

a) Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano, in funzione del parametro adimensionale $J = k/(m\omega^2)$.

c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro J.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x).