CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

10 Aprile 2017

Esercizio 1 Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = A\,X \qquad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3.$$

a) Calcolarne gli esponenti di Lyapunov e discutere la stabilità dell'origine.

b) Trovare esplicitamente la soluzione del sistema con condizione iniziale

$$X_0 = (x, y, z)^T = (-2, 2, -2)^T.$$

Esercizio 2 Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x - \gamma \frac{dx}{dt}.$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = \frac{dx}{dt}$.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, cioè $\gamma > 0$.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.

d) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) nel caso di γ arbitrariamente piccolo, ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare ed evidenziando i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari. Nel caso γ possa essere grande a piacere, per γ sufficientemente grande quale sarebbe il cambiamento qualitativo delle separatrici?

e) Determinare il limite per $t \to +\infty$ dell'orbita con condizioni iniziali $(x_0, y_0) = (1/2, 3/4)$.

Esercizio 3 In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P, Q di ugual massa m vincolati a scorrere su due guide circolari aventi centro in O e raggi r ed $R > r$, rispettivamente (vedi figura). Le due masse sono collegate da un'asta priva di massa in modo che $\widehat{POQ} = \pi/2$. Il punto Q è collegato al punto $A \equiv (0, r)$ da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Infine il sistema viene fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse y. Non si consideri l'accelerazione di gravità.

a) Scrivere la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange utilizzando come parametro lagrangiano l'angolo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ tra il segmento OQ e l'asse y.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, k, R, r, ω.

c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati, in funzione del parametro $J = \frac{kRr}{m\omega^2(R^2-r^2)} (> 0)$.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, θ).