CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

8 Febbraio 2017

Esercizio 1 Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} - \gamma\frac{dx}{dt},$$

con energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^3 + 10x}{1 + x^2}.$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

a) Trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità (motivando la risposta)

b) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = \frac{dx}{dt}$, e determinare le tangenti alle separatrici negli eventuali punti con linearizzato di tipo sella.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio (motivando la risposta) e stabilire l'intervallo di valori di γ per cui tutti i punti di equilibrio di tipo centro del caso $\gamma = 0$ diventano punti di equilibrio di tipo fuoco.

d) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) nel caso di γ piccolo, ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare ed evidenziando i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari.

e) Determinare il limite per $t \to +\infty$ dell'orbita con condizioni iniziali $(x_0, y_0) = (-4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{7\sqrt{5}})$.

Esercizio 2 Si consideri il sistema newtoniano dell'esercizio precedente senza dissipazione ($\gamma = 0$) ed il sistema dinamico continuo ad esso associato.

a) Trasformare il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2}, \qquad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h},$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

b) Caratterizzare i punti fissi del sistema dinamico discreto al variare di h.

Esercizio 3 Sia dato un corpo puntiforme P di massa m, vincolato a muoversi su una guida circolare di raggio R e centro fissato in O nel piano (x, y). Il corpo è collegato da una molla ad un punto Q (privo di massa) che si trova su una seconda guida circolare, complanare alla prima, avente centro in $(0, R/2)$ e raggio $R/2$. La posizione di Q durante il moto è tale che i punti P, Q e $A \equiv (0, R)$ appartengano alla stessa retta. La molla ha lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Sul corpo agisce un'accelerazione costante $g > 0$ diretta verticalmente verso il basso. Inoltre il sistema ruota attorno all'asse verticale ascendente y con velocità angolare costante $\omega > 0$.
Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra la direzione verticale e il segmento AP (si veda la figura).

a) Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale e la funzione di Lagrange.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, R, ω, k, g.

c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati in funzione del parametro $J = \frac{4mg-kR}{m\omega^2 R}$.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, θ).