CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani

21 Dicembre 2016

Esercizio 1 (15 pt) Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione

$$\ddot{x} = x\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right) - \gamma\dot{x}, \qquad \gamma \geq 0,$$

ed il sistema dinamico continuo ad esso associato.

a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2}, \qquad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h},$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

Si consideri il caso $\gamma = 0$.

b) Si calcolino i punti di equilibrio del sistema dinamico continuo e se ne discuta la stabilità; si caratterizzino quindi i punti fissi del sistema dinamico discreto al variare di h.

c) Si trovino i valori di h affinché i punti di equilibrio stabili del sistema dinamico continuo per $x \in [-2\pi, +2\pi]$ siano punti fissi ellittici.

Si consideri il caso $\gamma > 0$ e si assuma che $1 - \gamma h > 0$. Si prenda il solo intervallo $[-2\pi, +2\pi]$.

d) Si mostri che i punti fissi iperbolici del caso $\gamma = 0$ continuano ad essere iperbolici anche nel caso $\gamma > 0$.

e) Si trovi una condizione sufficiente su h affinché i punti di equilibrio asintoticamente stabili del sistema dinamico continuo siano punti fissi con moltiplicatori di Lyapunov < 1 (la condizione deve essere non vuota per ogni γ tale che $1 - \gamma h > 0$).

Esercizio 2 (15 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$z = (x^2 - 1)^2$$

nel piano (x, z), ruotante attorno all'asse verticale ascendente z con velocità angolare costante $\omega > 0$. Supponiamo che il corpo puntiforme sia collegato all'asse z tramite una molla vincolata a rimanere parallela all'asse x durante il moto. La molla ha lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$. Sul corpo agisce un'accelerazione costante $g > 0$ diretta verticalmente verso il basso.

a) Si scrivano la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange utilizzando come parametro lagrangiano l'ascissa x del punto.

b) Si scrivano la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, k, ω, g.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio trovati, in funzione del parametro $J = \frac{k - m\omega^2}{mg}$.

d) Si tracci il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x).

e) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nel piano (p, x) (dove p è il momento coniugato a x) per $J = 3$.