

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

1 Settembre 2016

Esercizio 1 (6 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il sistema dinamico continuo lineare

$$\dot{X} = AX \quad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3.$$

- Calcolarne gli esponenti di Lyapunov e discutere la stabilità dei punti di equilibrio.
- Trovare esplicitamente la soluzione $X(t)$ del sistema con condizione iniziale $X_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ facendo uso della forma canonica di Jordan di A .

Esercizio 2 (14 pt) Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -e^x(2x + x^2) - \gamma \frac{dx}{dt}$$

con γ costante reale positiva.

Si tratti dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

- Caratterizzare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.
- Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) , con $y = dx/dt$.

Si passi quindi al caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo.

- Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.
- Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y) , ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare ed evidenziando i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari.
- Si discetizzi il sistema newtoniano dissipativo con passo h . Scrivere le equazioni della mappa standard (introducendo la variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$). Studiare la stabilità dei punti fissi della mappa assumendo che $1 - \gamma h > 0$, $2h^2 < 1 - \gamma h$.

Esercizio 3 (10 pt) Siano dati tre punti materiali A, B, C di massa m vincolati a muoversi lungo una guida circolare di raggio ℓ . I punti A, B e B, C sono collegati da aste prive di massa e lunghe ℓ . Si consideri un sistema di riferimento $\{O; x, z\}$, con l'origine nel centro della guida e gli assi x e z sul piano della guida come mostrato in figura. Il punto B è soggetto alla forza di una molla di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo nulla. La molla si mantiene parallela all'asse x durante il moto. Sia presente inoltre un'accelerazione rivolta verso il basso di intensità costante $g > 0$.

Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra il semiasse positivo delle ascisse e la posizione del punto B .

- Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.
- Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, ℓ, k, g .
- Discutere la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e tracciare il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, θ) , con $J = \frac{mg}{k\ell}$.
- Tracciare un disegno qualitativo delle orbite nel caso in cui $J = \frac{1}{4}$.

