CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

6 Giugno 2016

Esercizio 1 (14 pt) Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \gamma\frac{dx}{dt}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

con γ costante reale positiva. Per rispondere ai seguenti punti si consideri $x \in [-4\pi, 4\pi]$.
Si tratti dapprima il caso senza dissipazione, cioè $\gamma = 0$.

a) Caratterizzare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità.

b) Dopo aver disegnato il grafico dell'energia potenziale $V(x) = -\int f(x)dx$, tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = dx/dt$ (nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$).

c) Calcolare le tangenti alle separatrici stabile e instabile negli eventuali punti con linearizzato di tipo sella.

Si passi quindi al caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo. In particolare si assuma che $\gamma^2 < 4\frac{\sin x^*}{x^*}$, con $x^* = \frac{11\pi}{4}$.

d) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.

e) Tracciare un disegno qualitativo delle soluzioni nel piano (x, y), con $y = dx/dt$, ponendo in risalto le separatrici dei punti di sella nonlineare ed evidenziando i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari (nell'intervallo $[-4\pi, 4\pi]$).

f) Dimostrare che il punto $(x, y) = (\pi, 0)$ fa parte del bacino di attrazione di un pozzo usando il teorema della funzione di Lyapunov decrescente.

Esercizio 2 (8 pt) Sia dato il sistema newtoniano con dissipazione dell'esercizio precedente.

a) Si trasformi il sistema in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2}, \qquad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h},$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

Si consideri il caso $\gamma = 0$.

b) Dopo aver determinato i punti fissi del sistema dinamico discreto, si determini se essi sono iperbolici o ellittici al variare di h.

c) Quali sono i valori di h per i quali tutti i punti di equilibrio di tipo centro del sistema dinamico continuo (con $\gamma = 0$) sono punti fissi ellittici del sistema dinamico discreto?

Si consideri il caso $\gamma > 0$ e si assuma che $1 - \gamma h > 0$.

d) Determinare per quali valori di h i massimi dell'energia potenziale $V(x)$ sono punti fissi iperbolici.

Esercizio 3 (10 pt) Siano dati due punti materiali A, B alle due estremità di un'asta priva di massa e lunga 2ℓ. I punti sono vincolati a muoversi lungo una guida circolare di raggio ℓ. La massa di B è uguale a m, mentre la massa di A è uguale a αm, con $\alpha > 0$. Si consideri un sistema di riferimento $\{O; x, z\}$, con l'origine nel centro della guida e gli assi x e z sul piano della guida. La guida ruota attorno all'asse z con velocità angolare costante $w > 0$ come mostrato in figura. Le masse in A, B sono soggette ad un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità $g > 0$.
Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra il semiasse positivo delle ascisse e la posizione del corpo A.

a) Ponendosi nel sistema di riferimento ruotante $\{O; x, z\}$, scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale. Scrivere la funzione di Lagrange.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano.

c) Si ponga $\alpha = 2$ e si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro $J = -\frac{g}{3\,\omega^2 \ell}$.

d) Sempre con $\alpha = 2$ tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, θ).