CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani

11 Aprile 2016

Esercizio 1 (6 pt) Sia data la seguente matrice 3×3 a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = A\,X \qquad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3.$$

a) Se ne calcolino gli esponenti di Lyapunov e si discuta la stabilità dell'origine.

b) Si trovi esplicitamente la soluzione del sistema con condizione iniziale

$$X_0 = (x, y, z)^T = (-2, -1, 2)^T.$$

Esercizio 2 (12 pt) Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = 8\,y^2x - 8\,x \\ \dot{y} = -4\,y^3 + 2\,y + 8\,x^2y. \end{cases}$$

a) Verificare che si tratta di un sistema gradiente e trovare la corrispondente funzione potenziale $U(x,y)$ in maniera che $U(0,0) = 0$. Tracciare la curva di livello $U(x,y) = 0$ e individuare gli aperti in cui U è maggiore di 0 e gli aperti in cui U è minore di 0.

b) Trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.

c) Verificare che gli assi coordinati sono rette invarianti e tracciare le separatrici dei punti di sella.

d) Tracciare un disegno qualitativo delle orbite e determinare i bacini di attrazione dei pozzi nonlineari.

Esercizio 3 (12 pt) Sia dato un corpo puntiforme di massa m, vincolato a muoversi sulla curva di equazione

$$z = x^2 + 2$$

nel piano verticale, ruotante attorno all'asse z con velocità angolare costante $\omega > 0$. Supponiamo che il corpo puntiforme sia collegato all'asse x tramite una molla vincolata a rimanere verticale durante il moto. La molla ha lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$.

a) Scrivere la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange utilizzando come parametro lagrangiano l'ascissa x del punto.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, k, ω.

c) Discutere la stabilità dei punti di equilibrio trovati, in funzione del parametro $J = \frac{m\omega^2}{2k}$.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio nel piano (J, x).