CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani

11 Gennaio 2016

Esercizio 1 (15 pt) Si consideri il sistema newtoniano con dissipazione

$$\ddot{x} = x^3 - 3x^2 + 2x - \gamma \dot{x}, \qquad \gamma \geq 0.$$

a) Si trasformi il sistema in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro

$$D^2 x(kh) = \frac{\Delta_0^2 x_k}{h^2}, \qquad Dx(kh) = \frac{\Delta_- x_k}{h},$$

e successivamente in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

Si consideri il caso $\gamma = 0$:

b) Si trovino delle condizioni necessarie e sufficienti su h affinché i punti di equilibrio stabili del sistema continuo siano punti fissi con moltiplicatori di Lyapounov pari a 1.

Si consideri il caso $\gamma > 0$:

c) Si assuma che $1 - \gamma h > 0$ e $h < 1$. Si trovino eventuali punti fissi iperbolici, ellittici e di tipo pozzo del sistema discreto.

d) Nel caso in cui $1 - \gamma h > 0$ e $h = 2$, analizzare le proprietà di stabilità dei punti fissi del sistema discreto.

Esercizio 2 (15 pt) Sia dato un pendolo nel piano (x, z) formato da un corpo puntiforme di massa m collegato all'origine O del sistema di riferimento da un'asta priva di massa di lunghezza ℓ. Supponiamo che il corpo sia soggetto ad un'accelerazione di gravità, rivolta verso il basso, di intensità g, e alla forza di richiamo di una molla di costante elastica k con estremo libero di scorrere lungo l'asse x e vincolata a rimanere parallela all'asse z. Ipotizziamo che il sistema venga fatto ruotare con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse verticale z (si veda la figura). Si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo θ misurato dal semiasse negativo delle z all'asta del pendolo.

a) Si scrivano l'energia cinetica, l'energia potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, ℓ, g, k e ω.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio in funzione dei parametri e si tracci il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio nel piano (J, θ), con $J = \frac{mg}{k\ell + m\omega^2\ell}$.

d) Si tracci un disegno qualitativo delle orbite nei casi principali.