# CORSO DI SISTEMI DINAMICI
# COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

19 Dicembre 2014

**Esercizio 1 (15 pt)** Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà con dissipazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 1 - x^2 - \gamma\,\frac{dx}{dt}$$

dove $\gamma > 0$.

a) Calcolare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

b) Trasformare il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:

$$D^2x(kh) \simeq \frac{\Delta_0^2\, x_k}{h^2} \quad ; \quad Dx(kh) \simeq \frac{\Delta_- x_k}{h} \quad ;$$

e in un sistema dinamico discreto usando come variabile $y_k = x_k - x_{k-1}$.

c) Trovare i punti fissi del sistema dinamico discreto e calcolare la linearizzazione del sistema in tali punti.

d) Nelle ipotesi $0 < \gamma < 1$ e $0 < h < 1$, dimostrare che $(-1, 0)$ è un punto fisso iperbolico.

e) Nelle ipotesi $0 < \gamma < 1$ e $0 < h < 1$, trovare una condizione su $h$ in modo che in $(1, 0)$ i moltiplicatori di Lyapunov siano minori di 1.

f) Supponendo $0 < \gamma < 1$, trovare un valore $h_0$ tale che gli autovalori del linearizzato in $(1, 0)$ siano complessi coniugati per $0 < h < h_0$.

**Esercizio 2 (15 pt)** In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento $Oxz$, con asse $z$ verticale ascendente. Si consideri un punto materiale di massa $m$ vincolato alla curva $z = -x^4/4$. Il piano verticale viene fatto ruotare attorno all'asse $z$ con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $g$ diretta verso il basso, ed una molla di costante elastica $k$ e lunghezza a riposo nulla collega il punto materiale con l'asse $z$ mantendosi parallela all'asse delle ascisse. Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'ascissa $x$ del punto materiale.

a) Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.

b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) $k, m, g, \omega$.

c) Si introduca il parametro $J = k/(m\,\omega^2)$: discutere la stabilità dei punti di equilibrio in funzione del parametro $J$.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri utilizzando il parametro $J$.