CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

1 Settembre 2014

Esercizio 1: Sia dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a) Trovare gli esponenti di Lyapounov e discutere la stabilità del punto di equilibrio.

b) Trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,(r-1)\,(r-2) - y \\ \dot{y} &= y\,(r-1)(r-2) + x \end{cases} ,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Trovare i punti di equilibrio,

b) dimostrare che esistono due orbite periodiche,

c) descrivere gli insiemi α-limite e ω-limite di tutte le orbite.

Esercizio 3: In un piano verticale con coordinate x, y (l'asse y è verticale ascendente, vedi figura) si consideri il sistema meccanico costituito da due corpi puntiformi di ugual massa m situati nei punti A e B rispettivamente. Il punto A è l'estremo di un'asta di lunghezza ℓ e massa trascurabile, libera di ruotare nel piano con l'altro estremo fissato nell'origine; tale punto è inoltre collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, vincolata a rimanere orizzontale e con l'altro estremo libero di scorrere sull'asse y. Il punto B è al centro di un disco di raggio R e massa trascurabile: il disco è tangente all'asta e all'asse x e scorre senza attrito sia sull'asta che sull'asse x. Inoltre i corpi puntiformi sono soggetti ad un'accelerazione di gravità di intensità g.

Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra l'asse x e l'asta, con $0 < a < \theta < \pi$ (a è il valore per cui il disco perde il contatto con l'asta).

a) Scrivere la lagrangiana del sistema.

b) Scrivere la hamiltoniana del sistema e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano in funzione dei parametri m, g, k, ℓ, R.

c) Determinare la stabilità dei punti di equilibrio.

d) Tracciare il diagramma di biforcazione degli equilibri in funzione del parametro $J = \frac{mg}{k\ell}$.