

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

19 Giugno 2014

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- trovare gli esponenti di Lyapounov, discutere la stabilità del punto di equilibrio;
- scrivere il flusso integrale;
- trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2: Si consideri il sistema gradiente

$$\begin{cases} \dot{x} = -U_x \\ \dot{y} = -U_y \end{cases}, \quad U(x, y) = x(x^2 + 2x + y^2)(x^2 - 2x + y^2)$$

- Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- Analizzare, tracciando un disegno qualitativo, le traiettorie del sistema.
- Descrivere il bacino di attrazione di eventuali punti asintoticamente stabili.

- c) Si consideri il dato iniziale $(x_0, y_0) = (3, 0)$ e si scriva la quadratura per il calcolo del tempo necessario a raggiungere il punto di coordinate $(2, 0)$ (facoltativo: si calcoli tale tempo).

Esercizio 3: Sia dato un corpo puntiforme di massa m , vincolato a muoversi su di un'elica circolare di equazione

$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \\ z = s \end{cases} \quad \text{con } s = s(t) \in \mathbf{R}.$$

Il vincolo viene fatto ruotare (da una forza esterna al sistema) con velocità angolare costante $\omega > 0$ attorno all'asse verticale z . Sul sistema agiscono la forza di gravità, rivolta verso il basso e di accelerazione g , ed un campo di forze costante, di intensità $F > 0$ e diretto come l'asse x .

- a) Scrivere l'energia cinetica e quella potenziale, la lagrangiana e l'equazione di Lagrange.
- b) Scrivere la hamiltoniana del sistema e le equazioni di Hamilton.
- c) Trovare i punti di equilibrio del sistema hamiltoniano e discuterne la stabilità al variare dei parametri reali positivi m, g, F, ω .