

CORSO DI SISTEMI DINAMICI

COMPITO D'ESAME

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

17 Gennaio 2014

Esercizio 1: Sia data l'equazione alle differenze finite

$$x_{k+2} = -x_{k+1} - \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}$$

- a) Esprimere la soluzione in funzione delle condizioni iniziali x_0, x_1 .
- b) Discutere il comportamento asintotico delle soluzioni.

Esercizio 2: Sia dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(x^2 - 9)(4 - x^2) - \gamma \frac{dx}{dt}$$

Si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con $\gamma = 0$:

- a) trovare i punti di equilibrio e determinarne la stabilità;
- b) tracciare qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia.

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con $\gamma > 0$ ma piccolo:

- c) determinare la stabilità dei punti di equilibrio;
- d) tracciare qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e i bacini di attrazione dei pozzi.

Esercizio 3: Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali P_1 , P_2 , di ugual massa m , vincolati a stare in un piano verticale Oxy e collegati tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile e lunghezza R . Il punto P_1 è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio R centrata nell'origine O ed il punto P_2 è vincolato a muoversi sull'asse x . L'intero sistema è messo in rotazione attorno all'asse Oy con velocità angolare costante di modulo ω . Sul sistema agisce la forza di gravità (diretta verso il basso, con accelerazione di gravità avente modulo pari a g). Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il vettore OP_1 forma con la direzione verticale discendente (supposto crescente in senso antiorario).

- a) Scrivere l'energia cinetica, l'energia potenziale, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.
- b) Scrivere la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e trovare i punti di equilibrio del sistema dinamico hamiltoniano al variare dei parametri m, g, R, ω .
- c) Al variare dei parametri m, g, R, ω discutere la stabilità dei punti di equilibrio. Se presente una biforcazione, individuare un opportuno parametro di biforcazione e tracciare il relativo diagramma.