CORSO DI SISTEMI DINAMICI
COMPITO PARZIALE no. 2

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

20 Dicembre 2013

Esercizio 1: Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\tan x - \gamma\frac{dx}{dt}$$

con $\gamma > 0$ un parametro, esso ha nel punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ un punto di equilibrio stabile per $|\gamma| < 2$.

a) Si trasformi il sistema newtoniano in un'equazione alle differenze finite del secondo ordine con passo $h > 0$ usando l'approssimazione delle differenze centrali seconde e della differenza prima all'indietro:

$$D^2 \simeq \frac{\Delta_0^2}{h^2} \quad ; \quad D \simeq \frac{\Delta_-}{h}$$

e quindi in un sistema dinamico discreto usando come seconda variabile la differenza prima all'indietro $y_k = x_k - x_{k-1}$.

b) Si trovino i punti fissi del sistema dinamico discreto e se ne calcoli la linearizzazione.

c) Si trovi per quali valori di γ i punti fissi hanno autovalori complessi con moltiplicatori di Lyapounov < 1; si noti che l'insieme di tali valori di γ dipende da h, e per $h \to 0$ tende all'intervallo $|\gamma| < 2$.

Esercizio 2: In un piano verticale Oxz (con asse Oz verticale ascendente) un'asta di lunghezza l e massa trascurabile è vincolata a ruotare attorno ad un asse passante per un'estremo incernierato nell'origine. All'altro estremo è appeso un punto P di massa m, il quale è collegato al punto $Q\,(l,0)$ da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia $\theta \in [0, 2\,\pi)$ l'angolo che OP forma con la verticale discendente.

a) Si scrivano l'energia cinetica e quella potenziale in funzione di $(\theta, \dot{\theta})$, la funzione di Lagrange e l'equazione di Lagrange.

b) Si scriva la funzione di Hamilton, le equazioni di Hamilton e si trovino i punti di equilibrio del sistema dinamico Hamiltoniano, in funzione dei parametri (reali positivi) m, g, l, k.

c) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio di cui al punto b), sempre in funzione dei parametri.

L'intero sistema viene messo in rotazione attorno all'asse Oz con velocità angolare costante ω.

d) Scrivere la nuova funzione di Lagrange.

e) Sia $k/m = l/g = \omega = 1$. Provare che esiste un equilibrio relativo θ_0 nell'intervallo $[0, \pi/2)$.