

# CORSO DI SISTEMI DINAMICI

## COMPITO PARZIALE no. 1

Prof. Andrea Milani - Dott. Giacomo Tommei

15 Novembre 2013

**Esercizio 1:** Sia data la seguente matrice  $3 \times 3$  a coefficienti reali

$$\begin{bmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ 2 & h & -1/2 \\ 3 & 1/2 & h \end{bmatrix}$$

con  $h$  parametro reale.

Si consideri il seguente sistema dinamico continuo lineare:

$$\dot{X} = A X \quad X, \dot{X} \in \mathbf{R}^3$$

- Calcolare gli esponenti di Lyapunov e discutere, al variare del parametro reale  $h$ , gli equilibri del sistema dinamico e la loro stabilità.
- Sia  $h = 2$ , scrivere il flusso integrale e trovare la soluzione particolare con condizioni iniziali  $X_0 = (x, y, z)^T = (1, 1, -1)^T$ .

Si consideri adesso il sistema dinamico discreto lineare in  $\mathbf{R}^3$

$$X_{k+1} = A X_k$$

e si supponga che  $h \neq 1$ .

- Discutere, al variare del parametro  $h$ , la stabilità del punto fisso.
- Sia  $h = 0$  ed il dato iniziale valga  $X_0 = (x, y, z)^T = (0, -1, 1)^T$ : trovare l' $\omega$ -limite dell'orbita.

**Esercizio 2:** Dato il sistema dinamico newtoniano ad un grado di libertà:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x^3 - x - \gamma \frac{dx}{dt}$$

si consideri dapprima il caso senza dissipazione, cioè con  $\gamma = 0$ :

- a) si trovino i punti di equilibrio e se ne determini la stabilità;
- b) si traccino qualitativamente le linee di livello dell'integrale dell'energia;
- c) si descrivano l'insieme  $\alpha$ -limite e quello  $\omega$ -limite dell'orbita con condizioni iniziali  $x = 1/2, y = dx/dt = 0$ .

Si consideri quindi il caso con dissipazione, con  $\gamma > 0$  ma piccolo:

- d) si determini la stabilità dei punti di equilibrio;
- e) si traccino qualitativamente le separatrici dei punti di sella nonlineare e si tratteggi il bacino di attrazione del pozzo;
- f) si dimostri che l'orbita con condizioni iniziali  $x = 1/2, y = dx/dt = 0$  ha limite per  $t \rightarrow +\infty$ .