Secondo compitino di Meccanica Razionale
30 Maggio 2023

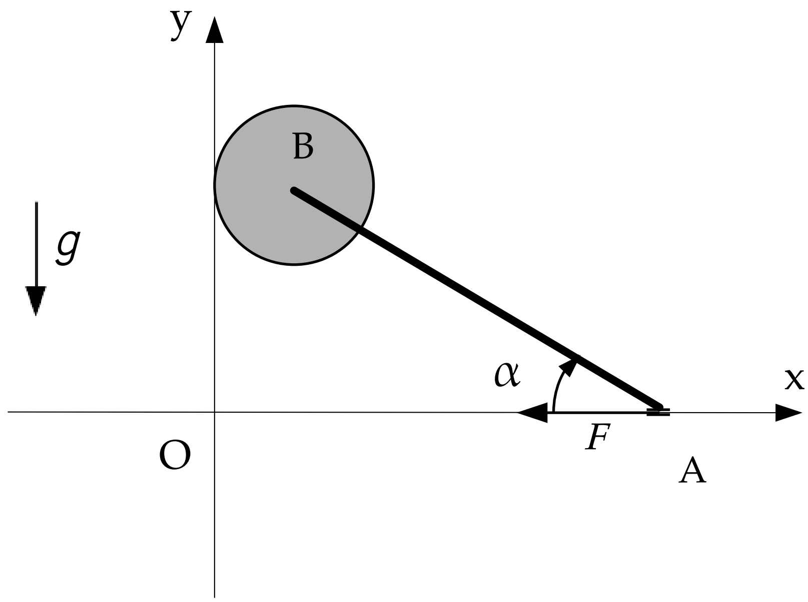
Esercizio 1. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Si consideri il sistema formato da un'asta $\mathcal{A}$ omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ, e da un disco $\mathcal{D}$ omogeneo di massa M e raggio R. Il disco rotola senza strisciare sull'asse Oy, mentre l'asta ha l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse Ox e l'estremo B incernierato al baricentro del disco $\mathcal{D}$. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione $g > 0$, diretta verso il basso. Inoltre, una forza costante $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_1$ (con $F > 0$) è applicata sull'estremo A dell'asta. Infine, supponiamo che il vincolo in A sia liscio.

Si usi come coordinata l'angolo α che AB forma con la direzione orizzontale (si veda la figura).

i) Calcolare l'energia cinetica del sistema.

ii) Calcolare le equazioni di moto del sistema mediante le equazioni cardinali.

iii) Calcolare la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Lagrange.



Esercizio 2. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1, P_2 di massa m collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso (parallela all'asse z).
Il punto P_1 si muove sulla circonferenza di raggio r definita da

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 = r^2, \ z = 0\}$$

mentre il punto P_2 si muove sulla circonferenza di raggio r definita da

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y, z) \ : \ y^2 + z^2 = r^2, \ x = 0\}$$

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo α che il punto P_1 descrive sulla circonferenza $\mathcal{C}_1$, assumendo $\alpha = 0$ quando P_1 si trova nel punto di coordinate $(x, y, z) = (r, 0, 0)$, e l'angolo β che il punto P_2 descrive sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$, assumendo $\beta = 0$ quando P_2 si trova nel punto di coordinate $(x, y, z) = (0, r, 0)$.

i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.

ii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Esercizio 1.

i) Sia P il punto di contatto del disco con l'asse Oy e M il baricentro dell'asta, abbiamo che:

$$\begin{aligned} (A-O) &= (R+2\ell\cos\alpha)\mathbf{e}_1, & (P-O) &= 2\ell\sin\alpha\mathbf{e}_2, \\ (B-O) &= R\mathbf{e}_1 + 2\ell\sin\alpha\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_B &= 2\ell\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_2 \\ (M-O) &= (R+\ell\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + \ell\sin\alpha\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_M &= \ell\dot\alpha(-\sin\alpha\mathbf{e}_1+\cos\alpha\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

La velocità angolare di $\mathcal{A}$ è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}} = -\dot\alpha\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo α rispetto ad Oxy (il segno meno è dovuto al verso con cui è misurato α). Per il disco basta applicare la formula fondamentale della cinematica rigida, imponendo che $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} = 0$.

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_B = \cancel{\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})}} + \omega^{\mathcal{D}}\mathbf{e}_3 \times (B-P) \\ 2\ell\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_2 = \omega^{\mathcal{D}}R\mathbf{e}_2 \;\rightarrow\; \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = (2\ell/R)\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_3 \end{gathered}$$

L'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche dei due corpi, che possiamo calcolare con il teorema di Konig (nota che $I^{\mathcal{A}}_{33,M} = (1/3)m\ell^2$ e che $I^{\mathcal{D}}_{33,B} = (1/2)MR^2$)

$$\begin{gathered} \mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathcal{A}} + \mathcal{T}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_M|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}}\cdot I^{\mathcal{A}}_M\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}}\cdot I^{\mathcal{D}}_B\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = \\ \frac{2}{3}m\ell^2\dot\alpha^2 + 3M\ell^2\dot\alpha^2\cos^2\alpha \end{gathered}$$

ii) Le reazioni vincolari in A e P sono della forma:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Phi}_A = \cancel{\Phi^x_A\mathbf{e}_1} + \Phi^y_A\mathbf{e}_2 = \Phi^y_A\mathbf{e}_2 \\ \boldsymbol{\Phi}_P = \Phi^x_P\mathbf{e}_1 + \Phi^y_P\mathbf{e}_2 \end{gathered}$$

dove ho usato l'ipotesi di vincolo liscio in A. Non riesco a trovare un'equazione che sia direttamente pura, quindi devo prima risolvere anche per (alcune) reazioni vincolari. Esistono diverse strade per risolvere l'esercizio, noi scegliamo questa:
- Calcolo la seconda equazione cardinale con polo B per il solo disco:

$$\dot{\mathbf{M}}^{\mathcal{D}}_B = \cancel{-\mathbf{v}_B \times M\mathbf{v}_B} + \mathbf{N}^{\mathcal{D}}_B$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione cardinale:

$$\begin{gathered} \mathbf{M}^{\mathcal{D}}_B = M\cancel{(B-B)\times\mathbf{v}_B} + I_B\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = MR\ell\dot\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{M}}^{\mathcal{D}}_B = MR\ell(\ddot\alpha\cos\alpha - \dot\alpha^2\sin\alpha)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{N}^{\mathcal{D}}_B = \cancel{(B-B)\times(-Mg\mathbf{e}_2)} + (P-B)\times(\Phi^x_P\mathbf{e}_1+\Phi^y_P\mathbf{e}_2) = -R\Phi^y_P\mathbf{e}_3 \end{gathered}$$

Da cui proiettando lungo $\mathbf{e}_3$ ottengo Φ_P^y

$$\Phi_P^y = -M\ell(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha)$$

- Calcolo la prima equazione cardinale già proiettata lungo $\mathbf{e}_2$:

$$(m\mathbf{a}_M + M\mathbf{a}_B)\cdot\mathbf{e}_2 = -(M+m)g + \Phi_A^y + \Phi_P^y$$
$$(m+2M)\ell(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) = -(M+m)g + \Phi_A^y + \Phi_P^y$$

Da cui, una volta sostituito Φ_P^y, ottengo Φ_A^y

$$\Phi_A^y = (m+3M)\ell(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) + (M+m)g$$

- Calcolo la seconda equazione cardinale con polo B per la sola asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B^{\mathcal{A}} = -\mathbf{v}_B\times m\mathbf{v}_M + \mathbf{N}_B^{\mathcal{A}}$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione cardinale:

$$\mathbf{M}_B^{\mathcal{A}} = m(M-B)\times\mathbf{v}_M + I_M^{\mathcal{A}}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}} = \left(m\ell^2\dot{\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (1/3)m\ell^2\dot{\alpha}\right)\mathbf{e}_3$$
$$\dot{\mathbf{M}}_B^{\mathcal{A}} = m\ell^2\left(-(1/3)\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 4\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\alpha\right)\mathbf{e}_3$$
$$-\mathbf{v}_B\times m\mathbf{v}_M = -2m\ell^2\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\alpha\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{N}_B^{\mathcal{A}} = (M-B)\times(-mg\mathbf{e}_2) + (A-B)\times(-F\mathbf{e}_1 + \Phi_A^y\mathbf{e}_2) = (-mg\ell\cos\alpha - 2F\ell\sin\alpha + 2\ell\cos\alpha\Phi_A^y)\mathbf{e}_3$$

Da cui l'equazione completa proiettata lungo $\mathbf{e}_3$ è uguale a

$$m\ell^2(-(4/3)\ddot{\alpha} + 2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha) + mg\ell\cos\alpha + 2F\ell\sin\alpha - 2\ell\cos\alpha\Phi_A^y = 0$$

e sostituendo la reazione vincolare, troviamo l'equazione di moto:

$$-\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} - 6M\ell^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha + 6M\ell^2\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha - (2M+m)\ell g\cos\alpha + 2F\ell\sin\alpha = 0$$

iii) Calcolo l'energia potenziale del sistema (gravitazionale più forza $\mathbf{F}$)

$$\mathcal{V} = (2M+m)\ell g\sin\alpha + F(R + 2\ell\cos\alpha)$$

Eliminando i termini costanti che non contribuiscono alle equazioni di Lagrange e prendendo l'energia cinetica calcolata nel punto i), ottengo

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\alpha}^2 + 3M\ell^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha - (2M+m)\ell g\sin\alpha - 2F\ell\cos\alpha$$

Calcolo le componenti dell'equazione di Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\alpha} + 6M\ell^2\dot{\alpha}\cos^2\alpha$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} + 6M\ell^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - 12M\ell^2\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = -6M\ell^2\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha - (2M+m)\ell g\cos\alpha + 2F\ell\sin\alpha$$

L'equazione completa quindi è

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\alpha} + 6M\ell^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - 6M\ell^2\dot{\alpha}^2\cos\alpha\sin\alpha + (2M+m)\ell g\cos\alpha - 2F\ell\sin\alpha = 0$$

che a meno del segno è la stessa trovata nel punto ii).

Esercizio 2.

i) Le coordinate dei due punti materiali sono

$$(P_1 - O) = r\cos\alpha\mathbf{e}_1 + r\sin\alpha\mathbf{e}_2, \qquad (P_2 - O) = r\cos\beta\mathbf{e}_2 + r\sin\beta\mathbf{e}_3$$

Calcolo l'energia potenziale del sistema (gravitazionale più elastica):

$$\mathcal{V} = mgr\sin\beta + \frac{1}{2}k|P_1 - P_2|^2 = mgr\sin\beta + \frac{1}{2}kr^2\left(\cos^2\alpha + (\sin\alpha - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta\right)$$

Eliminando i termini costanti, che non contribuiscono alle equazioni di Lagrange, ottengo:

$$\mathcal{V} = mgr\sin\beta - kr^2\sin\alpha\cos\beta$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\alpha} = -kr^2\cos\alpha\cos\beta = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\beta} = mgr\cos\beta + kr^2\sin\alpha\sin\beta = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è verificata nel caso $\cos\alpha = 0$ o $\cos\beta = 0$ (le due non possono essere verificate simultanemanete perchè se no la seconda equazione del sistema non ha soluzioni).
- Nel caso $\cos\beta = 0$ (e $\cos\alpha \neq 0$) ho che $\beta = \pi/2$ oppure $\beta = 3\pi/2$. In entrambi i casi la seconda equazione si riduce a $\sin\alpha = 0$. Otteniamo quindi le prime quattro configurazioni di equilibrio

$$(\alpha, \beta) = (0, \pi/2),\ (0, 3\pi/2),\ (\pi, \pi/2),\ (\pi, 3\pi/2)$$

- Nel caso $\cos\alpha = 0$ (e $\cos\beta \neq 0$) ho che $\alpha = \pi/2$ oppure $\alpha = 3\pi/2$. Introduco il parametro adimensionale $J = mg/(kr)$, la seconda equazione diventa
1) se $\alpha = 3\pi/2$, $J\cos\beta - \sin\beta = 0$, da cui otteniamo $\tan\beta = J$, le cui soluzioni sono $\beta^* = \arctan J$ e $\pi + \beta^*$
2) se $\alpha = \pi/2$, $J\cos\beta + \sin\beta = 0$, da cui otteniamo $\tan\beta = -J$, le cui soluzioni sono $-\beta^*$ e $\pi - \beta^*$
Otteniamo quindi le ultime quattro configurazioni di equilibrio (nota che $\beta^* \in (0, \pi/2)$)

$$(\alpha, \beta) = (\pi/2, -\beta^*),\ (\pi/2, \pi - \beta^*),\ (3\pi/2, \beta^*),\ (3\pi/2, \pi + \beta^*)$$

ii) Per studiare la stabilità delle configurazioni calcolo la matrice hessiana di $\mathcal{V}$.

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(\alpha,\beta)^2} = kr^2 \begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & -J\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

e la valuto nelle configurazioni di equilibrio. Dal segno degli autovalori λ_1 e λ_2 possiamo ricavare le propreità di stabilità dei punti.

$$\mathcal{V}''(0,\pi/2) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -J \end{bmatrix} \quad \mathcal{V}''(0,3\pi/2) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & J \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{V}''(\pi,\pi/2) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -J \end{bmatrix} \quad \mathcal{V}''(\pi,3\pi/2) = kr^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & J \end{bmatrix}$$

in tutti quattro i casi det $= -(kr^2)^2$
det $< 0 \implies$ esiste $\lambda_i < 0 \implies (0,\pi/2),\ (0,3\pi/2),\ (\pi,\pi/2),\ (\pi,3\pi/2)$ instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi/2,-\beta^*) = \mathcal{V}''(3\pi/2,\pi+\beta^*) = kr^2 \begin{bmatrix} \cos\beta^* & 0 \\ 0 & J\sin\beta^* + \cos\beta^* \end{bmatrix} = kr^2\cos\beta^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2+1 \end{bmatrix}$$

La matrice è in forma diagonale, quindi possiamo leggere direttamente il segno degli autovalori. Siccome $\cos\beta^* > 0$, abbiamo che $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (\pi/2,-\beta^*)$ e $(3\pi/2,\pi+\beta^*)$ stabili per teorema di Lagrange-Dirichilet

$$\mathcal{V}''(\pi/2,\pi-\beta^*) = \mathcal{V}''(3\pi/2,\beta^*) = kr^2 \begin{bmatrix} -\cos\beta^* & 0 \\ 0 & -J\sin\beta^* - \cos\beta^* \end{bmatrix} = kr^2\cos\beta^* \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -J^2-1 \end{bmatrix}$$

La matrice è in forma diagonale, quindi possiamo leggere direttamente il segno degli autovalori. Siccome $\cos\beta^* > 0$, abbiamo che $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (\pi/2,\pi-\beta^*)$ e $(3\pi/2,\beta^*)$ instabili perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.