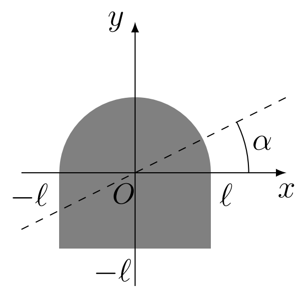
Primo compitino di Meccanica Razionale
29 Aprile 2022

Esercizio 1. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri il corpo rigido omogeneo di massa m mostrato in figura, formato da un semidisco di centro O e raggio $\ell > 0$ e da metà di una lamina quadrata di lato 2ℓ.

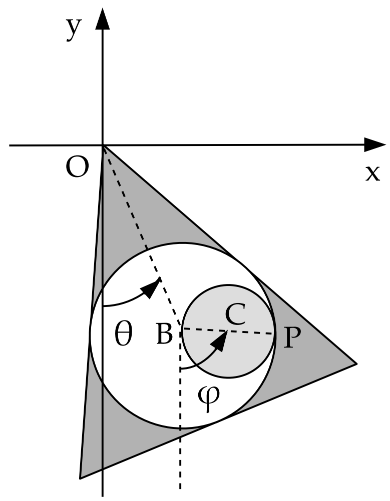


i) Trovare un riferimento principale di inerzia centrato in O e calcolare i momenti principali di inerzia;

ii) calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse giacente nel piano Oxy, passante per O e che forma un angolo α con l'asse Ox.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Prendiamo una lamina T omogena di massa M: la lamina ha la forma di un triangolo equilatero a cui è stato fatto un foro circolare di raggio R, centrato nel baricentro del triangolo e tangente ai suoi tre lati. Si consideri il sistema formato dalla lamina T, con uno dei vertici incernierato all'origine O degli assi, e da un disco omogeneo $\mathcal{D}$ di massa m e raggio $R/2$, che rotola senza strisciare sul bordo interno della lamina. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

Chiamiamo B il centro di massa della lamina T, C il centro di massa del disco $\mathcal{D}$ e P il punto di contatto tra il disco e la lamina. Si usino come coordinate l'angolo θ che OB forma con la direzione verticale e l'angolo φ che BP forma con la direzione verticale (si veda la figura).



Si chiede di

a) calcolare i momenti principali di inerzia della lamina T rispetto al suo baricentro;

b) calcolare la velocità angolare del disco $\mathcal{D}$;

c) scrivere la seconda equazione cardinale per il sistema completo usando come polo O.

Esercizio 1.

i) Il riferimento riportato in figura è principale di inerzia, in quanto: $\mathbf{e}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano; $\mathbf{e}_1$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano yz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna, dove già gli altri due sono direzioni principali. Perciò la matrice di inerzia I in questo sistema di riferimento sarà diagonale.
Per prima cosa cerco la relazione tra la massa m e la densità costante σ. L'area del corpo rigido è

$$A = \frac{1}{2}\pi\ell^2 + 2\ell^2$$

Quindi la massa

$$m = \frac{1}{2}\sigma\ell^2(\pi + 4)$$

Posso calcolare i momenti principali di inerzia della figura partendo dai momenti principali di inerzia di figure note. Considero prima il semidisco e poi il semiquadrato. Poichè i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} sono invarianti per le trasformazioni

$$(x, y) \to (-x, y) \quad \text{e} \quad (x, y) \to (x, -y)$$

i corripondenti momenti di inerzia del semidisco (o del semiquadrato) sono esattamente la metà di quelli del disco (o del quadrato) rispetto al polo O, che è anche il baricentro delle due figure intere (cerchio e quadrato). Quindi per il semidisco abbiamo:

$$I_{11}^{\text{sd}} = I_{22}^{\text{sd}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}m^{\text{d}}\ell^2\right) = \frac{1}{8}\sigma\pi\ell^4$$

e per il semiquadrato

$$I_{11}^{\text{sq}} = I_{22}^{\text{sq}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m^{\text{q}}4\ell^2\right) = \frac{2}{3}\sigma\ell^4$$

Sommando i due contributi, ottengo che per il corpo rigido in esame abbiamo

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{8}\sigma\pi\ell^4 + \frac{2}{3}\sigma\ell^4 = \frac{1}{12}\frac{3\pi + 16}{\pi + 4}m\ell^2$$

e poichè è una figura piana vale che

$$I_3 = I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{1}{6}\frac{3\pi + 16}{\pi + 4}m\ell^2$$

ii) Poichè $I_1 = I_2$, tutte le rette nel piano passanti per O sono principali di inerzia, quindi il momento di inerzia rispetto all'asse richiesto è esattamete $I_{O\hat{\mathbf{e}}} =$

$\frac{1}{12}\frac{3\pi+16}{\pi+4}m\ell^2$. In alternativa, possiamo calcolare direttamente il momento di inerzia assiale partendo dalla matrice di inerzia I e esplicitando $\hat{\mathbf{e}} = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2$

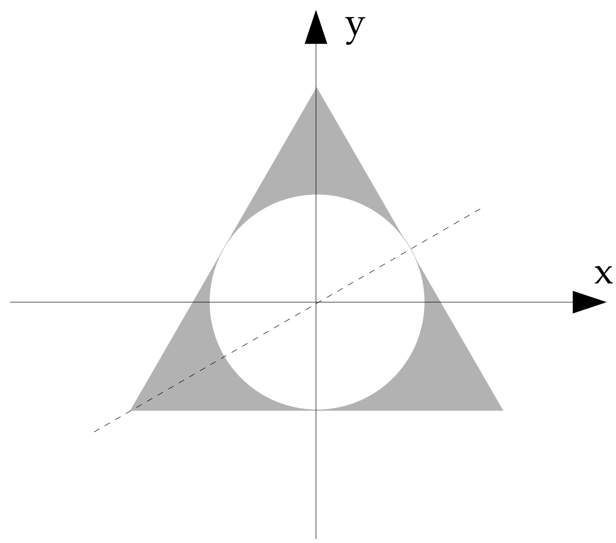
$$I_{O\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\mathbf{e}}\cdot I\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}\cdot(I_1\cos\alpha\mathbf{e}_1 + I_2\sin\alpha\mathbf{e}_2) = I_1\cos^2\alpha + I_2\sin^2\alpha = I_1 = \frac{1}{12}\frac{3\pi+16}{\pi+4}m\ell^2$$

Esercizio 2.

i) Dato il raggio R del foro, ottengo facilmente che il lato e l'altezza del triangolo sono rispettivamente

$$\ell = 2\sqrt{3}R, \quad h = 3R$$

Perciò la massa della lamina è $M = \sigma(3\sqrt{3} - \pi)R^2$.



Per calcolare i momenti principali di inerzia della lamina forata T considero un sistema di riferimento solidale come in figura. L'asse x definisce una direzione principale di inerzia, in quanto è una direzione ortogonale al piano yz, che è un piano di simmetria per riflessione per T. Essendo $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$ (perchè figura piana) direzioni principali di inerzia, allora anche l'ultimo vettore della terna $\mathbf{e}_2$ la deve essere. Inoltre posso identificare un ulteriore piano di riflessione per la figura, indicata con la linea tratteggiata nella figura. Ho trovato così un'ulteriore direzione principale di inerzia nel piano. Allora, per una proposizione dimostrata a lezione, vale che tutte le direzioni del tipo $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ sono principali di inerzia. Inoltre, per la stessa proposizione, tali direzioni hanno tutte lo stesso momento di inerzia, quindi in particolare $I_1 = I_2$. Notiamo che lo stesso risultato vale per il triangolo completo $\mathcal{C}$ e il disco con massa $\mathcal{F}$.
Per calcolare i momenti di inerzia di T rispetto al baricentro, faccio la differenza tra i momenti di inerzia del triangolo pieno e del disco pieno. Calcolo i momenti di inerzia del triangolo pieno, considerando lo stesso sistema di riferimento della

figura. Poichè i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} sono invarianti per la trasformazione $(x, y) \to (-x, y)$, posso calcolare questi momenti per un solo triangolo rettangolo ($\mathcal{C}_1$, quello di sinistra) che compone il triangolo equilatero.

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z)| - \sqrt{3}R \le x \le 0,\ -R \le y \le \sqrt{3}Rx + 2R,\ z = 0\}$$

$$I_{11}^{\mathcal{C}} = 2I_{11}^{\mathcal{C}_1} = 2\int_{-\sqrt{3}R}^{0}\int_{-R}^{\sqrt{3}Rx+2R} \sigma y^2 dxdy = ... = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sigma R^4$$

Dalle proprietà citate sopra, che come detto valgono anche per il triangolo equilatero, ottengo

$$I_1^{\mathcal{C}} = I_2^{\mathcal{C}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sigma R^4, \quad I_3^{\mathcal{C}} = 3\sqrt{3}\sigma R^4$$

Per trovare i momenti principali di inerzia della lamina forata T basta

$$I_1^T = I_1^{\mathcal{C}} - I_1^{\mathcal{F}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sigma R^4 - \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{12\sqrt{3}-4\pi} mR^2 = I_2^T, \quad I_3^T = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{6\sqrt{3}-2\pi} mR^2$$

ii) La velocità angolare di T è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^T = \dot{\theta}\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo θ rispetto a Oxy. Per calcolare la velocità angolare del disco interno $\mathcal{D}$ utilizzo la formula fondamentale della cinematica. Le posizioni dei punti che utilizzeremo sono:

$$\begin{aligned}(B - O) &= 2R(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2),\\ (C - O) &= (B - O) + (R/2)(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2)\\ (P - O) &= (B - O) + R(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2)\end{aligned}$$

Calcolo la velocità di P come punto solidale a T, che per il vincolo di puro rotolamento sarà uguale alla velocità di P come punto solidale a $\mathcal{D}$

$$\mathbf{v}_P^{(T)} = \mathbf{v}_B + \dot{\theta}\mathbf{e}_3 \times (P - B) = \mathbf{v}_B + R\dot{\theta}\cos\varphi\mathbf{e}_1 + R\dot{\theta}\sin\varphi\mathbf{e}_2$$

La velocità di C come punto solidale al disco è:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + (R/2)\dot{\varphi}\cos\varphi\mathbf{e}_1 + (R/2)\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_2$$

Applico la formula fondamentale della cinematica per $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} &= \mathbf{v}_C + \omega^{\mathcal{D}}\mathbf{e}_3 \times (P - C)\\ \cancel{\mathbf{v}_B} + R\dot{\theta}\cos\varphi\mathbf{e}_1 + R\dot{\theta}\sin\varphi\mathbf{e}_2 &= \cancel{\mathbf{v}_B} + (R/2)\dot{\varphi}\cos\varphi\mathbf{e}_1 + (R/2)\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_2 +\\ &\quad (R/2)\omega^{\mathcal{D}}\cos\varphi\mathbf{e}_1 + (R/2)\omega^{\mathcal{D}}\sin\varphi\mathbf{e}_2\\ &\to \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = (2\dot{\theta} - \dot{\varphi})\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

iii) La seconda equazione cardinale rispetto al polo O è

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \cancel{-\mathbf{v}_O \times (M\mathbf{v}_B + m\mathbf{v}_C)} + \mathbf{N}_O$$

dove il primo termine del membro a destra è nullo perchè $\mathbf{v}_O = 0$. Il momento angolare totale è la somma del momento angolare di T e di quello di $\mathcal{D}$:

$$\dot{\mathbf{M}}_O^T = \cancel{M(B-O) \times \mathbf{v}_O^{(T)}} + I_O^{(T)}\boldsymbol{\omega}^T = (\alpha+4)MR^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

dove ho posto $\alpha = (6\sqrt{3}-\pi)/(6\sqrt{3}-2\pi)$ e ho usato Huygens-Steiner per passare dal momento di inerzia rispetto al polo B al momento di inerzia rispetto al polo O.

$$\mathbf{M}_O^{\mathcal{D}} = m(C-O)\times\mathbf{v}_C + I_C^{(\mathcal{D})}\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = ... = \left(\frac{17}{4}mR^2\dot{\theta} + \frac{1}{8}mR^2\dot{\varphi} + mR^2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\varphi-\theta)\right)\mathbf{e}_3$$

Derivo rispetto al tempo:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \dot{\mathbf{M}}_O^T + \mathbf{M}_O^{\mathcal{D}} = \left(\left((4+\alpha)M + \frac{17}{4}m\right)R^2\ddot{\theta} + \frac{1}{8}mR^2\ddot{\varphi} + mR^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})\cos(\varphi-\theta) + mR^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2)\sin(\varphi-\theta)\right)\mathbf{e}_3$$

Infine calcolo il momento delle forze:

$$\mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O^T + \mathbf{N}_O^{\mathcal{D}} = (B-O)\times(-Mg\mathbf{e}_2) + (C-O)\times(-mg\mathbf{e}_2) = \left(-2(M+m)gR\sin\theta - \frac{1}{2}mgR\sin\varphi\right)\mathbf{e}_3$$

L'equazione del moto pura si ottiene eguagliando $\dot{\mathbf{M}}_O$ e $\mathbf{N}_O$ e proiettando su $\mathbf{e}_3$.