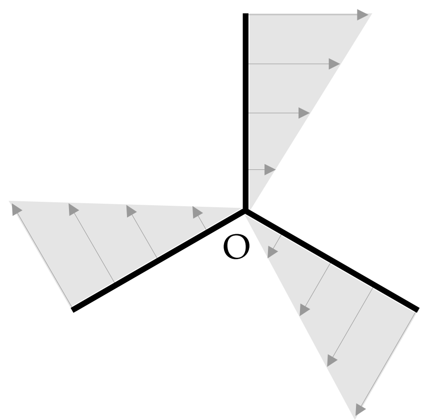
Compito di Meccanica Razionale
27 Gennaio 2025

Esercizio 1. Si consideri un corpo rigido $\mathcal{C}$ omogeneo di massa $3m$, composto da tre aste di lunghezza ℓ poste nello stesso piano, ruotate di $120°$ una rispetto all'altra e saldate in un estremo comune O (si veda la figura). Su ogni asta che compone $\mathcal{C}$ agisce una distribuzione continua di forze perpendicolari all'asta dirette come in figura, con densità di modulo Fd/ℓ^2 ($F > 0$ costante) che è funzione della distanza d dei punti dell'asta da O.

i) Calcolare i momenti principali di inerzia del corpo $\mathcal{C}$ rispetto al suo baricentro.

ii) Trovare il numero minimo di forze applicate che bisogna aggiungere al sistema in modo da equilibrarlo.

iii) Calcolare esplicitamente tali forze applicate scegliendo dei punti di applicazione P_i appartenenti al corpo.



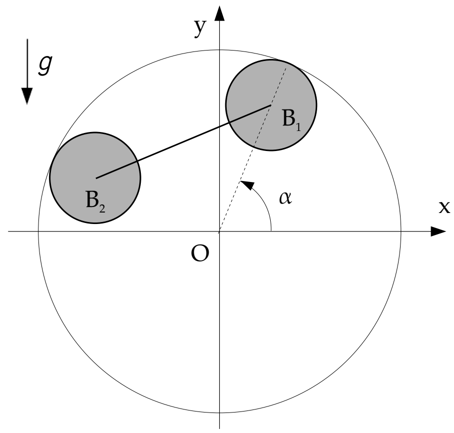
Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due dischi omogenei di raggio R e massa m. I baricentri B_1, B_2 dei dischi sono collegati tra loro da un'asta di lunghezza $3\sqrt{2}R$ e massa trascurabile. I due dischi rotolano senza strisciare all'interno di una guida circolare centrata nell'origine e di raggio $4R$ mantenendosi sempre a contatto con la guida. Il sistema è soggetto alla forza di gravità di accelerazione $g > 0$, diretta verso il basso.

Si usi come coordinata l'angolo α che OB_1 forma con la direzione orizzontale.

i) Calcolare le velocità angolari dei due dischi.

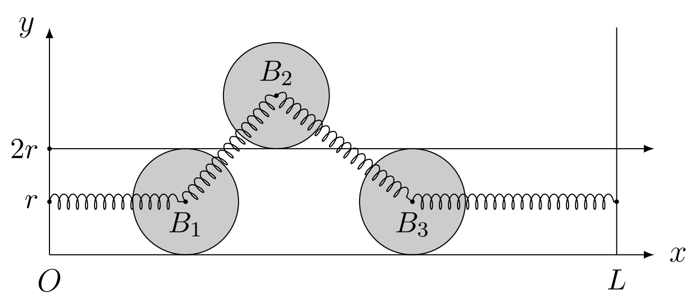
ii) Calcolare le reazioni vincolari dei due dischi nei punti di contatto con la guida.

iii) Scrivere l'equazione del moto del sistema usando un metodo a scelta studiato nel corso.



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico piano della figura, composto da tre dischi omogenei $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, di massa m e raggio $r > 0$. I dischi $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_3$ possono rotolare senza strisciare sull'asse Ox mentre il disco $\mathcal{D}_2$ può rotolare senza strisciare su un'asse parallelo a Ox passante per il punto di coordinate $(x, y) = (0, 2r)$.

Sul sistema agiscono anche delle forze elastiche prodotte da molle tutte uguali, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Detti B_1, B_2, B_3 i baricentri dei tre dischi, una molla collega B_1 al punto $(x, y) = (0, r)$, una seconda molla collega B_1 a B_2, una terza collega B_2 a B_3 e una quarta collega B_3 al punto $(x, y) = (L, r)$, con $L > 6r$.



Come coordinate lagrangiane si usino le ascisse x_1, x_2, x_3 dei tre baricentri.

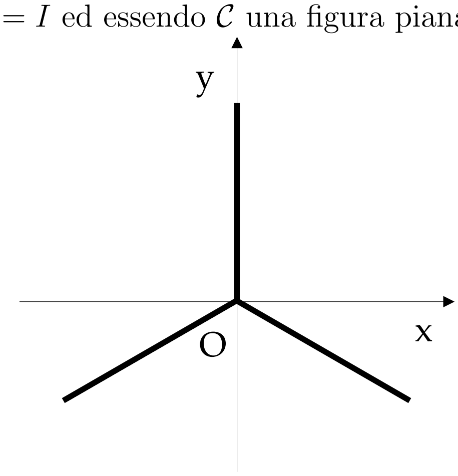
i) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.

ii) Determinare le frequenze proprie e i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 1.

i) Il baricentro di $\mathcal{C}$ è O, essendo il baricentro del sistema formato dai tre baricentri delle tre aste. Per trovare i momenti principali di inerzia, determiniamo una base principale. Consideriamo il riferimento centrato in O, col piano Oxy sul piano di $\mathcal{C}$, l'asse Oy lungo una delle aste, l'asse Oz uscente dal piano e Ox a completare in modo che i versorsi $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ associati a Ox, Oy e Oz siano una terna levogira (si veda la figura). Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto: $\mathbf{e}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano Oxy; $\mathbf{e}_1$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano Oyz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali.

Inoltre, rifacendo la stessa costruzione partendo da un'altra asta, vediamo che possiamo trovare altre direzioni principali sullo stesso piano Oxy. Per una proposizione vista a lezione sappiamo allora che tutte le direzioni nel piano passanti per O sono principali di inerzia e hanno lo stesso momento assiale. In particolare abbiamo che $I_1 = I_2 = I$ ed essendo $\mathcal{C}$ una figura piana $I_3 = I_1 + I_2 = 2I$.



Quindi per calcolare i momenti principali di inerzia di $\mathcal{C}$ basta trovarne uno. Il più semplice è I_3, il quale può essere calcolato come la somma dei momenti di inerzia I_{33} delle tre aste, i quali sono tutti uguali. Usando Huygens-Steiner e conoscendo il momento di inerzia rispetto al baricentro troviamo:

$$I_{33}^{\text{asta}} = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$$

Per il corpo $\mathcal{C}$ avremo che $I_3 = m\ell^2$ e $I_1 = I_2 = I_3/2 = (1/2)m\ell^2$

ii) Usiamo lo stesso sistema di riferimento introdotto nel punto precedente. Calcoliamo un sistema di forze equivalenti per l'asta posta lungo Oy (asta 1); per le altre aste tale sistema sarà semplicemente ruotato di un angolo 120° e 240°, rispettivamente. La risultante delle forze sull'asta 1 e il momento risultante rispetto al polo O si possono calcolare integrando la densità di forza lungo l'asta:

$$\mathbf{R}_1 = \int_0^\ell \frac{F}{\ell^2} x \hat{\mathbf{e}}_1 dx = \frac{F}{2} \hat{\mathbf{e}}_1$$
$$\mathbf{N}_1 = \int_0^\ell x\mathbf{e}_2 \times \frac{F}{\ell^2} x \hat{\mathbf{e}}_1 dx = -\int_0^\ell \frac{F}{\ell^2} x^2 \hat{\mathbf{e}}_3 dx = -\frac{F\ell}{3} \hat{\mathbf{e}}_3$$

Siccome il trinomio invariante $T_1 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{N}_1$ è nullo, ma la risultante no, sappiamo da una proposizione vista a lezione che il sistema di forze applicate è equivalente ad un'unica forza applicata su un punto dell'asse centrale, il quale passa dal punto

$$Q_1 - O = \frac{\mathbf{R}_1 \times \mathbf{N}_1}{|\mathbf{R}_1|^2} = \frac{2}{3} \ell \hat{\mathbf{e}}_2$$

che sta proprio sulll'asta. Quindi il sistema di forze sull'asta 1 è equivalente a $\{(Q_1, \mathbf{R}_1)\}$ dove Q_1 è il punto dell'asta che si trova a $2/3$ della lunghezza dell'asta rispetto all'origine O.

Possiamo trasportare questo risultato sulle altre aste, dove avremo Q_2 e Q_3 punti di applicazione sempre a $2/3$ della lunghezza dell'asta rispetto all'origine O, mentre per trovare l'espressione delle forze in coordinate basterà ruotare $\mathbf{R}_1$ di una rotazione di 120° e 240° intorno all'asse Oz:

$$\mathbf{R}_2 = -\frac{F}{4} \hat{\mathbf{e}}_1 - \frac{\sqrt{3}F}{4} \hat{\mathbf{e}}_2, \qquad \mathbf{R}_3 = -\frac{F}{4} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{3}F}{4} \hat{\mathbf{e}}_2$$

Per i momenti delle forze rispetto ad O invece avremo $\mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1$, essendo invarianti per rotazione intorno all'asse Oz.

Per il sistema di forze applicate all'intero corpo $\mathcal{C}$ vale che la risultante e il momento risultante delle forze saranno la somma degli $\mathbf{R}_i$ e $\mathbf{N}_i$ trovati sopra:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_3 = -F\ell \hat{\mathbf{e}}_3$$

Siccome sia la risultante che il trinomio invariante $T = \mathbf{R} \times \mathbf{N}$ sono nulli, il sistema è equivalente ad una coppia di forze applicate. Per equilibrare tale sistema ho bisogno quindi di $n = 2$ forze, in particolare una coppia con $\mathbf{N}^{\text{coppia}} = -\mathbf{N}$.

iii) Basta trovare una coppia di vettori $\{(P_1, \mathbf{G}), (P_2, -\mathbf{G})\}$ tali che $\mathbf{N}^{\text{coppia}} = F\ell \hat{\mathbf{e}}_3$ e che i punti P_1 e P_2 appartengano a $\mathcal{C}$. In principio, ci sono infinite soluzioni, cerchiamo quindi di realizzarne una. Prendiamo in modo arbitrario $P_2 = O$ e $\mathbf{G} = G\hat{\mathbf{e}}_1$, e imponiamo

$$\mathbf{N}^{\text{coppia}} = (P_1 - P_2) \times \mathbf{G} = F\ell \hat{\mathbf{e}}_3$$

Una possibile soluzione è prendere P_1 l'estremo dell'asta 1 diverso da O, cioè $(P_1 - O) = \ell \hat{\mathbf{e}}_2$ e $G = -F$.

Esercizio 2.

i) Siccome l'asta è lunga $3\sqrt{2}R$ e i segment OB_i invece $3R$, vale che l'angolo tra OB_1 e OB_2 è uguale a 90° radianti. Scriviamo le coordinate dei baricentri B_i e dei punti di contatto P_i:

$$\begin{aligned}
(B_1 - O) =& 3R(\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_2), & \mathbf{v}_{B_1} &= 3R\dot{\alpha}(-\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_2),\\
(B_2 - O) =& 3R(-\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_2), & \mathbf{v}_{B_2} &= 3R\dot{\alpha}(-\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 - \sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_2),\\
(P_1 - O) =& 4R(\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_2) & &\\
(P_2 - O) =& 4R(-\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_2) & &
\end{aligned}$$

Usando il vincolo di rotolamento senza strisciamento, sappiamo che la velocità del punto di contatto del disco come punto solidale al disco stesso ha velocità nulla, quindi dalla formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\mathbf{v}_{B_1} = \cancel{\mathbf{v}_{P_1}} + \omega_1\hat{\mathbf{e}}_3 \times (B_1 - P_1) = R\omega_1(\sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_2) \implies \boldsymbol{\omega}_1 = -3\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

Usando la stessa formula per il secondo disco otteniamo

$$\mathbf{v}_{B_2} = \cancel{\mathbf{v}_{P_2}} + \omega_2\hat{\mathbf{e}}_3 \times (B_2 - P_2) = R\omega_2(\cos\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin\alpha\hat{\mathbf{e}}_2) \implies \boldsymbol{\omega}_2 = -3\dot{\alpha}\hat{\mathbf{e}}_3.$$

2) Le reazioni vincolari $\mathbf{\Phi}_1$ agente in P_1 e $\mathbf{\Phi}_2$ agente in P_2 possono essere espresse in coordinate in questo modo

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}_1 &= \Phi_{1,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{1,y}\mathbf{e}_2\\
\mathbf{\Phi}_2 &= \Phi_{2,x}\mathbf{e}_1 + \Phi_{2,y}\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Ci sono reazioni vincolari agenti anche in B_1 e B_2, ma queste non contribuiscono alle equazioni cardinali quando consideriamo il sistema intero. Cerchiamo quindi quattro equazioni con le reazioni vincolari richieste. Iniziamo dalla prima equazione cardinale per l'intero sistema:

$$m\mathbf{a}_{B_1} + m\mathbf{a}_{B_2} = -2mg\hat{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$$

da cui, proiettando lungo $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$ otteniamo le due equazioni

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\ \Phi_{1,x} + \Phi_{2,x} &= -3mR\ddot{\alpha}(\sin\alpha + \cos\alpha) - 3mR\dot{\alpha}^2(\cos\alpha - \sin\alpha) := A\\
\text{(II)}\ \Phi_{1,y} + \Phi_{2,y} &= +3mR\ddot{\alpha}(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3mR\dot{\alpha}^2(\sin\alpha + \cos\alpha) + 2mg := B
\end{aligned}$$

Consideriamo ora la seconda equazione cardinale per il primo disco con polo il suo baricentro (analogamente faremo per il secondo disco):

$$\dot{\mathbf{M}}_{B_1} = \cancel{-m\mathbf{v}_{B_1} \times \mathbf{v}_{B_1}} + \mathbf{N}_{B_1}$$

Facendo i calcoli otteniamo (la reazione vincolare in B_1 e la gravità hanno braccio nullo quindi non danno contributo):

$$\mathbf{M}_{B_1} = I_{B_1}\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}mR^2(-3\dot{\alpha})\hat{\mathbf{e}}_3 = -\frac{3}{2}mR^2\dot{\alpha}$$
$$\mathbf{N}_{B_1} = (P_1 - B_1) \times \boldsymbol{\Phi}_1 = -\Phi_{1,x}R\sin\alpha + \Phi_{1,y}R\cos\alpha$$

da cui otteniamo l'equazione

$$\text{(III)}\ \Phi_{1,x}\sin\alpha - \Phi_{1,y}\cos\alpha = \frac{3}{2}mR\ddot{\alpha} := C$$

e analogamente per il secondo disco

$$\text{(IV)}\ \Phi_{2,x}\cos\alpha + \Phi_{2,y}\sin\alpha = \frac{3}{2}mR\ddot{\alpha} := C$$

Esplicitando $\Phi_{1,x}$ dalla (I) e sostituendolo nella (III), ed esplicitando $\Phi_{2,y}$ dalla (II) e mettendolo nella (IV), otteniamo il sistema

$$\Phi_{2,x}\sin\alpha + \Phi_{1,y}\cos\alpha = -C + A\sin\alpha$$
$$\Phi_{2,x}\cos\alpha - \Phi_{1,y}\sin\alpha = +C - B\sin\alpha$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos\alpha$, la seconda per $\sin\alpha$ e sottraendo una all'altra otteniamo

$$\Phi_{1,y} = -C(\cos\alpha+\sin\alpha)+A\cos\alpha\sin\alpha+B\sin^2\alpha = -(3/2)mR\ddot{\alpha}(3\sin\alpha+\cos\alpha)-3mR\dot{\alpha}^2\sin\alpha+2mg\sin^2\alpha$$

Invece, moltiplicando la prima equazione per $\sin\alpha$, la seconda per $\cos\alpha$ e sommando una all'altra otteniamo

$$\Phi_{2,x} = -C(\sin\alpha-\cos\alpha)+A\sin^2\alpha-B\cos\alpha\sin\alpha = -(3/2)mR\ddot{\alpha}(3\sin\alpha-\cos\alpha)+3mR\dot{\alpha}^2\sin\alpha-2mg\cos\alpha\sin\alpha$$

Infine sostituendo tali valori alle equazioni (I) e (II) otteniamo le ultime due reazioni cercate

$$\Phi_{1,x} = C(\sin\alpha - \cos\alpha) + A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha = (3/2)mR\ddot{\alpha}(\sin\alpha - 3\cos\alpha) - 3mR\dot{\alpha}^2\cos\alpha + 2mg\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\Phi_{2,y} = C(\cos\alpha + \sin\alpha) - A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha = (3/2)mR\ddot{\alpha}(\sin\alpha + 3\cos\alpha) - 3mR\dot{\alpha}^2\cos\alpha + 2mg\cos^2\alpha$$

3) Potremmo ricavare l'equazione del moto con un'ulteriore equazione cardinale, ma è molto più semplice usare le equazioni di Lagrange (il testo dice metodo a scelta). Per tale sistema abbiamo che l'energia cinetica e potenziale sono

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{B_1}|^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_{B_2}|^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega_2^2 = \frac{27}{2}mR^2\dot{\alpha}^2$$
$$\mathcal{V} = mgy_{B_1} + mgy_{B_2} = 3mgR(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

e la lagrangiana è $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$. Utilizzando le equazioni di Lagrange otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = 0, \ \rightarrow\ 9R\ddot{\alpha} + g(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$$

che è equivalente all'equazione di un pendolo.

Esercizio 3.

i) I punti B_i hanno posizioni e velocità:

$$
\begin{aligned}
B_1 - O &= x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + r\hat{\mathbf{e}}_2, & \mathbf{v}_1 &= \dot{x}_1\hat{\mathbf{e}}_1\\
B_2 - O &= x_2\hat{\mathbf{e}}_1 + 3r\hat{\mathbf{e}}_2, & \mathbf{v}_2 &= \dot{x}_2\hat{\mathbf{e}}_1\\
B_3 - O &= x_3\hat{\mathbf{e}}_1 + r\hat{\mathbf{e}}_2, & \mathbf{v}_3 &= \dot{x}_3\hat{\mathbf{e}}_1
\end{aligned}
$$

Calcoliamo l'energia potenziale del sistema (solo elastica, la gravità dà solo un contributo costante)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} =& \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + 4r^2 + (x_2 - x_3)^2 + 4r^2 + (x_3 - L)^2\right)\\
=& k\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - Lx_3\right) + \text{costanti additive}
\end{aligned}
$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_1} = k(2x_1 - x_2) = 0\\
\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2} = k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0\\
\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_3} = k(2x_3 - x_2 - L) = 0
\end{cases}
\quad\to\quad
\begin{cases}
x_2 = 2x_1\\
x_3 = 3x_1\\
L = 4x_1
\end{cases}
$$

Quindi esiste un solo punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ed è $(L/4, L/2, 3L/4)$.

Per studiarne la stabilità, guardiamo gli autovalori della matrice hessiana di $\mathcal{V}$ valutata nel punto di equilibrio (in questo caso non dipende dalle coordinate):

$$
\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial(x_1, x_2, x_3)^2} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}
$$

Gli autovalori della matrice sono $(2-\sqrt{2})k,\ 2k,\ (2+\sqrt{2})k$, i quali sono tutti positivi. Perciò, il punto di equilibrio è un minimo di $\mathcal{V}$ e, per il teorema di Lagrange-Dirichilet, è stabile.

ii) Calcoliamo l'energia cinetica del sistema (traslazionale + rotazionale)

$$
\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\left(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + |\mathbf{v}_3|^2\right) + \frac{1}{4}mr^2\left(\omega_i^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right) = \frac{3}{4}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right).
$$

dove abbiamo usato che $I_{3,B}^{\text{disco}} = (1/2)mr^2$ e che $\omega_i = -\dot{x}_i/r$. Dalla scrittura dell'energia cinetica ricaviamo la matrice cinetica

$$
A = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}
$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}\mathcal{V}''$:

$$A^{-1}\mathcal{V}''(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \frac{2k}{3m}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e i suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{2k}{3m}, \quad \lambda_2 = 2\frac{2k}{3m}, \quad \lambda_3 = (2 + \sqrt{2})\frac{2k}{3m}.$$

Le frequenze proprie cercate sono $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ e i modi normali sono le famiglie di soluzioni $(h = 1, 2, 3)$:

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h$$

dove c_h e φ_h dipendono dalle condizioni iniziali e $\mathbf{u}_h$ sono autovettori di $A^{-1}\mathcal{V}''$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (1, \sqrt{2}, 1)^T \\ \mathbf{u}_2 &= (1, 0, -1)^T \\ \mathbf{u}_3 &= (1, -\sqrt{2}, 1)^T \end{aligned}$$