Quarto compito di Meccanica Razionale
25 Gennaio 2024

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\rho \log \rho - \frac{1}{\rho^3}$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

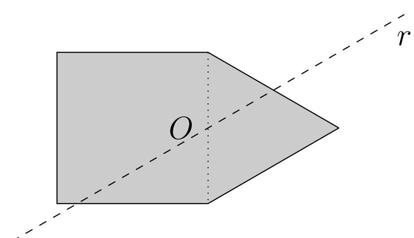
ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c.

iii) Sul piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (e, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, b), \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a e b affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. Si consideri il corpo rigido piano e omogeneo descritto in figura, formato da una lamina triangolare equilatera e da una lamina quadrata i cui lati hanno lunghezza ℓ. Sia O il punto medio del lato in comune delle due lamine. Calcolare il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse r passante per O e parallelo ad uno dei lati della lamina triangolare in funzione della massa m del corpo e di ℓ (vedi figura).



Esercizio 3. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su un iperboloide liscio di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2}\cos\theta, \\ y = a\sqrt{1+u^2}\sin\theta, \\ z = bu; \end{cases}$$

con $a, b > 0$, $u \in \mathbb{R}$ e $\theta \in S^1$. Il punto P è collegato all'origine O tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

i) Scrivere la lagrangiana del sistema e ricavare la lagrangiana ridotta usando il metodo di Routh.

ii) Trovare le configurazioni di equilibrio del sistema ridotto al variare dei parametri c, a, b, m e k, dove c è il valore del momento coniugato alla variabile ciclica.

iii) Assumendo $b = \sqrt{3}a$ e $c^2 = 16mka^4$ discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto precedente

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow -\rho \log \rho + \frac{c^2 - 1}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho^4 \log \rho = c^2 - 1$$

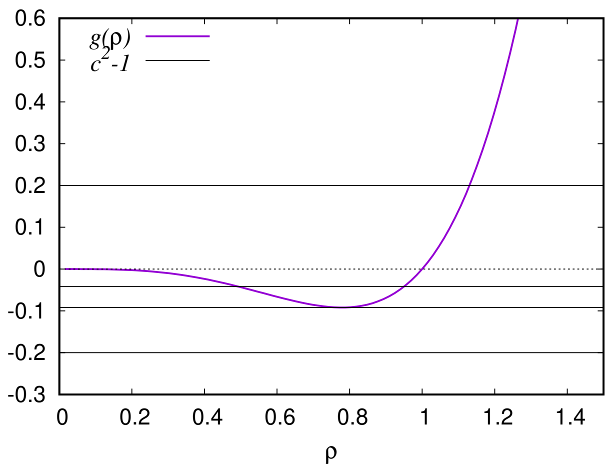
Per capire il numero di soluzioni, contiamo il numero di intersezioni per $\rho > 0$ tra il grafico della funzione $g(\rho) = \rho^4 \log \rho$ e la retta orizzontale $h(\rho) = c^2 - 1$.
Per la funzione $g(\rho)$ vale che $g(1) = 0$,

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0^-, \quad \lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = +\infty$$

e che ha un unico punto stazionario (minimo) in

$$g'(\rho) = 4\rho^3 \log \rho + \rho^3 = 0 \rightarrow \overline{\rho} = e^{-1/4},$$

in cui la funzione vale $g(\overline{\rho}) = -1/(4e)$ Perciò abbiamo i seguenti casi:



- se $c^2 < 1 - 1/(4e)$ allora non ci sono intersezioni tra la retta e la funzione $g(\rho)$ (quindi nessuna orbita circolare).
- se $c^2 = 1 - 1/(4e)$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 = e^{-1/4}$.
- se $1 - 1/(4e) < c^2 < 1$ allora ci sono due intersezioni (quindi due orbite circolari), una per $\rho_1 < e^{-1/4}$ e una per $e^{-1/4} < \rho_2 < 1$.
- se $c^2 \geq 1$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 \geq 1$.

ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{\rho^2}{2} \log \rho - \frac{\rho^2}{4} + \frac{c^2 - 1}{2\rho^2}$$

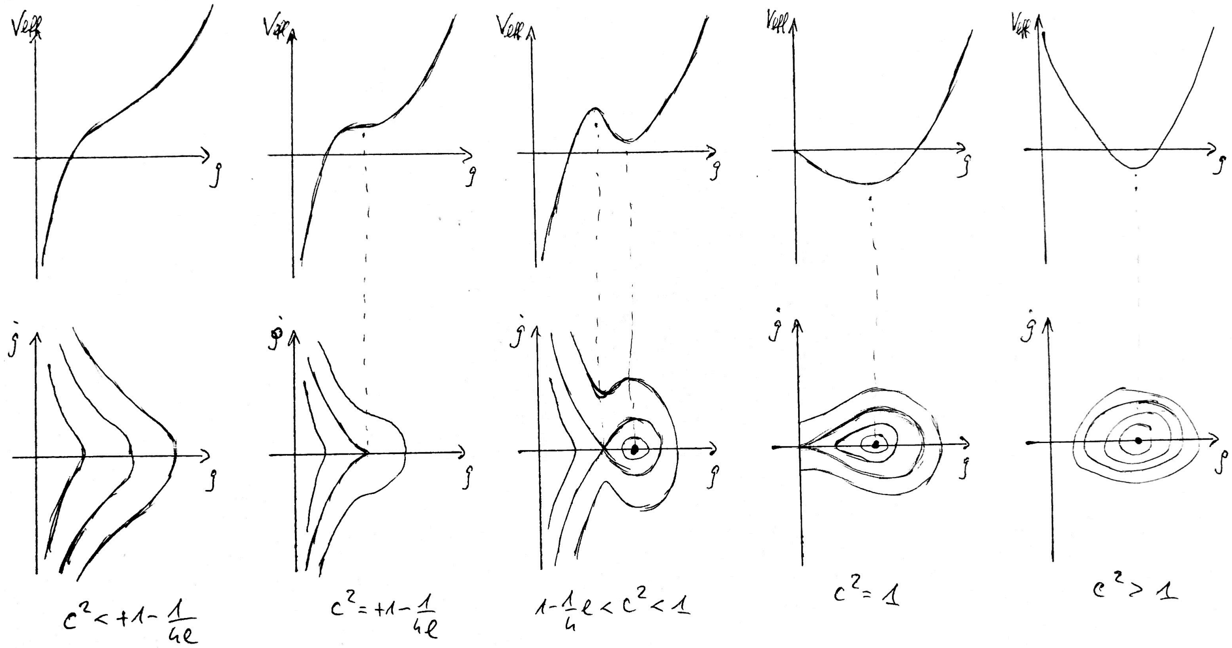
Per $\rho \to +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

mentre per $\rho \to 0^+$ il termine dominante è l'ultimo (se $c^2 \neq 1$), perciò

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c^2 > 1 \\ 0^- & \text{se } c^2 = 1 \\ -\infty & \text{se } c^2 < 1 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_2$, valutando le espressioni sopra all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = e, \quad \dot\rho(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot\theta(0) = b.$$

La condizione $\dot\rho = 0 \to a = 0$ è necessaria per avere un'orbita circolare. Inoltre, possiamo calcolare il valore di c dalle condizioni iniziali:

$$c = \rho^2 \dot\theta = \rho^2(0)\dot\theta(0) = eb$$

Vogliamo trovare b affinchè con $\rho = e$ e $c = eb$ si abbia $\ddot\rho = 0$

$$\rho^4 \log \rho = c^2 - 1 \;\to\; e^4 = e^2 b^2 - 1 \;\to\; b = \pm\sqrt{\frac{e^4 + 1}{e^2}}$$

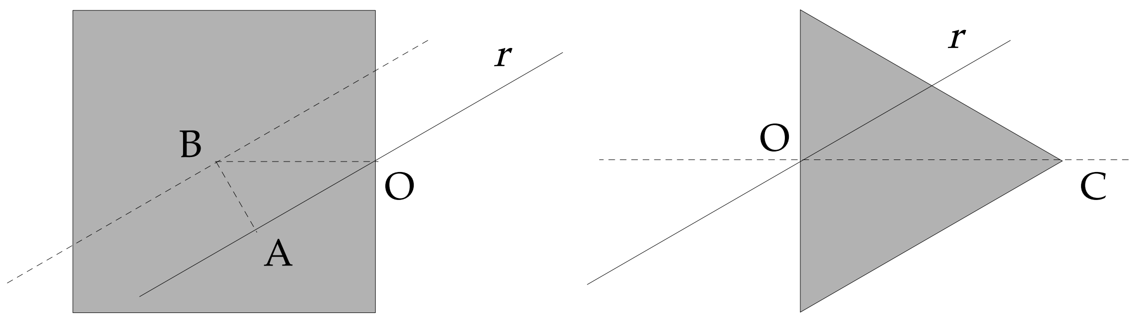
Esercizio 2.

Calcoliamo prima la densità del corpo rigido

$$\sigma = \frac{m}{A} = \frac{4m}{(4+\sqrt{3})\ell^2}$$

da cui possiamo ricavare le masse del quadrato e del triangolo equilatero che compongono il corpo (si veda la figura)

$$m_{\mathcal{Q}} = \sigma\ell^2 = \frac{4}{4+\sqrt{3}}m, \qquad m_{\mathcal{T}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sigma\ell^2 = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}m$$



Il momento di inerzia rispetto alla retta r (la cui direzione indichiamo con il versore $\hat{\mathbf{e}}$) dell'intero corpo rigido può essere calcolato come la somma dei momenti del quadrato e del triangolo. Iniziamo con il quadrato.

Per il quadrato sappiamo che tutte le rette passanti per il suo baricentro B e giacenti nel piano della figura sono principali e hanno uguale momento. Perciò vale che $I^{\mathcal{Q}}_{B\hat{\mathbf{e}}} = (1/12)m_{\mathcal{Q}}\ell^2$. Per calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse passante per O usiamo il teorema di Huygens-Steiner.

La distanza tra l'asse $B\hat{\mathbf{e}}$ e la retta r può essere calcolata considerando il triangolo ABO: il cateto $AB = \ell/4$, perciò:

$$I^{\mathcal{Q}}_{O\hat{\mathbf{e}}} = \frac{1}{12}m_{\mathcal{Q}}\ell^2 + \frac{1}{16}m_{\mathcal{Q}}\ell^2 = \frac{7}{48}m_{\mathcal{Q}}\ell^2 = \frac{7}{48}\sigma\ell^4$$

Per il triangolo, invece, ricaviamo il momento di inerzia rispetto all'asse usando la definizione di momento assiale. Abbiamo quindi bisogno di calcolare prima la sua matrice di inerzia; consideriamo un sistema di riferimento centrato in O e con assi xy definiti in questo modo: l'asse x lungo il segmento OC (si veda la figura) e l'asse y lungo il lato in comune con il quadrato.

Per semplificare il calcolo, notiamo che possiamo dividere il triangolo $\mathcal{T}$ in due triangoli rettangoli coincidenti $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, ottenuti tagliando la figura lungo l'asse x. Poichè possiamo ottenere $\mathcal{R}_2$ a partire da $\mathcal{R}_1$ tramite la seguente simmetria

$$(x, y) \to (x, -y) \qquad \text{riflessione rispetto all'asse } x$$

valgono le seguenti proprietà

$$I_{11}^{\mathcal{R}_1} = I_{11}^{\mathcal{R}_2}, \qquad I_{22}^{\mathcal{R}_1} = I_{22}^{\mathcal{R}_2}, \qquad I_{12}^{\mathcal{R}_1} = -I_{12}^{\mathcal{R}_2}$$

Percio per $\mathcal{T}$ avrò $I_{11}^{\mathcal{T}} = 2I_{11}^{\mathcal{R}_1}$, $I_{22}^{\mathcal{T}} = 2I_{22}^{\mathcal{R}_1}$, $I_{12}^{\mathcal{T}} = 0$.

Calcoliamo i momenti di inerzia per il triangolo $\mathcal{R}_1$:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq -\frac{b}{a}x + b,\ z = 0\}$$

con $a = (\sqrt{3}/2)\ell$ e $b = (1/2)\ell$;

$$I_{22}^{\mathcal{R}_1} = \int_0^a \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} \sigma x^2 dy dx = ... = \frac{1}{12}\sigma a^3 b = \frac{\sqrt{3}}{64}\sigma \ell^4$$

e per analogia (scambio di cateti) avremo che

$$I_{11}^{\mathcal{R}_1} = \frac{1}{12}\sigma a b^3 = \frac{\sqrt{3}}{192}\sigma \ell^4$$

Quindi per il triangolo $\mathcal{T}$ abbiamo le seguenti entrate della matrice di inerzia (gli elementi fuori dalla sottomatrice 2x2 non servono, in quanto $\hat{\mathbf{e}}$ sta sul piano della figura):

$$I_{11}^{\mathcal{T}} = \frac{\sqrt{3}}{96}\sigma \ell^4, \qquad I_{22}^{\mathcal{T}} = \frac{\sqrt{3}}{32}\sigma \ell^4, \qquad I_{12}^{\mathcal{T}} = 0.$$

Per ottenere quindi il momento di inerzia rispetto alla retta r basta applicare la definizione di momento assiale. Nel sistema di riferimento Oxy la direzione di r è $\hat{\mathbf{e}} = (\sqrt{3}/2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (1/2)\hat{\mathbf{e}}_2$, perciò

$$I_{O\hat{\mathbf{e}}}^{\mathcal{T}} = \hat{\mathbf{e}} \cdot I_O^{\mathcal{T}} \hat{\mathbf{e}} = \frac{\sqrt{3}}{128}\sigma \ell^4 + \frac{\sqrt{3}}{128}\sigma \ell^4 = \frac{\sqrt{3}}{64}\sigma \ell^4$$

Infine, il momento di inerzia per il corpo completo è

$$I_{O\hat{\mathbf{e}}} = I_{O\hat{\mathbf{e}}}^{\mathcal{Q}} + I_{O\hat{\mathbf{e}}}^{\mathcal{T}} = \frac{7}{48}\sigma \ell^4 + \frac{\sqrt{3}}{64}\sigma \ell^4 = \frac{28 + 3\sqrt{3}}{192}\sigma \ell^4 = \frac{1}{48}\frac{28 + 3\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} m \ell^2$$

Esercizio 3.

i) La velocità del punto materiale ha coordinate

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{au\dot{u}}{\sqrt{1+u^2}}\cos\theta - a\dot{\theta}\sqrt{1+u^2}\sin\theta, \\ \dot{y} = \dfrac{au\dot{u}}{\sqrt{1+u^2}}\sin\theta + a\dot{\theta}\sqrt{1+u^2}\cos\theta, \\ \dot{z} = b\dot{u} \end{cases}$$

Quindi l'espressione dell'energia cinetica è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m\left(\frac{a^2u^2}{1+u^2}\dot{u}^2 + b^2\dot{u}^2 + a^2(1+u^2)\dot{\theta}^2\right)$$

e dell'energia potenziale è

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k|P-O|^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}k\left(a^2(1+u^2)+b^2u^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}k\left(a^2+b^2\right)u^2 \quad \text{(a meno di costanti additive)}$$

La Lagrangiana dipende da u ma non da θ, che è quindi una variabile ciclica

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}m\left(\frac{a^2u^2}{1+u^2}\dot{u}^2 + b^2\dot{u}^2 + a^2(1+u^2)\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(a^2+b^2\right)u^2$$

Abbiamo quindi un integrale primo che è il momento coniugato a θ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ma^2(1+u^2)\dot{\theta} = c \;\to\; \dot{\theta} = \nu(u) = \frac{c}{ma^2(1+u^2)}$$

Posso quindi scrivere la Lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}_R^{(c)} = [\mathcal{L} - c\dot{\theta}]|_{\dot{\theta}=\nu(u)} = \frac{1}{2}m\left(\frac{a^2u^2}{1+u^2}+b^2\right)\dot{u}^2 - \frac{c^2}{2ma^2(1+u^2)} - \frac{1}{2}k\left(a^2+b^2\right)u^2$$

ii) La scrittura della Lagrangiana ridotta è del tipo $L_2 - V_0$ in u, dove

$$V_0(u) = \frac{c^2}{2ma^2(1+u^2)} + \frac{1}{2}k\left(a^2+b^2\right)u^2.$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio basta quindi risolvere l'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial u} = -\frac{c^2u}{ma^2(1+u^2)^2} + k\left(a^2+b^2\right)u = 0 \;\to\; u\left(-\frac{c^2}{kma^2(a^2+b^2)} + (1+u^2)^2\right) = 0$$

da cui otteniamo $u = 0$ e

$$(1+u^2) = \frac{|c|}{a\sqrt{km(a^2+b^2)}} \;\to\; u = \pm\sqrt{\frac{|c|}{a\sqrt{km(a^2+b^2)}} - 1},$$

dove queste ultime esistono se $|c| > a\sqrt{km(a^2+b^2)}$.

iii) Consideriamo ora $b = \sqrt{3}a$ e $c^2 = 16mka^4$; in questo caso abbiamo che

$$|c| = 4a^2\sqrt{km} > 2a^2\sqrt{km} = a\sqrt{km(a^2 + b^2)},$$

perciò ci sono tre configurazioni di equilibrio:

$$u_1 = 0, \qquad u_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4a^2\sqrt{km}}{2a^2\sqrt{km}} - 1} = \pm 1.$$

Per determinare la loro stabilità basta calcolare il segno di $\partial V_0^2/\partial u^2$, valutata nelle configurazioni di equilibrio u_i (quindi vedere se corrispondono ad un minimo o un massimo dell'energia potenziale).

$$V_0^{''}(u) = \frac{4c^2u^2}{ma^2(1+u^2)^3} - \frac{c^2}{ma^2(1+u^2)^2} + k\left(a^2 + b^2\right)$$

Per $u = 0$ abbiamo

$$V_0^{''}(0) = -\frac{c^2}{ma^2} + k\left(a^2 + b^2\right) = -16ka^2 + 4ka^2 = -12ka^2 < 0,$$

perciò è un punto di massimo di V_0, quindi instabile.

Per $u = \pm 1$ abbiamo

$$V_0^{''}(\pm 1) = \frac{4c^2}{8ma^2} - \frac{c^2}{4ma^2} + k\left(a^2 + b^2\right) = 8ka^2 - 4ka^2 + 4ka^2 = 8ka^2 > 0,$$

perciò sono dei punti di minimo di V_0, quindi stabili (Lagrange-Dirichilet).