Compito di Meccanica Razionale
19 Febbraio 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\boldsymbol{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si supponga che il momento angolare $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente di $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ ortogonale al piano del moto.

i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di α e c.

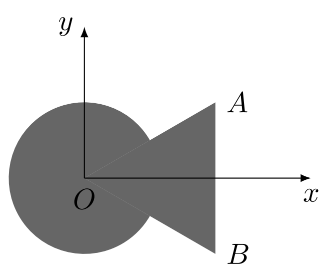
ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e c.

iii) Sia $\alpha = -3$ e nel piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si scelgano le condizioni iniziali

$$(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0), \quad (\dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)) = (a, -\sqrt{5})\,, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Trovare i valori di a per cui l'orbita con le condizioni iniziali (1) è limitata.

Esercizio 2. In un piano orizzontale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il corpo rigido omogeneo $\mathcal{C}$ di massa m descritto in figura, costruito con un disco di raggio r da cui è stato ritagliato un settore circolare di ampiezza angolare $\pi/3$ per poi inserirvi il triangolo equilatero OAB di lato $2r$.



Calcolare i momenti principali di inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto all'origine O.

Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2$, mentre un altro punto materiale Q di massa $M \neq m$ è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $x = y^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.
Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P e l'ordinata t del punto Q.

i) Scrivere la lagrangiana del sistema.

ii) Determinare le configurazioni di equilibrio.

iii) Studiare la stabilità degli equilibri.

iv) Calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno ad uno degli equilibri stabili.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \ \rightarrow \ \frac{1}{\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \ \rightarrow \ \rho^2 + 2\alpha\rho + c^2 = 0$$

Quando esistono, le soluzioni di questa equazione possono essere espresse come

$$\rho_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - c^2}$$

dove denotiamo ρ_1 la soluzione con il $+$ e ρ_2 quella con il $-$.
Abbiamo i seguenti casi al variare di α e c:

- se $\alpha \geq 0$, allora non esistono soluzioni reali positive, quindi non ci sono orbite circolari. Infatti se $\alpha < |c|$ allora le soluzioni dell'equazione non sono reali, mentre se $\alpha \geq |c|$, allora le soluzioni sono negative.
- se $\alpha < 0$ esistono diversi sottocasi, a seconda del segno del determinante:
  - se $\alpha < -|c| < 0$, allora esistono due soluzioni positive dell'equazione (in quanto $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - c^2} > 0$) e quindi due orbite circolari con raggi ρ_1 e ρ_2.
  - se $\alpha = -|c| < 0$, allora esiste un'unica orbita circolare con $\rho_1 = -\alpha$.
  - se $0 > \alpha > -|c|$, allora non esistono soluzioni reali dell'equazione e quindi non ci sono orbite circolari.

ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\log\rho + \frac{2\alpha}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

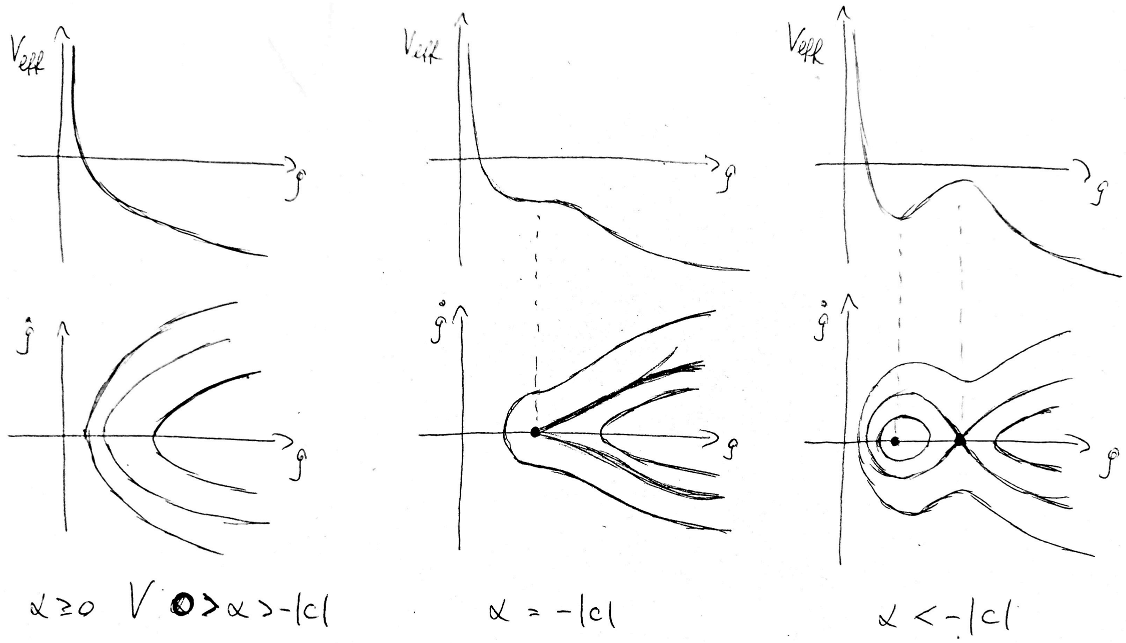
Per $\rho \to 0^+$ il termine dominante è il terzo, perciò

$$\lim_{\rho\to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

mentre per $\rho \to +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho\to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



iii) Per $\alpha = -3 < 0$ sappiamo che esistono diversi sottocasi. Dai dati iniziali abbiamo che $\mathbf{e}_\rho(0) = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\mathbf{e}_\theta(0) = \hat{\mathbf{e}}_2$, perciò:

$$\rho(0) = 1, \qquad \dot\rho(0) = a, \qquad \rho(0)\dot\theta(0) = -\sqrt{5}$$

da cui possiamo calcolare il valore degli integrali primi:

$$c = \rho^2\dot\theta = -\sqrt{5}, \qquad \overline{E} = \frac{\dot\rho^2}{2} + V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{7}{2}$$

Siamo quindi nel caso $\alpha < -|c|$, in cui esistono due punti stazionari di V_{eff}. I punti di minimo ρ_1 e massimo ρ_2 di V_{eff} per $\alpha = -3$ e $c = -\sqrt{5}$ sono

$$\rho_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} \implies \rho_1 = 1, \ \rho_2 = 5$$

e l'energia potenziale efficace nel punto di massimo vale $V_{\text{eff}}(5) = -\log(5) - 11/10$.

Visto che $\rho(0) = 1 < \rho_2$ corrisponde al punto di minimo locale, per avere un'orbita limitata con le condizioni iniziali date basta che $\overline{E} \leq V_{\text{eff}}(5)$, quindi

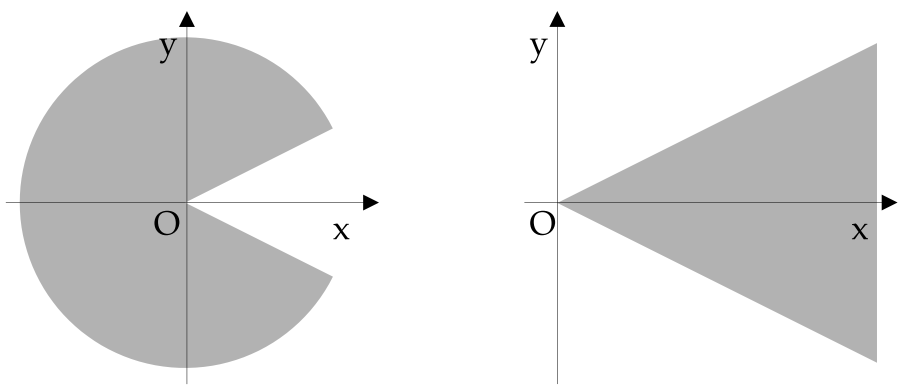
$$\frac{1}{2}a^2 - \frac{7}{2} \leq -\log(5) - \frac{11}{10} \implies |a| \leq \sqrt{\frac{24}{5} - 2\log(5)}$$

Esercizio 2.
La densità del corpo rigido è

$$\sigma = \frac{m}{A} = \frac{m}{\left(\frac{5}{6}\pi + \sqrt{3}\right) r^2} = \frac{6m}{(5\pi + 6\sqrt{3})r^2}$$

Per trovare i momenti principali di inerzia, determiniamo una base principale. Consideriamo il sistema di riferimento riportato nella figura dell'esercizio e prendiamo i versorsi $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ associati a Ox, Oy e Oz. Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto: $\mathbf{e}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano Oxy; $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano Oxz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\mathbf{e}_1$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali.

Basta quindi calcolare I_{11}, I_{22} e I_{33} in questo riferimento. Per semplicità, calcoliamo queste quantità per le due figure disgiunte che compongono il corpo: il disco $\mathcal{D}-$ privo del settore e il triangolo equilatero $\mathcal{T}$ (si veda la figura).



Iniziamo dal triangolo. Notiamo che possiamo dividere $\mathcal{T}$ in due triangoli rettangoli coincidenti $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, ottenuti tagliando la figura lungo l'asse Ox. Poichè possiamo ottenere $\mathcal{R}_2$ a partire da $\mathcal{R}_1$ tramite la seguente simmetria

$$(x, y) \to (x, -y) \qquad \text{riflessione rispetto all'asse } x$$

valgono le seguenti proprietà $I_{11}^{\mathcal{R}_1} = I_{11}^{\mathcal{R}_2}$ e $I_{22}^{\mathcal{R}_1} = I_{22}^{\mathcal{R}_2}$, percio per $\mathcal{T}$ avremo che $I_{11}^{\mathcal{T}} = 2I_{11}^{\mathcal{R}_1}$, $I_{22}^{\mathcal{T}} = 2I_{22}^{\mathcal{R}_1}$.

Calcoliamo i momenti di inerzia per il triangolo $\mathcal{R}_1$:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \frac{b}{a}x,\ z = 0\}$$

con $a = \sqrt{3}r$ e $b = r$;

$$\begin{aligned} I_{11}^{\mathcal{R}_1} &= \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} \sigma y^2 dy dx = \frac{1}{12}\sigma a b^3 = \frac{\sqrt{3}}{12}\sigma r^4 \\ I_{22}^{\mathcal{R}_1} &= \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} \sigma x^2 dy dx = \frac{1}{4}\sigma a^3 b = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sigma r^4 \end{aligned}$$

Quindi per il triangolo $\mathcal{T}$ abbiamo i seguenti valori:

$$I_{11}^{\mathcal{T}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma r^4, \qquad I_{22}^{\mathcal{T}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sigma r^4.$$

Per i momenti di inerzia di $\mathcal{D}-$, utilizziamo le coordinate polari:

$$\mathcal{D}- = \{(\rho, \theta, z) \mid 0 \le \rho \le r,\ \pi/6 \le \theta \le 11\pi/6,\ z = 0\}$$

per cui

$$\begin{aligned} I_{11}^{\mathcal{D}-} &= \int_{\mathcal{D}} \sigma y^2 dx dy = \int_0^r \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \sigma \rho^3 \sin^2\theta d\theta d\rho = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sigma r^4 \\ I_{22}^{\mathcal{D}-} &= \int_{\mathcal{D}} \sigma x^2 dx dy = \int_0^r \int_{\pi/6}^{11\pi/6} \sigma \rho^3 \cos^2\theta d\theta d\rho = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sigma r^4 \end{aligned}$$

Perciò per la lamina completa avremo

$$\begin{aligned} I_{11} =& I_{11}^{\mathcal{T}} + I_{11}^{\mathcal{D}-} = \frac{1}{48}(10\pi + 11\sqrt{3})\sigma r^4 = \frac{1}{8}\frac{10\pi + 11\sqrt{3}}{5\pi + 6\sqrt{3}} m r^2 \\ I_{22} =& I_{22}^{\mathcal{T}} + I_{22}^{\mathcal{D}-} = \frac{1}{48}(10\pi + 69\sqrt{3})\sigma r^4 = \frac{1}{8}\frac{10\pi + 69\sqrt{3}}{5\pi + 6\sqrt{3}} m r^2 \\ I_{33} =& I_{11} + I_{22} = \frac{1}{4}\frac{10\pi + 40\sqrt{3}}{5\pi + 6\sqrt{3}} m r^2 \end{aligned}$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità dei punti materiali:

$$(P-O) = s\mathbf{e}_1 + s^2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_P = \dot{s}(\mathbf{e}_1 + 2s\mathbf{e}_2)$$
$$(Q-O) = t^2\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_Q = \dot{t}(2t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

Calcolo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 + \frac{1}{2}M|\mathbf{v}_Q|^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2(1+4s^2) + \frac{1}{2}M\dot{t}^2(1+4t^2)$$

da cui ricaviamo la matrice cinetica

$$A(\dot{s},\dot{t}) = \begin{bmatrix} m(1+4s^2) & 0 \\ 0 & M(1+4t^2) \end{bmatrix}$$

Calcoliamo l'energia potenziale

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{elas}} = \frac{1}{2}k|P-Q|^2 = \frac{1}{2}k\left((s-t^2)^2 + (s^2-t)^2\right)$$

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

ii) Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial s} = k\left((s-t^2) + 2s(s^2-t)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} = k\left(-2t(s-t^2) - (s^2-t)\right) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$s - t^2 = -2s(s^2-t)$$

che possiamo sostituire alla seconda equazione, ottenendo:

$$4st(s^2-t) - (s^2-t) = 0 \implies (4st-1)(s^2-t) = 0$$

da cui $t = s^2$ oppure $t = 1/(4s)$ (con $s \neq 0$).

Nel primo caso $t = s^2$, la prima equazione diventa

$$s - s^4 = -2s(s^2-s^2) \implies s^4 - s = 0 \implies s = 0 \vee s = 1$$

da cui otteniamo i punti di equilibrio $(0,0)$ e $(1,1)$.

Nel secondo caso $t = 1/(4s)$, la prima equazione diventa

$$s - \frac{1}{16s^2} = -2s\left(s^2 - \frac{1}{4s}\right) \implies 2s^5 + s^3 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{16} = 0$$

che per Cartesio ha al massimo un'unica soluzione positiva (c'è solo una variazione di segno tra i monomi) e nessuna negativa (non ci sono variazioni di segno quando sostituisco $-s$ a s). Si verifica facilmente che $s = 1/2$ è soluzione dell'equazione. Otteniamo quindi un ulteriore punto di equilibrio $(1/2, 1/2)$.

iii) Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, calcolo il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di $\mathcal{V}$ valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(s,t)^2} = k\begin{bmatrix} 1+6s^2-2t & -2s-2t \\ -2s-2t & 1-2s+6t^2 \end{bmatrix}$$

Valuto $\mathcal{V}''$ nelle tre configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0,0) = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = k > 0$
Entrambi gli autovalori sono positivi, quindi il punto $(0,0)$ è un minimo di $\mathcal{V}$ ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichilet.

$$\mathcal{V}''(1,1) = k\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det = 9k^2 > 0$ e $\mathrm{tr} = 10k > 0$
Entrambi gli autovalori sono positivi, quindi il punto $(1,1)$ è un minimo di $\mathcal{V}$ ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichilet.

$$\mathcal{V}''(1/2,1/2) = k\begin{bmatrix} 3/2 & -2 \\ -2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$\det = -(7/4)k^2 < 0$ e $\mathrm{tr} = 3k > 0$
Un autovalore è negativo, quindi il punto $(1/2, 1/2)$ è instabile perchè esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo.

iv) Calcolo le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile $(0,0)$

$$A(0,0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad A^{-1}\mathcal{V}''(0,0) = \begin{bmatrix} k/m & 0 \\ 0 & k/M \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = \frac{k}{m}$ e $\lambda_2 = \frac{k}{M}$.
Le frequenze proprie delle piccole oscillazioni sono quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$