

Compito di Meccanica Razionale 18 Settembre 2024

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = -\frac{e^{1/\rho}}{\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

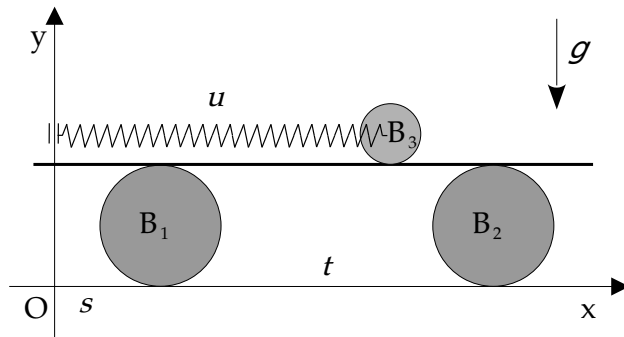
Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c e α .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c e α .
- iii) Sia $\alpha = -3$, sul piano del moto $O\hat{e}_1\hat{e}_2$ si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, -1), \quad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia limitata.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. In tale piano si consideri il moto di un sistema meccanico composto da tre dischi omogenei: \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 hanno massa M e raggio R , mentre \mathcal{D}_3 ha massa m e raggio r . I dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 rotolano senza strisciare sull'asse Ox e su un'asta di massa trascurabile e lunghezza ℓ che è appoggiata su di essi. Infine, il disco \mathcal{D}_3 rotola senza strisciare sull'asta, dalla parte opposta degli altri due dischi (si veda la figura).

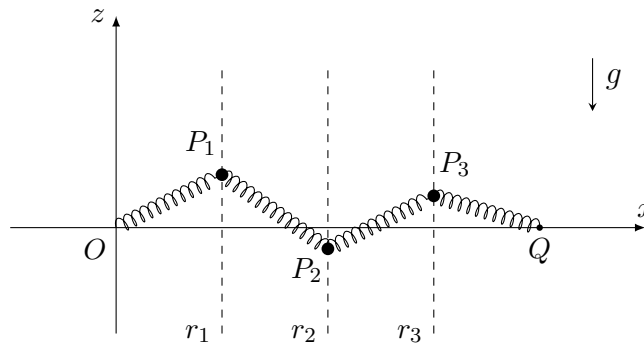


Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso. Inoltre, una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega il

baricentro del disco \mathcal{D}_3 all'asse Oy , rimanendo sempre orizzontale. Sia s l'ascissa del baricentro B_1 del disco \mathcal{D}_1 , $s + t$ l'ascissa del baricentro B_2 del disco \mathcal{D}_2 e u l'ascissa del baricentro B_3 del disco \mathcal{D}_3 .

- i) Dimostrare che in questa configurazione t è necessariamente costante.
- ii) Calcolare la velocità angolare dei tre dischi.
- iii) Calcolare la componente orizzontale delle reazioni vincolari agenti sui dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 nei loro punti di contatto con l'asse Ox .
- iv) Scrivere le equazioni del moto del sistema mediante le equazioni cardinali.

Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz , con asse Oz verticale ascendente, e si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 di massa m vincolati rispettivamente a scorrere senza attrito su tre rette verticali r_1, r_2, r_3 passanti per i punti di coordinate $(x, z) = (\ell, 0), (2\ell, 0), (3\ell, 0)$, con $\ell > 0$. Sui tre punti agiscono delle forze elastiche esercitate da quattro molle uguali, di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Queste molle sono disposte come in figura: due di esse collegano P_i a P_{i+1} con $i = 1, 2$, le altre due collegano P_1 al punto O e P_3 al punto Q di coordinate $(x, z) = (4\ell, 0)$. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso.



Per descrivere le configurazioni del sistema si usino le ordinate z_1, z_2, z_3 dei punti P_1, P_2, P_3 lungo le rette r_1, r_2, r_3 .

- i) Mostrare che il sistema meccanico ha un'unica configurazione di equilibrio $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, che è stabile.
- ii) Calcolare le frequenze proprie ed i modi normali delle piccole oscillazioni attorno a questa configurazione.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow -\frac{e^{1/\rho}}{\rho^2} + \frac{c^2 + \alpha}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho e^{1/\rho} = c^2 + \alpha$$

Per capire il numero di soluzioni, contiamo il numero di intersezioni per $\rho > 0$ tra il grafico della funzione $g(\rho) = \rho e^{1/\rho}$ e la retta orizzontale $h(\rho) = c^2 + \alpha$.

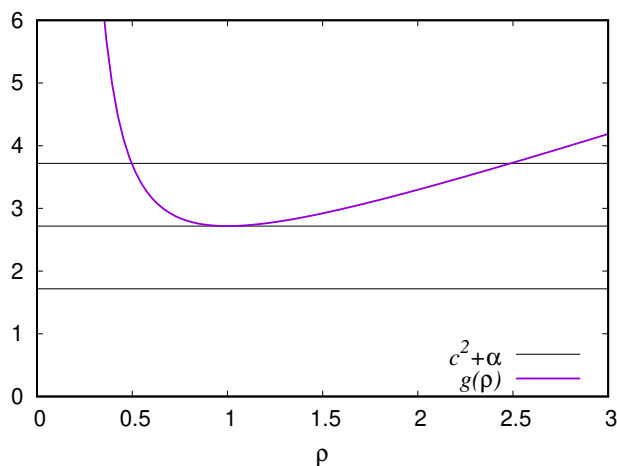
Per la funzione $g(\rho)$ vale che,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = +\infty$$

e che ha un unico punto stazionario (minimo) in

$$g'(\rho) = e^{1/\rho} - \frac{1}{\rho} e^{1/\rho} = 0 \rightarrow \bar{\rho} = 1,$$

in cui la funzione vale $g(\bar{\rho}) = e$. Perciò abbiamo i seguenti casi:



- se $c^2 + \alpha < e$ allora non ci sono intersezioni tra la retta e la funzione $g(\rho)$ (quindi nessuna orbita circolare).

- se $c^2 + \alpha = e$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 = 1$.

- se $c^2 + \alpha > e$ allora ci sono due intersezioni (quindi due orbite circolari), una per $\rho_1 < 1$ e una per $\rho_2 > 1$.

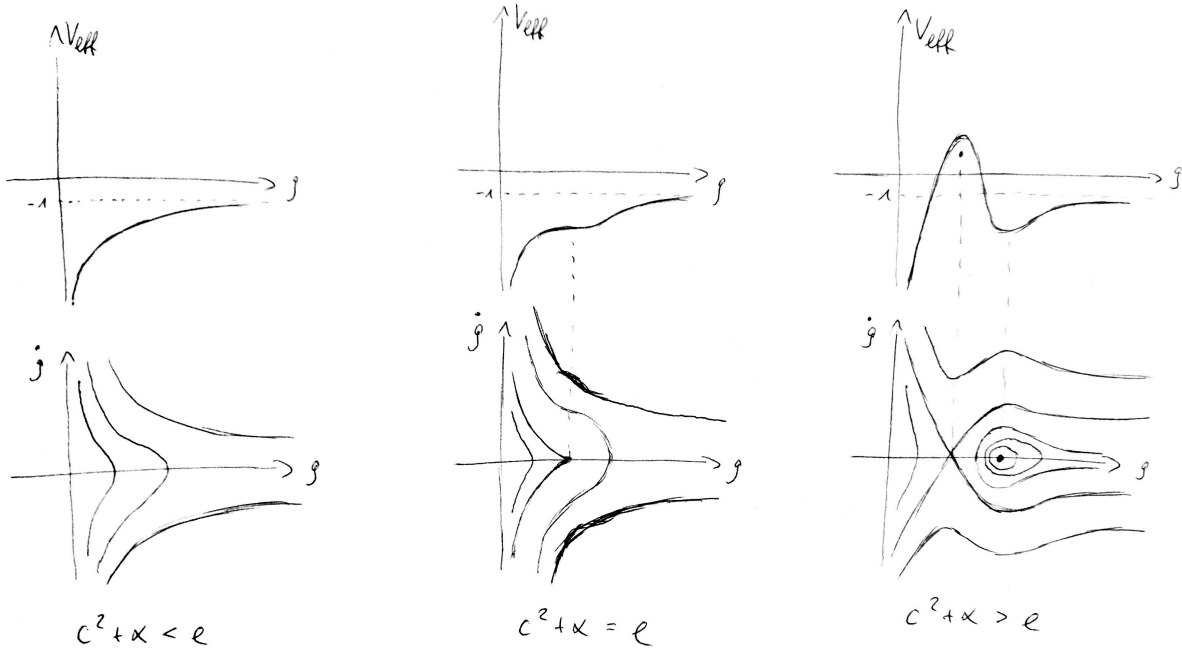
ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -e^{1/\rho} + \frac{c^2 + \alpha}{2\rho^2}$$

i cui limiti agli estremi del dominio valgono

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = -1$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



* si noti che il terzo ritratto può cambiare a seconda dell'altezza del punto di massimo (qualsiasi scelta ai fini della risoluzione dell'esercizio andava bene).

iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_2$, valutando le espressioni sopra all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = 1, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = -1.$$

Inoltre, possiamo calcolare il valore di c dalle condizioni iniziali:

$$c = \rho^2 \dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = -1$$

Poiché siamo nel caso $c^2 + \alpha = -2 < e$, dal ritratto di fase ridotto trovato nel punto ii), sappiamo che per avere un'orbita limitata la sua energia totale deve essere minore di -1 :

$$E = \frac{1}{2}\dot{\rho}(0)^2 + V_{\text{eff}}(\rho(0)) < -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}a^2 - e - 1 < -1 \quad \rightarrow \quad |a| < \sqrt{2e}$$

Esercizio 2.

- i) Siano Q_1 e Q_2 rispettivamente i punti di contatto dei dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 con l'asse Ox , e siano P_1 , P_2 e P_3 rispettivamente i punti di contatto dei dischi \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 e \mathcal{D}_3 con l'asta.

Per mostrare che t è costante, notiamo prima che dovendo l'asta stare sempre orizzontale, la sua velocità angolare è nulla. Perciò, dalla formula fondamentale della cinematica rigida, abbiamo che tutti i punti dell'asta hanno la stessa velocità. Calcoliamo le velocità dei punti P_1 e P_2 come punti dei dischi:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{P_1}^{(\mathcal{D}_1)} &= \mathbf{v}_{B_1} + \omega_1 \hat{\mathbf{e}}_3 \times (P_1 - B_1) = \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1 = 2\dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{v}_{P_2}^{(\mathcal{D}_2)} &= \mathbf{v}_{B_2} + \omega_2 \hat{\mathbf{e}}_3 \times (P_2 - B_2) = (\dot{s} + \dot{t}) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\dot{s} + \dot{t}) \hat{\mathbf{e}}_1 = 2(\dot{s} + \dot{t}) \hat{\mathbf{e}}_1\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato che $\omega_1 = -\dot{s}/R$ e $\omega_2 = -(\dot{s} + \dot{t})/R$

Ma usando l'ipotesi che i dischi rotolano senza strisciare sull'asta, cioè $\mathbf{v}_{P_i}^{(\text{asta})} = \mathbf{v}_{P_i}^{(\mathcal{D}_i)}$, e che $\mathbf{v}_{P_1}^{(\text{asta})} = \mathbf{v}_{P_2}^{(\text{asta})}$, otteniamo $2\dot{s} = 2(\dot{s} + \dot{t})$, che implica $\dot{t} = 0$.

- ii) Dagli esercizi svolti in classe (o dall'applicazione della formula fondamentale della cinematica rigida) sappiamo che le velocità angolari dei dischi \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 sono:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = -\frac{\dot{s} + \dot{t}}{R} \hat{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{\mathbf{e}}_3$$

Per calcolare la velocità angolare del disco \mathcal{D}_3 , usiamo la formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\mathbf{v}_{B_3} = \mathbf{v}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)} + \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \times (B_3 - P_3).$$

Dal punto precedente sappiamo che tutti i punti dell'asta hanno la stessa velocità, quindi $\mathbf{v}_{P_3}^{(\text{asta})} = 2\dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1$. Perciò la velocità angolare del disco \mathcal{D}_3 è (utilizzando l'ipotesi che rotola senza strisciare sull'asta, cioè $\mathbf{v}_{P_3}^{(\text{asta})} = \mathbf{v}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)}$):

$$\dot{u} \hat{\mathbf{e}}_1 = 2\dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1 - r \omega_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \rightarrow \boldsymbol{\omega}_3 = \frac{2\dot{s} - \dot{u}}{r} \hat{\mathbf{e}}_3$$

- iii) Per calcolare le reazioni vincolari richieste, utilizziamo la seconda equazione cardinale dei singoli dischi scegliendo come polo i loro punti di contatto con l'asta. Per il disco \mathcal{D}_1 abbiamo

$$\dot{\mathbf{M}}_{P_1}^{(\mathcal{D}_1)} = -\cancel{\mathbf{v}_{P_1} \times M \mathbf{v}_{B_1}} + \mathbf{N}_{P_1}^{(\mathcal{D}_1)}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{v}_{P_1} = \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_1$ è parallela a \mathbf{v}_{B_1} . Calcoliamo le altre quantità:

$$\mathbf{M}_{P_1}^{(\mathcal{D}_1)} = M(B_1 - P_1) \times \mathbf{v}_{B_1} + I_{B_1}^{(\mathcal{D}_1)} \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} M R \dot{s} \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{N}_{P_1}^{(\mathcal{D}_1)} = \cancel{(P_1 - P_1) \times \Phi_{P_1}} + \cancel{(B_1 - P_1) \times (-Mg)\hat{\mathbf{e}}_2} + (Q_1 - P_1) \times \Phi_{Q_1} = 2R\Phi_{Q_1,x}\hat{\mathbf{e}}_3$$

Dalla seconda equazione cardinale otteniamo quindi:

$$\Phi_{Q_1,x} = \frac{1}{4}M\ddot{s}$$

Da conti analoghi sul disco \mathcal{D}_2 otteniamo:

$$\Phi_{Q_2,x} = \frac{1}{4}M\ddot{s}$$

- iv) Possiamo ottenere la prima equazione del moto dalla prima equazione cardinale della dinamica per l'intero sistema (per cui le reazioni vincolari nei punti P_i sono da considerarsi come forze interne):

$$M\mathbf{a}_{B_1} + M\mathbf{a}_{B_2} + m\mathbf{a}_{B_3} = \mathbf{R}^{\text{ext}} \rightarrow 2M\ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_1 + m\ddot{u}\hat{\mathbf{e}}_1 = -(2M+m)g\hat{\mathbf{e}}_2 - ku\hat{\mathbf{e}}_1 + \Phi_{Q_1} + \Phi_{Q_2}$$

Proiettando lungo $\hat{\mathbf{e}}_1$ e sostituendo le componenti delle reazioni vincolari ottenute al punto precedente, troviamo la prima equazione del moto:

$$\frac{3}{2}M\ddot{s} + m\ddot{u} + ku = 0.$$

Possiamo poi ottenere la seconda equazione del moto prendendo la seconda equazione cardinale per il solo disco \mathcal{D}_3 scegliendo come polo P_3 :

$$\dot{\mathbf{M}}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)} = \cancel{-\mathbf{v}_{P_3} \times m\mathbf{v}_{B_3}} + \mathbf{N}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)}$$

dove abbiamo usato che $\mathbf{v}_{P_3} = \dot{u}\hat{\mathbf{e}}_1$ è parallela a \mathbf{v}_{B_3} . Calcoliamo le altre quantità:

$$\mathbf{M}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)} = m(B_3 - P_3) \times \mathbf{v}_{B_3} + I_{B_3}^{(\mathcal{D}_3)}\boldsymbol{\omega}_3 = mr \left(\dot{s} - \frac{3}{2}\dot{u} \right) \hat{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathbf{N}_{P_3}^{(\mathcal{D}_3)} = \cancel{(P_3 - P_3) \times \Phi_{P_3}} + \cancel{(B_3 - P_3) \times (-mg)\hat{\mathbf{e}}_2} + (B_3 - P_3) \times (-ku\hat{\mathbf{e}}_1) = kru\hat{\mathbf{e}}_3$$

Da cui otteniamo la seconda equazione del moto:

$$m\ddot{s} - \frac{3}{2}m\ddot{u} - ku = 0$$

Esercizio 3.

i) I punti P_i hanno posizioni e velocità:

$$P_i - O = i\ell\hat{\mathbf{e}}_1 + z_i\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{v}_i = \dot{z}_i\hat{\mathbf{e}}_2.$$

Calcoliamo l'energia potenziale del sistema (gravitazionale più elastica)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= mg(z_1 + z_2 + z_3) + \frac{1}{2}k(z_1^2 + \ell^2 + (z_1 - z_2)^2 + \ell^2 + (z_2 - z_3)^2 + \ell^2 + z_3^2 + \ell^2) \\ &= mg(z_1 + z_2 + z_3) + k(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3) + \text{costanti additive} \end{aligned}$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_1} = mg + 2kz_1 - kz_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2} = mg + 2kz_2 - kz_1 - kz_3 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_3} = mg + 2kz_3 - kz_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la terza equazione alla prima, otteniamo la nuova equazione $z_1 = z_3$, perciò il sistema diventa:

$$\begin{cases} z_2 = 2z_1 + mg/k \\ z_2 = z_1 - mg/(2k) \\ z_1 = z_3 \end{cases}$$

Da cui otteniamo un'unica soluzione

$$(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = \left(-\frac{3mg}{2k}, -2\frac{mg}{k}, -\frac{3mg}{2k} \right)$$

Per studiarne la stabilità, guardiamo gli autovalori della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nel punto:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial (z_1, z_2, z_3)^2} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice sono $(2 - \sqrt{2})k$, $2k$, $(2 + \sqrt{2})k$, i quali sono tutti positivi. Perciò, il punto di equilibrio è un minimo di \mathcal{V} e, per il teorema di Lagrange-Dirichlet, è stabile.

ii) Calcoliamo l'energia cinetica del sistema

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m (\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2).$$

da cui ricaviamo la matrice cinetica

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni calcolo gli autovalori della matrice $A^{-1}\mathcal{V}''$:

$$A^{-1}\mathcal{V}''(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e i suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = 2\frac{k}{m}, \quad \lambda_3 = (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}.$$

Le frequenze proprie cercate sono $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, 3$) e i modi normali sono le famiglie di soluzioni ($h = 1, 2, 3$):

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h) \mathbf{u}_h$$

dove c_h e φ_h dipendono dalle condizioni iniziali e \mathbf{u}_h sono autovettori di $A^{-1}\mathcal{V}''$:

$$\mathbf{u}_1 = (1, \sqrt{2}, 1)^T$$

$$\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)^T$$

$$\mathbf{u}_3 = (1, -\sqrt{2}, 1)^T$$