Primo compitino di Meccanica Razionale
18 Aprile 2023

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\,,\ \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \alpha\frac{e^{-\rho}}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} + \frac{2}{\rho^2}, \qquad \alpha \in [-1, 0]$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c e α.

ii) Sia $\alpha = 0$, calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare qualitativamente il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$. Supponendo che $c = 2\sqrt{2}$, determinare i valori dell'energia totale efficace per cui è possibile il moto.

iii) Sia $\alpha = 0$, sul piano del moto si prendano

$$\mathbf{x}(0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{3}{2}\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = a\hat{\mathbf{e}}_1 + b\hat{\mathbf{e}}_2, \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

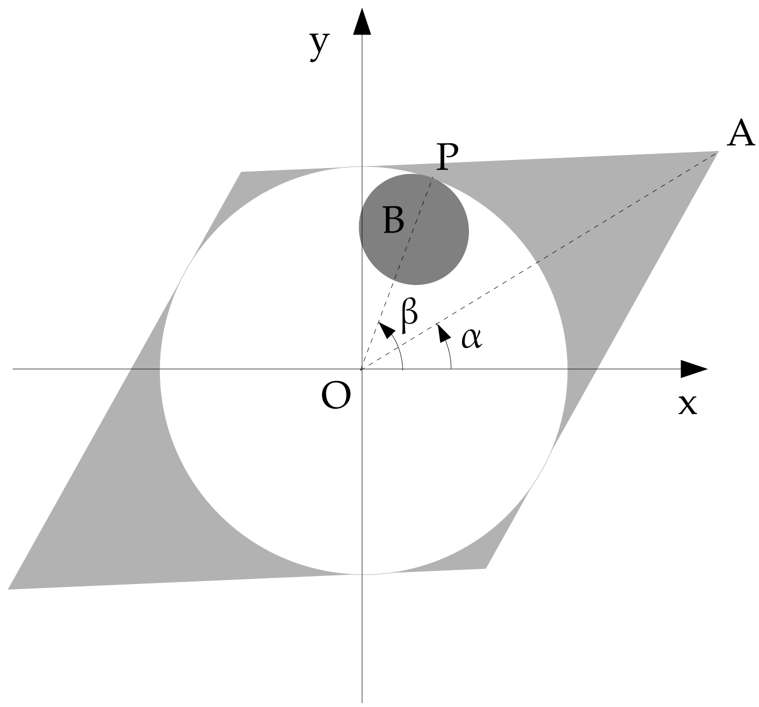
Trovare tutti i valori di a e b affinchè l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano si fissi un sistema di riferimento Oxy, con asse Oy verticale ascendente. Prendiamo una lamina $\mathcal{R}$ omogena di massa M a forma di un rombo con angoli di 60° e 120°. Successivamente, applichiamo un foro circolare di raggio R, centrato nel baricentro del rombo e tangente ai suoi quattro lati. Si consideri ora il sistema formato dalla lamina forata $\mathcal{R}_0$, il cui baricentro è incernierato all'origine O degli assi e da un disco $\mathcal{D}$ omogeneo di massa m e raggio r, che rotola senza strisciare sul bordo interno della lamina.

Sia A uno dei vertici del rombo sulla diagonale maggiore e B il baricentro del disco $\mathcal{D}$. Si usino come coordinate l'angolo α che OA forma con la direzione orizzontale e l'angolo β che OB forma con la direzione orizzontale (si veda la figura).

i) Calcolare i momenti principali di inerzia per la lamina $\mathcal{R}_0$ rispetto al suo baricentro.

ii) Calcolare la velocità angolare del disco $\mathcal{D}$.


y
P
A
B
β
α
O
x

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $-1 \leq \alpha \leq 0$, $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \to \alpha \frac{e^{-\rho} - \rho^2 + 2\rho + c^2}{\rho^3} = 0 \to \alpha e^{-\rho} = \rho^2 - 2\rho - c^2$$

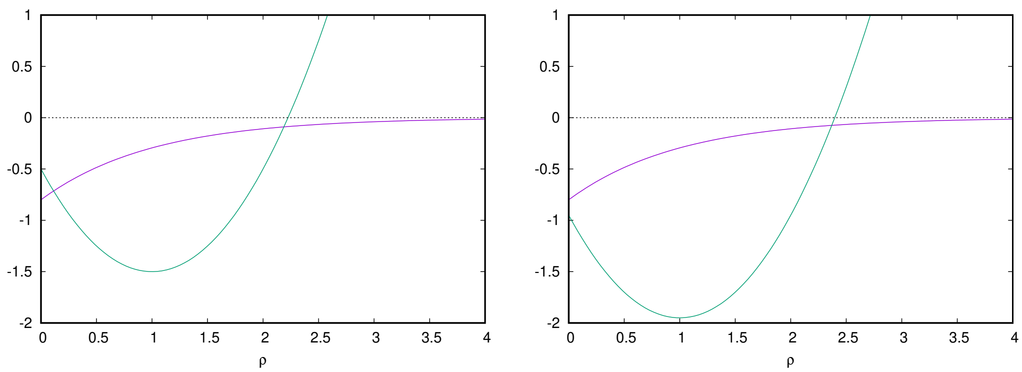
Studiamo prima il caso $\alpha \neq 0$. Per contare il numero di soluzioni, contiamo il numero di intersezioni per $\rho > 0$ tra il grafico della funzione a sinistra $g(\rho)$ (esponenziale) e di quella a destra $h(\rho)$ (parabola).
L'esponenziale ha esponente negativo e vale che

$$g(0) = \alpha < 0, \quad \lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = 0^-$$

Mentre la parabola ha la concavità verso l'alto, ha vertice in $\rho = 1$ e vale che

$$h(0) = -c^2 < 0, \quad \min h(\rho) = h(1) = -1 - c^2 < \alpha$$

Perciò abbiamo due casi:



Se $|c| < \sqrt{-\alpha}$ allora abbiamo due intersezioni (quindi due orbite circolari), una per $\rho < 1$ (a sinistra del vertice) e una per $\rho > 1$ (a destra del vertice).
Se $|c| \geq \sqrt{-\alpha}$ allora abbiamo un'unica intersezione (quindi un'unica orbita circolare), con $\rho > 1$ (a destra del vertice).
Infine se $\alpha = 0$ possiamo risolvere analiticamente l'equazione, in quanto:

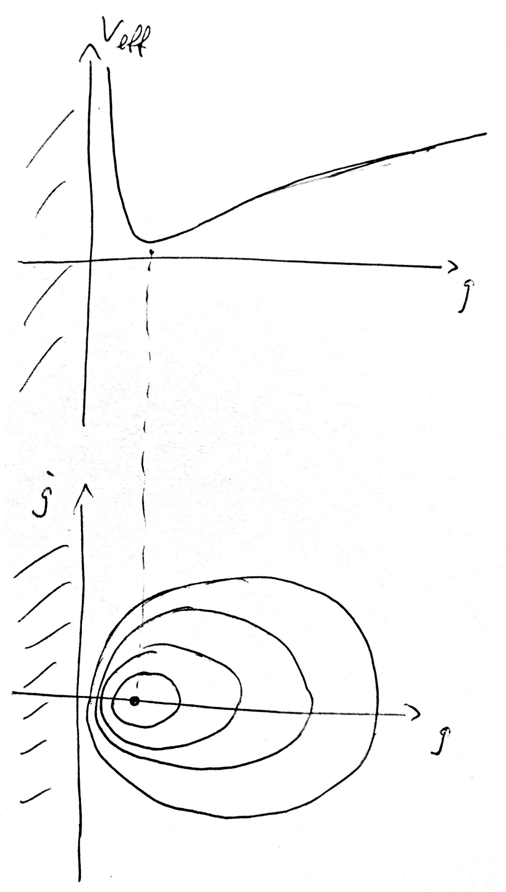
$$\rho^2 - 2\rho - c^2 = 0 \to \rho = 1 \pm \sqrt{1 + c^2}$$

di cui solo una soluzione è accettabile ($\rho > 0$), $\overline{\rho} = 1 + \sqrt{1 + c^2}$, per cui esiste un'unica orbita circolare per ogni valore di c.

ii) Nel caso $\alpha = 0$ l'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \log \rho + \frac{2}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

Come visto nel punto i), esiste un'unica orbita circolare, e quindi un unico punto stazionario di V_{eff}, di raggio $\overline{\rho} = 1 + \sqrt{1 + c^2}$. Siccome i limiti per $\rho \to 0^+$ e per $\rho \to +\infty$ sono uguali a $+\infty$, il punto stazionario è sicuramente un minimo e il ritratto di fase è come qui rappresentato



Infine i livelli di energia possibili sono tutti quelli maggiori o uguali a quello del punto di minimo di V_{eff}, dove $\overline{\rho} = 4$.

$$E_{\min} = E_{\text{eff}}(\overline{\rho}, 0) = \log 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \log 4 + \frac{3}{4}$$

Quindi $E \geq \log 4 + \frac{3}{4}$.

iii) Dalle condizioni iniziali date posso calcolare $\rho(0)$, e i versori polari $\hat{\mathbf{e}}_\rho(0)$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta(0)$:

$$\rho = |\mathbf{x}(0)| = 3, \quad \hat{\mathbf{e}}_\rho(0) = \frac{\mathbf{x}(0)}{\rho(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_2, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta(0) = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{e}}_2$$

Per avere un'orbita circolare, è necessario che $\dot{\rho}(0) = 0$, perciò $\dot{\mathbf{x}}(0)$ deve essere diretto lungo $\hat{\mathbf{e}}_\theta(0)$:

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = k\hat{\mathbf{e}}_\theta(0) = -\frac{k}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{3}k}{2}\hat{\mathbf{e}}_2$$

Poichè $k = \rho(0)\dot\theta(0)$, la costante del moto c vale $c = m\rho^2\dot\theta = 3k$.
Dal punto ii) sappiamo che l'unica orbita circolare ha raggio uguale a $\overline{\rho} = 1 + \sqrt{1+c^2}$, perciò per avere un'orbita circolare deve valere che $\rho(0) = \overline{\rho}$

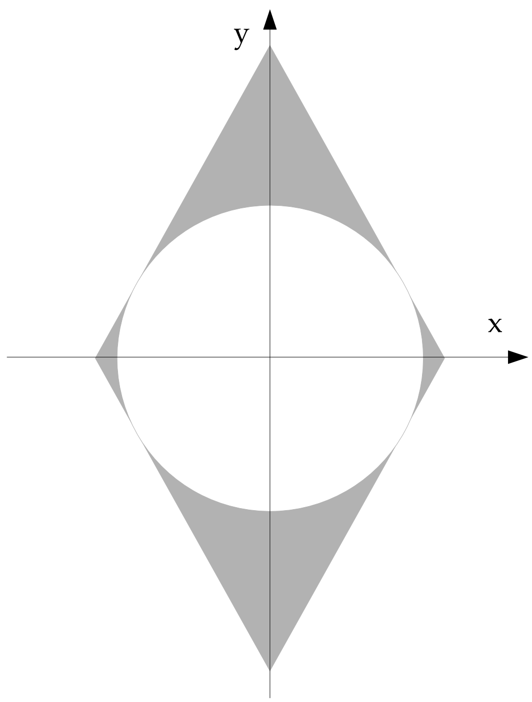
$$1 + \sqrt{1+9k^2} = 3 \to k^2 = \frac{1}{3} \to k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi i valori di a e b per avere un'orbita circolare sono:

$$(a,b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 2.

i) Il riferimento riportato in figura, con x lungo la diagonale minore e y lungo la diagonale maggiore, è principale di inerzia in quanto: $\mathbf{e}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano; $\mathbf{e}_1$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano yz che è di simmetria per riflessione per il corpo; $\mathbf{e}_2$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna, dove già gli altri due sono direzioni principali. Perciò la matrice di inerzia I in questo sistema di riferimento sarà diagonale.



Dato il raggio R del foro e la misura degli angoli del rombo, ottengo facilmente che il lato e le diagonali del rombo sono rispettivamente

$$\ell = (4/\sqrt{3})R, \quad d = \ell, \quad D = \sqrt{3}\ell = 4R$$

Perciò la massa M della lamina $\mathcal{R}$ (non forata) è $M = \sigma(\frac{8\sqrt{3}}{3})R^2$.
Per calcolare i momenti di inerzia di $\mathcal{R}_0$ rispetto al baricentro, faccio la differenza tra i momenti di inerzia del rombo pieno e del disco pieno. Calcolo i momenti di inerzia del rombo pieno, considerando lo stesso sistema di riferimento della figura. Poichè i momenti di inerzia I_{11} e I_{22} sono invarianti rispetto alle trasformazioni

$$(x, y) \to (-x, y) \quad \text{e} \quad (x, y) \to (x, -y)$$

posso calcolare questi momenti per un solo triangolo rettangolo che compone il rombo ($\mathcal{T}_1$, quello nel quarto quadrante). I momenti di inerzia per il rombo saranno quattro volte quelli di $\mathcal{T}_1$. Sia $a = (2/\sqrt{3})R$ il cateto minore e $b = 2R$ il cateto maggiore:

$$\mathcal{T}_1 = \{(x, y, z)| -a \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x + b,\ z = 0\}$$

$$I_{22}^{\mathcal{R}} = 4I_{22}^{\mathcal{T}_1} = 4\int_{-a}^{0}\int_{0}^{\sqrt{3}x+b} \sigma x^2 dydx = ... = 4\frac{1}{12}\sigma a^3 b = \sqrt{3}\frac{16}{27}\sigma R^4 = \frac{2}{9}MR^2$$

Con un calcolo analogo si ottiene che

$$I_{11}^{\mathcal{R}} = 4I_{11}^{\mathcal{T}_1} = 4\frac{1}{12}\sigma ab^3 = \sqrt{3}\frac{16}{9}\sigma R^4 = \frac{2}{3}MR^2$$

Per il disco pieno invece sappiamo che

$$I_{11}^{\mathcal{D}} = I_{22}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 = \frac{\sqrt{3}\pi}{32}MR^2$$

Per trovare i momenti principali di inerzia della lamina forata $\mathcal{R}_0$ basta fare la differenza

$$\begin{aligned}
I_1^{\mathcal{R}_0} &= I_{11}^{\mathcal{R}} - I_{11}^{\mathcal{D}} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{32}\right)MR^2 \\
I_2^{\mathcal{R}_0} &= I_{22}^{\mathcal{R}} - I_{22}^{\mathcal{D}} = \left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{32}\right)MR^2 \\
I_3^{\mathcal{R}_0} &= I_1^{\mathcal{R}_0} + I_2^{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{8}{9} - \frac{\sqrt{3}\pi}{16}\right)MR^2
\end{aligned}$$

ii) La velocità angolare di $\mathcal{R}_0$ è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{R}_0} = \dot{\alpha}\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo α rispetto a Oxy. Per calcolare la velocità angolare del disco interno $\mathcal{D}$ utilizzo la formula fondamentale della cinematica. Le posizioni dei punti che utilizzeremo sono:

$$\begin{aligned}
(B - O) &= (R - r)(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2), \\
(P - O) &= R(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2)
\end{aligned}$$

Calcolo la velocità di P come punto solidale a $\mathcal{R}_0$, che per il vincolo di puro rotolamento sarà uguale alla velocità di P come punto solidale a $\mathcal{D}$ ($\mathbf{v}_P^{(\mathcal{R}_0)} = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})}$)

$$\mathbf{v}_P^{(\mathcal{R}_0)} = \cancel{\mathbf{v}_O} + \dot{\alpha}\mathbf{e}_3 \times (P - O) = -R\dot{\alpha}\sin\beta\mathbf{e}_1 + R\dot{\alpha}\cos\beta\mathbf{e}_2$$

La velocità di B come punto solidale al disco è:

$$\mathbf{v}_B = -(R-r)\dot{\beta}\sin\beta\mathbf{e}_1 + (R-r)\dot{\beta}\cos\beta\mathbf{e}_2$$

Applico la formula fondamentale della cinematica per $\mathcal{D}$

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} = \mathbf{v}_B + \omega^{\mathcal{D}}\mathbf{e}_3 \times (P - B) \\
-R\dot{\alpha}\sin\beta\mathbf{e}_1 + R\dot{\alpha}\cos\beta\mathbf{e}_2 = -(R-r)\dot{\beta}\sin\beta\mathbf{e}_1 + (R-r)\dot{\beta}\cos\beta\mathbf{e}_2 + \\
\omega^{\mathcal{D}}\mathbf{e}_3 \times (r\cos\beta\mathbf{e}_1 + r\sin\beta\mathbf{e}_2) \\
\to \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = \frac{R\dot{\alpha} - (R-r)\dot{\beta}}{r}\mathbf{e}_3
\end{gathered}$$