

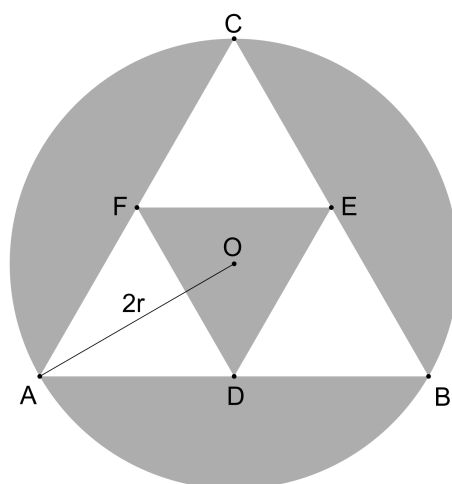
Compito di Meccanica Razionale

15 Luglio 2024

Esercizio 1. Si consideri una lamina piana omogenea \mathcal{L} di massa m , ottenuta rimuovendo da un disco di raggio $2r$ un triangolo equilatero ABC inscritto in esso, con l'eccezione del triangolo equilatero DEF , i cui vertici coincidono con i punti medi dei lati di ABC (si veda la figura).

Sia O il baricentro di \mathcal{L} , il quale coincide con quello di ABC e di DEF .

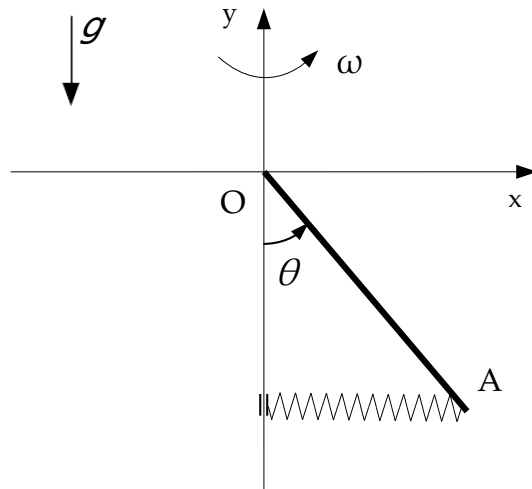
- i) Dimostrare che ogni retta passante per O e giacente nel piano della figura è un asse principale di inerzia per \mathcal{L} .
- ii) Calcolare i momenti principali di inerzia di \mathcal{L} rispetto ad O .



Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ . Un estremo dell'asta è incernierato nell'origine O e l'altro estremo A è collegato all'asse Oy da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che si mantiene sempre parallela all'asse Ox . Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione $g > 0$ e rivolta verso il basso. Il piano del sistema meccanico viene fatto ruotare attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Tutti i vincoli sono ideali.

Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che l'asta forma con la direzione verticale.

- i) Trovare il valore di ω per cui l'asta è in equilibrio nel sistema rotante per $\vartheta = \pi/4$.
- ii) Per la configurazione di equilibrio del punto precedente calcolare la reazione vincolare $\vec{\Phi}$ sviluppata sull'estremo dell'asta incernierato in O .



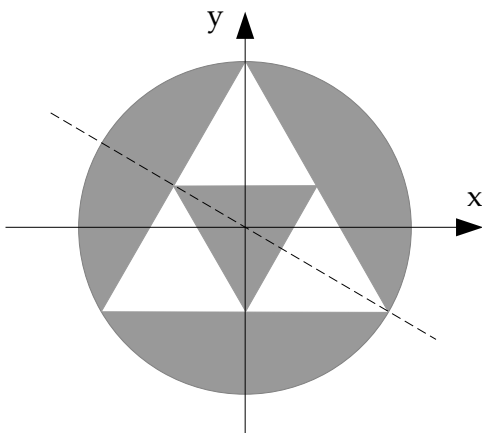
Esercizio 3. In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio $r > 0$, mentre un punto materiale Q , anch'esso di massa m , è vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = x^2$. I due punti sono collegati tra di loro da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Si usino come coordinate lagrangiane l'angolo ϑ che il segmento OP forma con l'asse Ox e l'ascissa s del punto Q .

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema.
- ii) Posto $r = \sqrt{2}$, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- iii) Sempre per $r = \sqrt{2}$, studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

Esercizio 1.

- i) Fissiamo un sistema di riferimento $Oxyz$ con origine nel baricentro O come in figura: l'asse Oy lungo l'altezza del triangolo ABC , l'asse Ox sempre nel piano della figura e perpendicolare ad Oy e l'asse Oz uscente dal piano della figura. Siano $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i versori ortonormali associati al sistema $Oxyz$.



Il versore \hat{e}_3 definisce una direzione principale, perché il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano Oe_1e_2 ; e_1 è una direzione principale, perché ortogonale al piano Oyz che è di simmetria per riflessione per il corpo; e_2 è una direzione principale, perché l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali. Inoltre, possiamo trovare un ulteriore piano di riflessione per la figura, perpendicolare al piano della figura e passante per la linea tratteggiata in figura. Esiste quindi almeno un'altra direzione principale di inerzia nel piano. Allora, per una proposizione vista a lezione, vale che tutte le direzioni del tipo $\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ sono principali di inerzia per la lamina \mathcal{L} . Inoltre, per la stessa proposizione, tali direzioni hanno tutte lo stesso momento di inerzia, quindi in particolare $I_1 = I_2 = I$ e $I_3 = 2I$

- ii) Conoscendo il raggio $2r$ del disco, possiamo ricavare le dimensioni dei triangoli equilateri presenti in figura. In particolare, usando argomenti base di geometria, otteniamo:

$$AB = 2\sqrt{3}r, \quad AD = \sqrt{3}r, \quad CD = 3r.$$

Perciò l'area della lamina \mathcal{L} è uguale all'area del disco, meno quella di ABC e più quella di DEF :

$$A_{\mathcal{L}} = 4\pi r^2 - 3\sqrt{3}r^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{4\pi - 9\sqrt{3}}{4}r^2$$

e la densità σ della lamina vale

$$\sigma = \frac{4m}{(16\pi - 9\sqrt{3})r^2}$$

Per calcolare i momenti di inerzia di \mathcal{L} rispetto al baricentro O , consideriamo un sistema di riferimento uguale a quello del punto precedente. Calcoliamo per esempio I_2 , che possiamo vedere come somma e differenza del momento di inerzia delle varie figure che compongono \mathcal{L} : disco, triangolo ABC (da sottrarre) e triangolo DEF (da aggiungere).

Calcoliamo i momenti di inerzia dei triangoli equilateri, per esempio ABC . Siccome il valore di I_{22} non cambia prendendo come polo un altro punto sull'asse Oy , scegliamo come polo il punto medio della base D . Inoltre, possiamo considerare ABC formato dai due triangoli rettangoli congruenti ADC e DBC . Poiché I_{22} è invariante rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, y)$, posso calcolare tale momento per un solo triangolo rettangolo (per esempio DBC). I momenti di inerzia per ABC saranno due volte quelli di DBC , il cui supporto è descritto da:

$$DBC = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq -(b/a)x + b, z = 0\}$$

dove $a = \sqrt{3}r$ e $b = 3r$. Perciò:

$$I_2^{(ABC)} = 2I_{22}^{(DBC)} = 2 \int_0^a \int_0^{-(b/a)x+b} \sigma x^2 dy dx = \dots = 2 \frac{1}{12} \sigma a^3 b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \sigma r^4$$

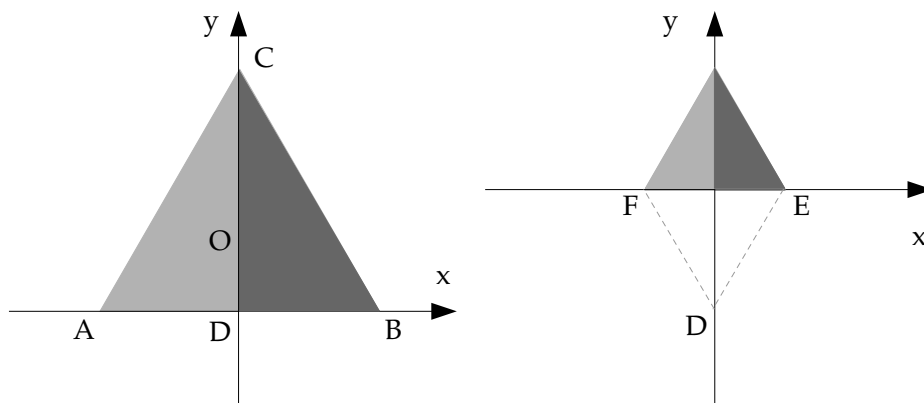
Lo stesso procedimento vale per il triangolo DEF (il fatto che sia ribaltato rispetto alla direzione orizzontale non cambia il valore di I_{22} , in quanto è invariante rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (x, -y)$). In questo caso abbiamo $a = (\sqrt{3}/2)r$ e $b = (3/2)r$, perciò:

$$I_2^{(DEF)} = 2 \frac{1}{12} \sigma a^3 b = \frac{3\sqrt{3}}{32} \sigma r^4$$

Quindi per la lamina \mathcal{L} vale:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} \sigma \pi (2r)^4 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sigma r^4 + \frac{3\sqrt{3}}{32} \sigma r^4 = \frac{128\pi - 45\sqrt{3}}{8(16\pi - 9\sqrt{3})} m r^2$$

$$I_3 = 2I_2 = \frac{128\pi - 45\sqrt{3}}{4(16\pi - 9\sqrt{3})} m r^2$$



Esercizio 2.

- i) Per trovare la condizione di equilibrio, calcolo l'energia potenziale del sistema. Essendo in un sistema di riferimento rotante, devo considerare anche l'energia potenziale generalizzata data dalle forze apparenti. Nella configurazione del problema, possiamo considerare solo l'energia potenziale della forza centrifuga, la quale agisce su tutti i punti dell'asta.

I punti dell'asta sono descritti dalle coordinate

$$(P - O) = r \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1 - r \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_2$$

con $r \in [0, 2\ell]$ (il baricentro si ottiene per $r = \ell$). Perciò l'energia potenziale centrifuga può essere calcolata tramite l'integrale

$$\mathcal{V}_c = - \int_0^{2\ell} \frac{1}{2} \lambda |\omega \hat{\mathbf{e}}_2 \times (P - O)|^2 dr = -\frac{1}{2} \lambda \omega^2 \sin^2 \vartheta \int_0^{2\ell} r^2 dr = -\frac{2}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \vartheta$$

L'energia potenziale totale è:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_g + \mathcal{V}_e + \mathcal{V}_c = -mg\ell \cos \vartheta + 2k\ell^2 \sin^2 \vartheta - \frac{2}{3} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \vartheta$$

La condizione per avere una configurazione di equilibrio è $\partial \mathcal{V} / \partial \vartheta = 0$:

$$mg\ell \sin \vartheta + 4 \left(k - \frac{1}{3} m \omega^2 \right) \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0$$

Ponendo $\vartheta = \pi/4$, otteniamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2} mg\ell + 2 \left(k - \frac{1}{3} m \omega^2 \right) \ell^2 = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{4m\ell} (\sqrt{2}mg + 4k\ell)}$$

- ii) Per trovare il valore della reazione vincolare in O nella configurazione precedente, possiamo usare la prima equazione cardinale della dinamica:

$$m \mathbf{a}_B = \mathbf{R}^{(E)}$$

dove \mathbf{a}_B è l'accelerazione del baricentro dell'asta, mentre $\mathbf{R}^{(E)}$ è la risultante delle forze esterne agenti sull'asta. Essendo l'asta in equilibrio, $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$. Per calcolare la risultante delle forze, calcolo prima la risultante della forza centrifuga:

$$\mathbf{F}_c = - \int_0^{2\ell} \lambda \omega \hat{\mathbf{e}}_2 \times (\omega \hat{\mathbf{e}}_2 \times (B - O)) dr = \lambda \omega^2 \sin \vartheta \int_0^{2\ell} r dr \hat{\mathbf{e}}_1 = m \omega^2 \ell \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1$$

Perciò abbiamo

$$\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c + \mathbf{\Phi} = -mg\hat{\mathbf{e}}_2 - 2k\ell \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1 + m\omega^2 \ell \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{\Phi}$$

Siccome dalla prima equazione cardinale $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$, proiettando sia lungo $\hat{\mathbf{e}}_1$ che lungo $\hat{\mathbf{e}}_2$, otteniamo le due componenti della reazione vincolare:

$$\begin{aligned}\Phi_x &= (2k - m\omega^2) \ell \sin \vartheta = -\frac{3}{4}mg - \frac{\sqrt{2}}{2}k\ell \\ \Phi_y &= mg\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\vartheta = \pi/4$ e ω come trovato nel punto precedente.

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità dei punti materiali:

$$\begin{aligned}(P - O) &= r \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1 + r \sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_2, & \mathbf{v}_P &= r \dot{\vartheta} (-\sin \vartheta \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos \vartheta \hat{\mathbf{e}}_2) \\(Q - O) &= s \hat{\mathbf{e}}_1 + s^2 \hat{\mathbf{e}}_2, & \mathbf{v}_Q &= \dot{s} (\hat{\mathbf{e}}_1 + 2s \hat{\mathbf{e}}_2)\end{aligned}$$

Calcolo l'energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} |\mathbf{v}_P|^2 + \frac{m}{2} |\mathbf{v}_Q|^2 = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 (1 + 4s^2)$$

da cui ricavo la matrice cinetica

$$A(\dot{\vartheta}, \dot{s}) = \begin{bmatrix} m r^2 & 0 \\ 0 & m(1 + 4s^2) \end{bmatrix}$$

Calcolo l'energia potenziale

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{elas}} &= \frac{1}{2} k |P - Q|^2 = \frac{1}{2} k ((r \cos \vartheta - s)^2 + (r \sin \vartheta - s^2)^2) \\ &= \frac{1}{2} k (s^4 + s^2 - 2rs^2 \sin \vartheta - 2rs \cos \vartheta) + \text{costanti additive}\end{aligned}$$

La lagrangiana è quindi $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$, con \mathcal{T} e \mathcal{V} come calcolate sopra.

ii) Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta} = k r s (\sin \vartheta - s \cos \vartheta) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s} = k (2s^3 + s - 2rs \sin \vartheta - r \cos \vartheta) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione ottengo

$$s = 0 \quad \vee \quad \sin \vartheta = s \cos \vartheta.$$

Nel primo caso, la seconda equazione si riduce a $\cos \vartheta = 0$, da cui ottengo le due configurazioni di equilibrio

$$(\vartheta, s) = (\pi/2, 0), (3\pi/2, 0).$$

Nel secondo caso, la seconda equazione diventa

$$2s^3 + s - 2rs^2 \cos \vartheta - r \cos \vartheta = 0 \rightarrow (2s^2 + 1)(s - r \cos \vartheta) = 0$$

da cui si ricava $s = r \cos \vartheta$. Combinando tale equazione con $\sin \vartheta = s \cos \vartheta$, e ponendo $r = \sqrt{2}$, otteniamo

$$\tan \vartheta = r \cos \vartheta \rightarrow r \sin^2 \vartheta + \sin \vartheta - r = 0 \rightarrow \sin \vartheta = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}} \rightarrow \sin \vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui ricaviamo altre due configurazioni di equilibrio:

$$(\vartheta, s) = (\pi/4, 1), (3\pi/4, -1).$$

Si noti che tali punti corrispondono ai punti di intersezione tra la circonferenza e la parabola.

- iii) In tutto ci sono quattro configurazioni di equilibrio. Per studiarne la stabilità, studio il segno degli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(\vartheta, s)^2} = k \begin{bmatrix} rs(s \sin \vartheta + \cos \vartheta) & r \sin \vartheta - 2rs \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta - 2rs \cos \vartheta & 6s^2 + 1 - 2r \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

Valuto \mathcal{V}'' nelle quattro configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(\pi/2, 0) = k \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}''(3\pi/2, 0) = k \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$\det = -2k^2 < 0$:

uno dei due autovalori è negativo, quindi le configurazioni $(\pi/2, 0)$ e $(3\pi/2, 0)$ sono instabili perchè esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo.

$$\mathcal{V}''(\pi/4, 1) = \mathcal{V}''(3\pi/4, -1) = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det = 9k^2 > 0$ e $\text{tr} = 7k > 0$:

Entrambi gli autovalori sono positivi, quindi le configurazioni $(\pi/4, 1)$ e $(3\pi/4, -1)$ sono minimi di \mathcal{V} e sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.