

Compito di Meccanica Razionale 14 Settembre 2022

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \rho - \frac{\alpha^2}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

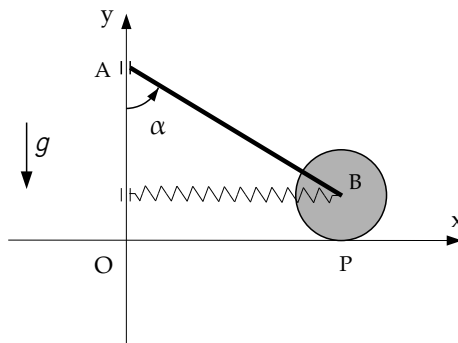
- i) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto, supponendo $c \neq 0$.
- ii) Nel caso $|\alpha| < |c|$, determinare l'estremo inferiore ρ_{min} della distanza di P dal centro di forze in funzione di α , c e dell'energia totale E .
- iii) Sia $\alpha = \sqrt{5}$ e sul piano del moto si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, a), \quad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema formato da un'asta \mathcal{A} omogenea di massa m e lunghezza ℓ , e da un disco \mathcal{D} omogeneo di massa M e raggio R . Il disco rotola senza strisciare sull'asse Ox , mentre l'asta ha l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse Ox e l'estremo B incernierato al baricentro del disco \mathcal{D} . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g , diretta verso il basso. Inoltre, una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega B all'asse Oy , rimanendo sempre orizzontale. Infine, supponiamo che il vincolo in A sia liscio.

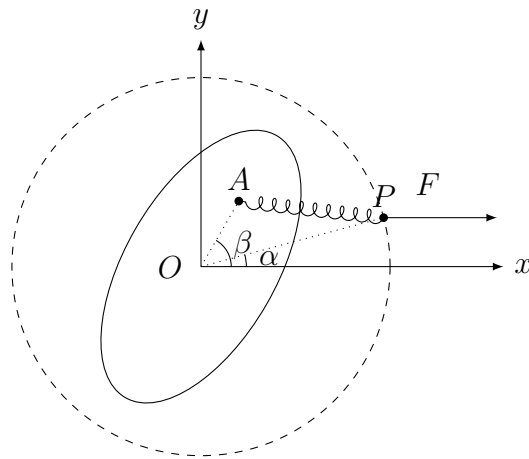
Si usi come coordinata l'angolo α che AB forma con la direzione verticale (si veda la figura).



- i) Calcolare le velocità angolari di \mathcal{A} e \mathcal{D} .
- ii) Calcolare le reazioni vincolari in A e P in funzione di α e delle sue derivate temporali.
- iii) Calcolare le equazioni di moto del sistema mediante le equazioni cardinali.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si introduca un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema meccanico formato da una lamina ellittica omogenea di massa m , semiasse maggiore a ed eccentricità e . Il centro della lamina è incernierata nell'origine O in modo che essa possa ruotare senza attrito. Fa parte del sistema anche un punto materiale P di massa M , che può muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R ($R > r$) centrata in O . Sul punto P agisce una forza costante $F\hat{e}_1$, $F > 0$, dove \hat{e}_1 è il versore dell'asse Ox . Inoltre uno dei due fuochi della lamina ellittica, denotato con A , è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura).



Usando come coordinate lagrangiane gli angoli α e β , che OP e OA formano rispettivamente con l'asse Ox ,

1. calcolare le configurazioni di equilibrio del sistema e determinarne la stabilità;
2. calcolare il momento di inerzia I_3 della lamina ellittica rispetto all'asse passante per O e ortogonale al piano della lamina;
3. calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 1.

- i) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha \neq 0$, $c \neq 0$ e $m = 1$. Prima di tutto cerco eventuali orbite circolari nel piano del moto, che come sappiamo corrispondono a punti stazionari del potenziale efficace. Risolvo quindi l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

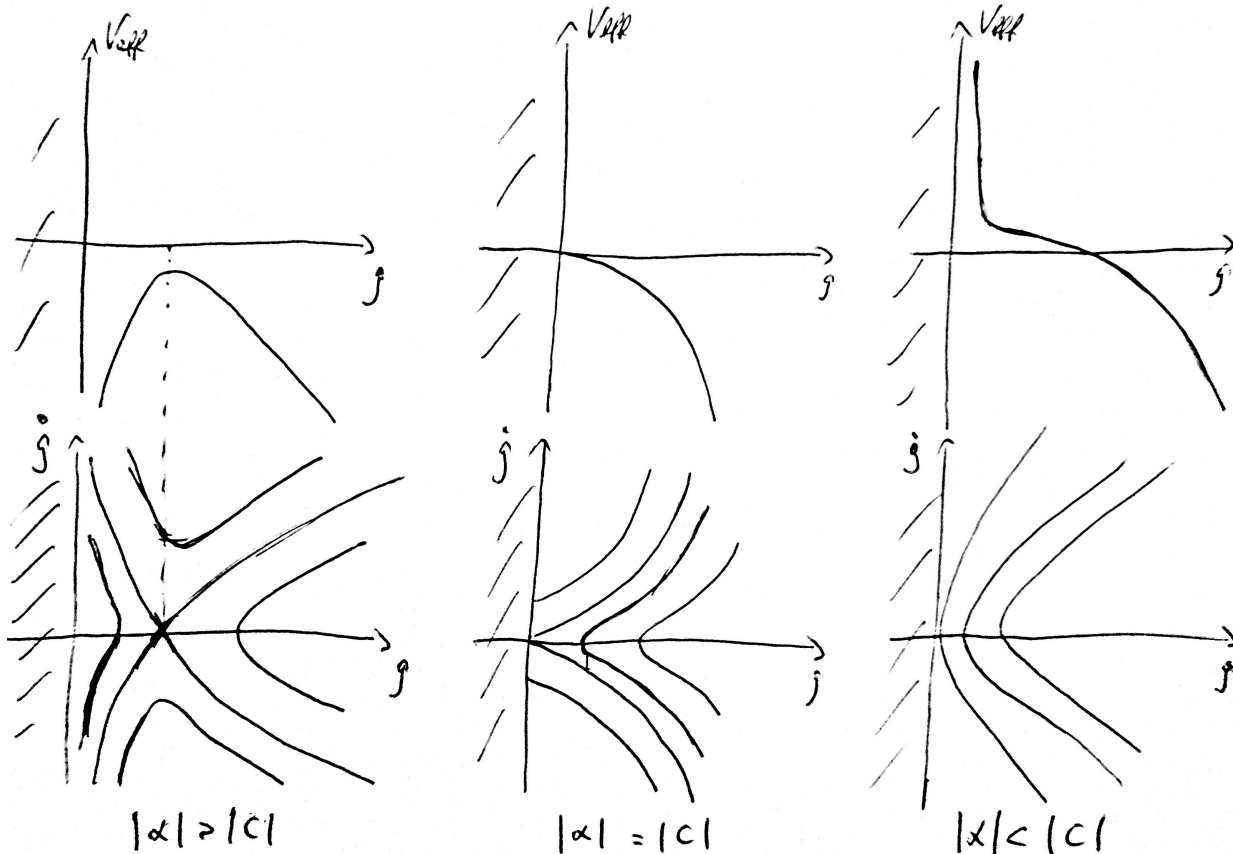
$$\rho + \frac{c^2 - \alpha^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^4 + (c^2 - \alpha^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \sqrt[4]{\alpha^2 - c^2}, \quad (|\alpha| > |c|)$$

Quindi se $|\alpha| > |c|$, esiste un'unica orbita circolare;
e se $|\alpha| \leq |c|$, non esistono orbite circolari.

Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{\rho^2}{2} + \frac{c^2 - \alpha^2}{2\rho^2}$$

Il ritratto di fase dipende dai parametri c e α ; abbiamo tre casi qualitativamente diversi:



- ii) Dalle ipotesi abbiamo che $|\alpha| < |c|$, quindi tracciato un livello di energia E abbiamo un punto di inversione ρ_{\min} . Per trovare il suo valore risolvo l'equazione:

$$E = -\frac{\rho^2}{2} + \frac{c^2 - \alpha^2}{2\rho^2} \quad \rightarrow \quad \rho^4 + 2E\rho^2 + (\alpha^2 - c^2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_{\min} = \sqrt{-E + \sqrt{E^2 - (\alpha^2 - c^2)}}$$

la quale è l'unica soluzione positiva (e quindi accettabile) dell'equazione.

- iii) Dalle ipotesi abbiamo che $\alpha = \sqrt{5}$. Dalle condizioni iniziali date posso calcolare $\rho(0)$, e i versori polari $\hat{\mathbf{e}}_\rho(0)$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta(0)$:

$$\rho = |\mathbf{x}(0)| = 1, \quad \hat{\mathbf{e}}_\rho(0) = \frac{\mathbf{x}(0)}{\rho(0)} = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta(0) = \hat{\mathbf{e}}_2$$

Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

possiamo calcolare il valore di c dalle condizioni iniziali

$$c = \rho^2\dot{\theta} = \rho^2(0)\dot{\theta}(0) = a$$

Vogliamo trovare a affinché $1 = \rho(0) = \bar{\rho} = \sqrt[4]{\alpha^2 - c^2}$

$$\sqrt[4]{5 - a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad a = \pm 2$$

Esercizio 2.

- i) Scriviamo le posizioni dei punti che utilizzeremo per il calcolo delle velocità angolari:

$$(P - O) = \ell \sin \alpha \mathbf{e}_1,$$

$$(B - O) = \ell \sin \alpha \mathbf{e}_1 + R \mathbf{e}_2$$

La velocità angolare di \mathcal{A} è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{A}} = \dot{\alpha} \mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo α rispetto ad Oxy . Per il disco basta applicare la formula fondamentale della cinematica rigida, imponendo che $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} = 0$.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P^{(\mathcal{D})} + \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} \mathbf{e}_3 \times (B - P)$$

$$\ell \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_1 = -\boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} R \mathbf{e}_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}^{\mathcal{D}} = -(\ell/R) \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_3$$

ii) Le reazioni vincolari in A e P sono della forma:

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \Phi_A^x \mathbf{e}_1 + \Phi_A^y \mathbf{e}_2 = \Phi_A^x \mathbf{e}_1 \\ \Phi_P &= \Phi_P^x \mathbf{e}_1 + \Phi_P^y \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

dove ho usato l'ipotesi di vincolo liscio in A .

Calcoliamo la prima equazione cardinale per tutto il sistema:

$$M\mathbf{a}_B + m\mathbf{a}_C = \sum_i \mathbf{F}_i$$

dove C è il baricentro dell'asta e le forze comprese sono la forza di gravità sui due corpi, la forza elastica della molla e le reazioni vincolari in A e P .

$$\begin{aligned}(C - O) &= (\ell/2) \sin \alpha \mathbf{e}_1 + (R + (\ell/2)) \cos \alpha \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_C &= (\ell/2) \dot{\alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{a}_C &= (\ell/2) (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \mathbf{e}_1 - (\ell/2) (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{a}_B &= \ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \mathbf{e}_1\end{aligned}$$

La prima equazione cardinale diventa quindi

$$\begin{aligned}(M + m/2) \ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \mathbf{e}_1 - (m/2) \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \mathbf{e}_2 = \\ (-k\ell \sin \alpha + \Phi_A^x + \Phi_P^x) \mathbf{e}_1 + (-(M + m)g + \Phi_P^y) \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

e proiettando sui due versori ottengo

$$\begin{cases} \Phi_A^x + \Phi_P^x = (M + m/2) \ell (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + k\ell \sin \alpha \\ \Phi_P^y = -(m/2) \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) + (M + m)g \end{cases}$$

Manca un'ulteriore equazione per poter esplicitare le tre componenti delle forze vincolari. Utilizzo la seconda equazione cardinale con polo B per il solo disco:

$$\dot{\mathbf{M}}_B^D = \cancel{-\mathbf{v}_B \times M\mathbf{v}_B} + \mathbf{N}_B^D$$

Calcolo i vari elementi:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^D &= I_B \boldsymbol{\omega}^D = -(1/2)MRl\dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_3 \\ \dot{\mathbf{M}}_B^D &= -(1/2)MRl(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_B^D = \cancel{(B - B) \times (-k\ell \sin \alpha \mathbf{e}_1 - Mg\mathbf{e}_2)} + (P - B) \times (\Phi_P^x \mathbf{e}_1 + \Phi_P^y \mathbf{e}_2) = R\Phi_P^x \mathbf{e}_3$$

Quindi in conclusione

$$\begin{cases} \Phi_P^x = -(1/2)Ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ \Phi_P^y = (m/2)\ell(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) + (M + m)g \\ \Phi_A^x = (1/2)(3M + m)\ell(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + k\ell \sin \alpha \end{cases}$$

iii) Per scrivere l'equazione del moto (un'unica equazione, poichè abbiamo una sola variabile) scrivo un'equazione cardinale che non ho ancora utilizzato. Non c'è bisogno che sia pura, perchè posso sostituirci le reazioni vincolari trovate nel punto ii). Scelgo la seconda equazione cardinale con polo B per la sola asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B^A = -\mathbf{v}_B \times m\mathbf{v}_C + \mathbf{N}_B^A$$

Calcolo i vari elementi:

$$\mathbf{M}_B^A = m(C - B) \times \mathbf{v}_B + I_B \boldsymbol{\omega}^A = m(-(\ell/2) \sin \alpha \mathbf{e}_1 + (\ell/2) \cos \alpha \mathbf{e}_2) \times \ell \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_1 + (m\ell^2/3) \dot{\alpha} \mathbf{e}_3 =$$

$$(-(m/2)\ell^2 \dot{\alpha} \cos^2 \alpha + (m/3)\ell^2 \dot{\alpha}) \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{M}}_B^A = (-(m/2)\ell^2 \ddot{\alpha} \cos^2 \alpha + m\ell^2 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha + (m/3)\ell^2 \ddot{\alpha}) \mathbf{e}_3$$

Il secondo membro dell'equazione cardinale è:

$$-\mathbf{v}_B \times m\mathbf{v}_C = -m(\ell \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_1) \times (\ell/2) \dot{\alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2) = (m/2)\ell^2 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\mathbf{N}_B^A = \underbrace{(B - B)}_{\text{cancella}} \times (-k\ell \sin \alpha \mathbf{e}_1) + (M - B) \times (-mg \mathbf{e}_2) + (A - B) \times (\Phi_A^x \mathbf{e}_1) =$$

$$((m/2)g\ell \sin \alpha - \Phi_A^x \ell \cos \alpha) \mathbf{e}_3$$

Sostituendo Φ_A^x , proiettando su \mathbf{e}_3 e eliminando i termini che si cancellano nell'equazione, otteniamo:

$$\frac{1}{3}m\ell^2 \ddot{\alpha} + \frac{3}{2}M\ell^2(\ddot{\alpha} \cos^2 \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha \sin \alpha) = mg\frac{\ell}{2} \sin \alpha - k\ell^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni dei punti A e P , ricordando che la distanza di un fuoco dal centro dell'ellisse è uguale ad ae :

$$(P - O) = R(\cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2),$$

$$(A - O) = ae(\cos \beta \mathbf{e}_1 + \sin \beta \mathbf{e}_2)$$

Calcolo l'energia potenziale:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_F + \mathcal{V}_{\text{elas}} = -F\mathbf{e}_1 \cdot (P - O) + \frac{1}{2}k|P - A|^2 =$$

$$-FR \cos \alpha + \frac{1}{2}k(R^2 + a^2e^2 - 2Rae \cos \alpha \cos \beta - 2Rae \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$-FR \cos \alpha - kRae \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{a meno di costanti additive})$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio pongo le derivate parziali di \mathcal{V} rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \alpha} = FR \sin \alpha + kRae \sin(\alpha - \beta) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \beta} = -kRae \sin(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ottengo che $\sin(\alpha - \beta) = 0$ e sostituendola alla prima che $\sin \alpha = 0$. Le uniche configurazioni di equilibrio sono quindi:

$$(\alpha, \beta) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$$

Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio calcolo gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice hessiana di \mathcal{V} valutata nei punti corrispondenti:

$$\mathcal{V}'' = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial(\alpha, \beta)^2} = \begin{bmatrix} FR \cos \alpha + kRae \cos(\alpha - \beta) & -kRae \cos(\alpha - \beta) \\ -kRae \cos(\alpha - \beta) & kRae \cos(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

Valuto \mathcal{V}'' nelle quattro configurazioni di equilibrio

$$\mathcal{V}''(0, 0) = \begin{bmatrix} FR + kRae & -kRae \\ -kRae & kRae \end{bmatrix}$$

$$\det = FkR^2ae > 0 \text{ e } \text{tr} = FR + 2kRae > 0$$

Siccome $\det > 0$ e $\text{tr} > 0$, allora $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (0, 0)$ è un minimo di \mathcal{V} , quindi è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet

$$\mathcal{V}''(0, \pi) = \begin{bmatrix} FR - kRae & kRae \\ kRae & -kRae \end{bmatrix}$$

$$\det = -FkR^2ae < 0 \text{ e } \text{tr} = FR - 2kRae$$

Siccome $\det < 0$ esiste un $\lambda_i < 0 \implies (0, \pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$\mathcal{V}''(\pi, 0) = \begin{bmatrix} -FR - kRae & kRae \\ kRae & -kRae \end{bmatrix}$$

$$\det = FkR^2ae > 0 \text{ e } \text{tr} = -FR - 2kRae < 0$$

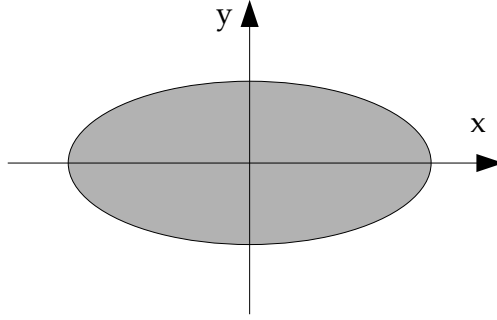
Siccome $\det > 0$ e $\text{tr} < 0$, allora $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \implies (\pi, 0)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

$$\mathcal{V}''(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} -FR + kRae & -kRae \\ -kRae & kRae \end{bmatrix}$$

$$\det = -FkR^2ae < 0 \text{ e } \text{tr} = -FR + 2kRae$$

Siccome $\det < 0$ esiste un $\lambda_i < 0 \implies (\pi, \pi)$ instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo

- ii) Considero il sistema di riferimento riportato in figura, con l'asse delle x lungo l'asse maggiore dell'ellisse e l'asse delle y lungo quello minore.



Posso descrivere i punti dell'ellisse con le variabili

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = (b/a)\rho \sin \theta \end{cases}$$

dove $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Con queste coordinate i punti del corpo rigido sono

$$\mathcal{C} = \{(\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z = 0\}$$

Essendo una figura piana $I_3 = I_{33}$, inoltre l'area è πab e la massa $m = \sigma \pi ab$.

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_{\mathcal{C}} \sigma(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma \left(\rho^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \rho^2 \sin^2 \theta \right) \left(\frac{b}{a}\right) \rho d\rho d\theta = \\ &= \sigma \left(\frac{b}{a}\right) \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\rho^3 \cos^2 \theta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \rho^3 \sin^2 \theta \right) d\rho d\theta = \dots = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2) = \frac{1}{4} m a^2 (2 - e^2) \end{aligned}$$

iii) Poichè la velocità angolare dell'ellisse è $\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} \mathbf{e}_3$, l'energia cinetica del sistema è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M |\mathbf{v}_P|^2 + \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_O|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{4} m a^2 (2 - e^2) \dot{\beta}^2$$

La matrice cinetica è quindi

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} MR^2 & 0 \\ 0 & (1/4)ma^2(2 - e^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

Per trovare le frequenze delle piccole oscillazioni risolvo l'equazione secolare

$$\det(\mathcal{V}''(0,0) - \lambda \mathcal{A}) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} FR + kRae - p\lambda & -kRae \\ -kRae & kRae - q\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} pq\lambda^2 - ((FR + kRae)q + (kRae)p)\lambda + FkR^2ae &= 0 \rightarrow \\ \lambda &= \frac{(FR + kRae)q + (kRae)p \pm \sqrt{((kRae)p + (FR + kRae)q)^2 - 4pqFkR^2ae}}{2pq} \end{aligned}$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$ e $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$