Quinto compito di Meccanica Razionale
14 Febbraio 2024

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,,\ \rho = |\boldsymbol{x}|$$

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\rho^5}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si supponga che la componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto sia diversa da zero.

i) Trovare tutte le orbite circolari al variare di α e c.

ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot\rho)$ al variare di α e c.

iii) Sia $\alpha = 0$ e nel piano del moto $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$ si scelga

$$\boldsymbol{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

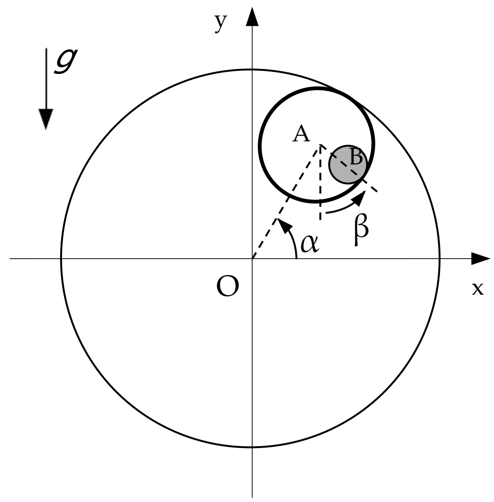
Trovare l'estremo inferiore e superiore della distanza dell'orbita con condizioni iniziali $(\boldsymbol{x}(0), \dot{\boldsymbol{x}}(0))$ dall'origine O.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un anello $\mathcal{A}$ di massa M e raggio R rotola senza strisciare sul bordo interno di una guida circolare centrata in O e di raggio $\ell > R$. Inoltre, un disco $\mathcal{D}$ di massa m e raggio $r < R$ rotola senza strisciare sul bordo interno di $\mathcal{A}$. Sul sistema agisce la forza di gravità di intensità $g > 0$ e rivolta verso il basso.

Sia A il baricentro dell'anello $\mathcal{A}$ e B il baricentro del disco $\mathcal{D}$. Si usino come coordinate l'angolo α che OA forma con la direzione orizzontale e l'angolo β che AB forma con la direzione verticale (si veda la figura).

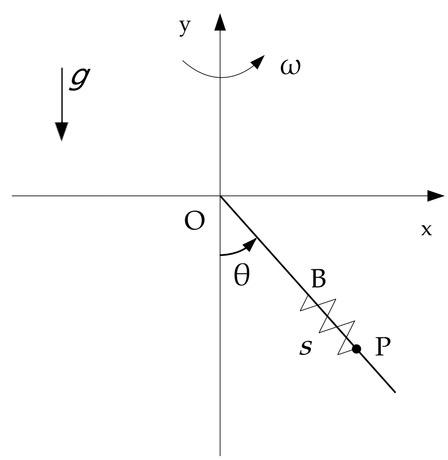
i) Calcolare le velocità angolari di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$.

ii) Scrivere la seconda equazione cardinale per il solo disco $\mathcal{D}$ prendendo come polo il punto di contatto tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{D}$.



Esercizio 3. In un piano verticale si introduca un sistema di riferimento Oxy. In tale piano consideriamo un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ con un estremo vincolato all'origine O. Al baricentro B dell'asta è collegato un estremo di una molla di costante $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla e all'altro estremo della molla è attaccato un punto materiale P di massa m che può scivolare lungo l'asta. Il piano viene fatto ruotare attorno all'asse verticale Oy con velocità angolare costante $\omega > 0$. Sul sistema agisce la forza di gravità, con accelerazione g.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P contata a partire dal baricentro dell'asta B e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale (vedi figura).



1. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento ruotante.

2. Scrivere le equazioni per gli equilibri relativi e individuare i valori dei parametri m, g, ℓ, k, ω per cui ci sono equilibri con $\theta = 0, \pi$ (il punto P deve restare tra i due estremi dell'asta).

3. Assumendo $\frac{mg}{k\ell} = \frac{1}{4}$, e ponendo $\omega^2 = \alpha\frac{g}{\ell}$, mostrare che possiamo trovare $\alpha > 0$ tale che ci sia un equilibrio con $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\rho^5} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \;\rightarrow\; \alpha\rho^4 + c^2\rho^2 - 1 = 0$$

Chiamiamo $z = \rho^2$, così da avere la seguente equazione di secondo grado:

$$\alpha z^2 + c^2 z - 1 = 0$$

le cui soluzioni (per $\alpha \neq 0$ e quando esistono) sono

$$z_{1,2} = \frac{-c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4\alpha}}{2\alpha}$$

dove denotiamo z_1 la soluzione con il $+$ e z_2 quella con il $-$.
Abbiamo i seguenti casi:

- se $\alpha > 0$, allora z_1 è positiva ($\sqrt{c^4 + 4\alpha} > c^2$) e z_2 negativa. Perciò abbiamo un'unica soluzione positiva e quindi un'unica orbita circolare con $\rho_1 = \sqrt{z_1}$.
- se $\alpha = 0$, allora l'equazione è di primo grado e abbiamo un'unica orbita circolare con $\rho_1 = 1/|c|$.
- se $\alpha < 0$ esistono diversi sottocasi, a seconda del segno del determinante (si noti che il denominatore delle soluzioni è negativo):
  - se $\alpha > -c^4/4$, allora esistono due soluzioni positive dell'equazione (in quanto $-c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4\alpha} < 0$) e quindi due orbite circolari con $\rho_1 = \sqrt{z_1}$ e $\rho_2 = \sqrt{z_2}$.
  - se $\alpha = -c^4/4$, allora esiste un'unica orbita circolare con $\rho_1 = |c|/\sqrt{-2\alpha} = \sqrt{2}/|c|$.
  - se $\alpha < -c^4/4$, allora non esistono soluzioni reali dell'equazione e quindi non ci sono orbite circolari.

ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\alpha \log \rho - \frac{1}{4\rho^4} + \frac{c^2}{2\rho^2}$$

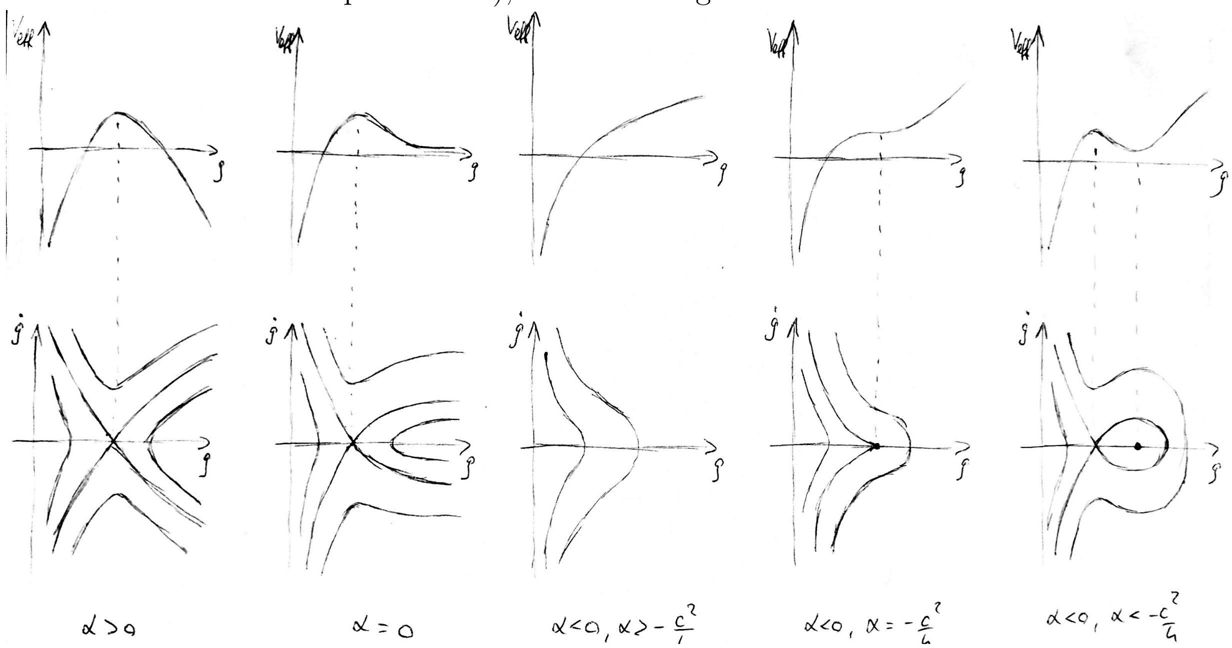
Per $\rho \to 0^+$ il termine dominante è il secondo, perciò

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = -\infty$$

mentre per $\rho \to +\infty$ il termine dominante è il primo (se $\alpha \neq 0$), perciò

$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0^+ & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



iii) Per $\alpha = 0$ sappiamo che esiste un unico punto stazionario di V_{eff}, $\rho_1 = 1/|c|$, il quale è un massimo. Dai dati iniziali si ricava facilmente che:

$$\rho(0) = 1, \qquad \dot\rho(0) = \frac{1}{4}, \qquad \rho(0)\dot\theta(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui possiamo calcolare il valore degli integrali primi:

$$c = \rho^2\dot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \overline{E} = \frac{\dot\rho^2}{2} + V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{32}$$

L'orbita circolare corrisponde al punto $(\rho, \dot\rho) = (\sqrt{2}, 0)$, e per tale orbita l'energia efficace totale vale $1/16$.

Poichè il livello dell'energia su cui si trova la condizione iniziale è minore di quella relativa al punto di massimo, e poichè $1 = \rho(0) < \rho_1 = \sqrt{2}$, l'orbita è limitata. Dal grafico ottenuto nel punto ii), sappiamo che il limite inferiore di ρ è 0 e che esiste un valore massimo, che corrisponde al punto di inversione $\rho_{\max}$:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \overline{E} \;\rightarrow\; -\frac{1}{4\rho^4} + \frac{1}{4\rho^2} = \frac{1}{32} \;\rightarrow\; \rho^4 - 8\rho^2 + 8 = 0$$

da cui otteniamo le soluzioni $\rho = \sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}$. La soluzione col $+$ corrisponde al punto di inversione dell'orbite illimitata a destra del punto di massimo, mentre il punto di inversione che stiamo cercando è dato dalla soluzione con il $-$: $\rho_{\max} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$, che possiamo verificare essere $< \rho_1 = \sqrt{2}$.

Esercizio 2.

i) Scriviamo le posizioni dei punti che utilizzeremo (indichiamo con P il punto di contatto tra la guida e $\mathcal{A}$, e con Q il punto di contatto tra l'anello e il disco):

$$\begin{aligned}
(P-O) &= \ell(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2),\\
(A-O) &= (\ell-R)(\cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2)\\
(Q-O) &= (A-O) + R(\sin\beta\mathbf{e}_1 - \cos\beta\mathbf{e}_2),\\
(B-O) &= (A-O) + (R-r)(\sin\beta\mathbf{e}_1 - \cos\beta\mathbf{e}_2)
\end{aligned}$$

Per la condizione di rotolamento senza striciamento di $\mathcal{A}$ sulla guida, vale che $\mathbf{v}_P^{(\mathcal{A})} = \mathbf{v}_P^{(\mathrm{guida})} = 0$. Usiamo la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare la velocità angolare di $\mathcal{A}$ ($\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{A})} = \omega^{(\mathcal{A})}\mathbf{e}_3$):

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}_A = \cancel{\mathbf{v}_P} + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{A})} \times (A-P)\\
(\ell-R)\dot\alpha(-\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2) = R\omega^{(\mathcal{A})}(\sin\alpha\mathbf{e}_1 - \cos\alpha\mathbf{e}_2)\\
\implies \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{A})} = -\frac{\ell-R}{R}\dot\alpha\mathbf{e}_3
\end{gathered}$$

Per la condizione di rotolamento senza striciamento di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{A}$, vale che $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D})} = \mathbf{v}_Q^{(\mathcal{A})}$. Uso la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{A})}$

$$\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{A})} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{A})} \times (Q-A) = \mathbf{v}_A - (\ell-R)\dot\alpha(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2)$$

Ora uso la formula fondamentale della cinematica rigida per calcolare la velocità angolare di $\mathcal{D}$ ($\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D})} = \omega^{(\mathcal{D})}\mathbf{e}_3$):

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D})} + \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D})} \times (B-Q)\\
\cancel{\mathbf{v}_A} + (R-r)\dot\beta(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2) = \cancel{\mathbf{v}_A} - (\ell-R)\dot\alpha(\cos\beta\mathbf{e}_1 + \sin\beta\mathbf{e}_2) + r\omega^{(\mathcal{D})}(-\cos\beta\mathbf{e}_1 - \sin\beta\mathbf{e}_2)\\
\implies \boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D})} = -\frac{(\ell-R)\dot\alpha + (R-r)\dot\beta}{r}\mathbf{e}_3
\end{gathered}$$

ii) L'equazione cardinale che dobbiamo esplicitare è

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{(\mathcal{D})} = -\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(\mathcal{D})}$$

Calcoliamo il momento angolare di $\mathcal{D}$ rispetto al polo Q

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}_Q^{(\mathcal{D})} = I_B^{(\mathcal{D})}\boldsymbol{\omega}^{(\mathcal{D})} + (B-Q) \times m\mathbf{v}_B =\\
\frac{1}{2}mr^2\left(-\frac{(\ell-R)\dot\alpha + (R-r)\dot\beta}{r}\right)\mathbf{e}_3 + r\left(-\sin\beta\mathbf{e}_1 + \cos\beta\mathbf{e}_2\right)\times\\
\times m\left(\left(-(\ell-R)\dot\alpha\sin\alpha + (R-r)\dot\beta\cos\beta\right)\mathbf{e}_1 + \left((\ell-R)\dot\alpha\cos\alpha + (R-r)\dot\beta\sin\beta\right)\mathbf{e}_2\right) =\\
\frac{1}{2}mr\left(-(\ell-R)\dot\alpha - 3(R-r)\dot\beta + 2(\ell-R)\dot\alpha\sin(\alpha-\beta)\right)\mathbf{e}_3
\end{gathered}$$

Calcoliamo la sua derivata temporale

$$\dot{\mathbf{M}}_Q^{(\mathcal{D})} = \frac{1}{2} mr \left(-(\ell - R)\ddot{\alpha} - 3(R-r)\ddot{\beta} + 2(\ell - R)\ddot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) + 2(\ell - R)\dot{\alpha}(\dot{\alpha} - \dot{\beta}) \cos(\alpha - \beta) \right) \mathbf{e}_3$$

Calcoliamo il primo termine del membro di destra dell'equazione cardinale (dove $\mathbf{v}_Q$ è la velocità del polo Q, che otteniamo facendo la derivata temporale delle sue coordinare, quindi in particolare è diversa da $\mathbf{v}_Q^{(\mathcal{D})}$. Si noti che la maggior parte dei termini di questo prodotto vettore si cancella.)

$$-\mathbf{v}_Q \times m\mathbf{v}_B = -m(\ell - R) r \dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)$$

Infine calcoliamo il momento delle forze su $\mathcal{D}$ rispetto al polo Q

$$\mathbf{N}_Q^{(\mathcal{D})} = (B - Q) \times (-mg\mathbf{e}_2) = mgr \sin\beta \mathbf{e}_3$$

L'equazione cercata é

$$-\frac{\ell - R}{2}\ddot{\alpha} - \frac{3(R-r)}{2}\ddot{\beta} + (\ell - R)\ddot{\alpha} \sin(\alpha - \beta) + (\ell - R)\dot{\alpha}^2 \cos(\alpha - \beta) = g \sin\beta$$

Esercizio 3.

i) Scriviamo le posizioni e le velocità del punto P e del baricentro B:

$$(B-O) = \ell \sin\theta \mathbf{e}_1 - \ell\cos\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_B = \ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta)\mathbf{e}_2$$
$$(P-O) = (\ell+s)\sin\theta\mathbf{e}_1 - (\ell+s)\cos\theta\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{v}_P = ((\ell+s)\dot{\theta}\cos\theta + \dot{s}\sin\theta)\mathbf{e}_1 + ((\ell+s)\dot{\theta}\sin\theta - \dot{s}\cos\theta)\mathbf{e}_2$$

L'energia cinetica è data dal contributo dell'asta più quello del punto materiale (ricordiamo che per l'asta vale che $I_O = (4/3)m\ell^2$ e ha velocità angolare $\dot{\theta}\mathbf{e}_3$; usiamo il polo O poichè conveniente essendo fisso):

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\ell+s)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

L'energia potenziale è la somma di diversi contributi (elastica, gravitazionale, centrifuga)

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathrm{e}} + \mathcal{V}_{\mathrm{g},P} + \mathcal{V}_{\mathrm{g},\mathcal{A}} + \mathcal{V}_{\mathrm{c},P} + \mathcal{V}_{\mathrm{c},\mathcal{A}}$$

Per calcolare $\mathcal{V}_{\mathrm{c},\mathcal{A}}$ consideriamo l'integrale su tutta l'asta ($\lambda = m/(2\ell)$)

$$\mathcal{V}_{\mathrm{c},\mathcal{A}} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\ell} \lambda\omega^2 r^2 \sin^2\theta dr = -\frac{2}{3}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta$$

L'espressione completa dell'energia potenziale è

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}ks^2 - mgs\cos\theta - 2mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2(s+\ell)^2\sin^2\theta - \frac{2}{3}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta$$

e la lagrangiana è $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$.

ii) Scriviamo le equazioni da cui si ricavano configurazioni di equilibrio ponendo le derivate parziali di $\mathcal{V}$ rispetto alle coordinate lagrangiane uguali a zero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial s} = ks - mg\cos\theta - m\omega^2(\ell+s)\sin^2\theta = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\theta} = mgs\sin\theta + 2mg\ell\sin\theta - m\omega^2(s+\ell)^2\sin\theta\cos\theta - (4/3)m\omega^2\ell^2\sin^2\theta = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, vediamo che la seconda equazione è verificata, mentre la prima diventa

$$ks = \pm mg$$

Perchè il punto P stia effettivamente sull'asta deve valere $|s| \leq \ell$, quindi $\frac{mg}{k\ell} \leq 1$ (il valore di ω può essere qualsiasi).

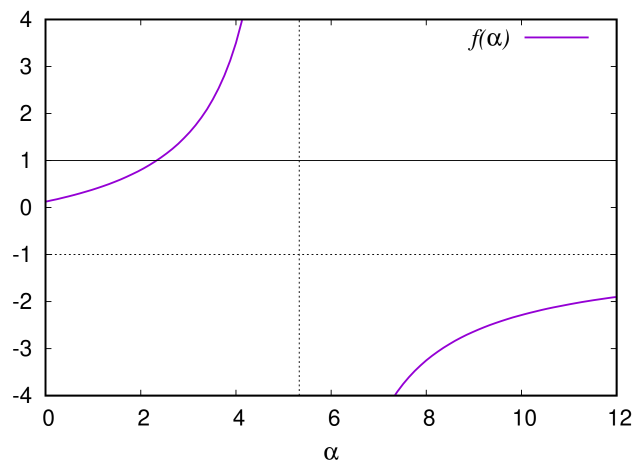
iii) Consideriamo di nuovo il sistema e questa volta sostituiamo $\theta = \pi/3$. La seconda equazione non è automaticamente verificata questa volta; partiamo dalla prima:

$$ks - \frac{mg}{2} - \frac{3}{4}m\omega^2(\ell + s) = 0 \;\rightarrow\; (4k - 3m\omega^2\ell)s = 2mg + 3m\omega^2\ell$$

da cui, sostituendo $\omega^2 = \alpha g/\ell$ e $k = 4mg/\ell$, otteniamo

$$s = \frac{3\alpha + 2}{-3\alpha + 16}\ell = f(\alpha)\ell$$

La funzione $f(\alpha)$ rappresenta un'iperbole equilatera con asintoti $y = -1$ e $x = 16/3$. Notiamo che per definizione $\alpha > 0$



Perchè il punto P stia effettivamente sull'asta deve valere $|s| \leq \ell$: dal grafico dell'iperbole vediamo che esiste un valore massimo per cui questo vale, dato da

$$\frac{3\alpha + 2}{-3\alpha + 16}\ell = \ell \;\rightarrow\; \alpha = 7/3$$

Sostituiamo ora il valore di s trovato (in funzione di α) nella seconda equazione e verifichiamo che esiste una soluzione per $0 < \alpha \leq 7/3$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mg\frac{3\alpha + 2}{-3\alpha + 16}\ell + \sqrt{3}mg\ell - \frac{\sqrt{3}}{4}m\omega^2\ell^2\left(\frac{3\alpha + 2}{-3\alpha + 16} + 1\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}m\omega^2\ell^2$$

Sostituendo $\omega^2 = \alpha g/\ell$ e dividendo per $mg\ell$ otteniamo

$$\frac{3\alpha + 2}{2(-3\alpha + 16)} + 1 - \frac{81\alpha}{(-3\alpha + 16)^2} - \frac{1}{3}\alpha = 0$$

da cui ricaviamo il polinomio di terzo grado

$$P(\alpha) = 3(3\alpha+2)(-3\alpha+16)+6(-3\alpha+16)^2-486\alpha-2\alpha(-3\alpha+16)^2 = -18\alpha^3+219\alpha^2-1448\alpha+1632 = 0$$

Poichè $P(0) = 1632 > 0$ e $P(2) = -532 < 0$, allora per continuità esiste sicuramente un valore di α tra 0 e 2 per cui il polinomio si annulla. Abbiamo quindi dimostrato che esiste una configurazione di equilibrio per $\theta = \pi/3$.