Secondo compito di Meccanica Razionale
11 Luglio 2022

Esercizio 1. Si consideri il moto di un punto materiale di massa m nel campo di forze centrali

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{\rho^2}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \quad \rho = |\boldsymbol{x}|, \quad k > 0.$$

1. Assumendo che il momento angolare sia diverso da zero, si disegni il ritratto di fase nel piano con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$.

2. Si trovino i valori del momento angolare per i quali si ha un'orbita circolare $\boldsymbol{x}_c(t)$ con energia totale nulla.

3. Calcolare il periodo dell'orbita circolare del punto precedente.

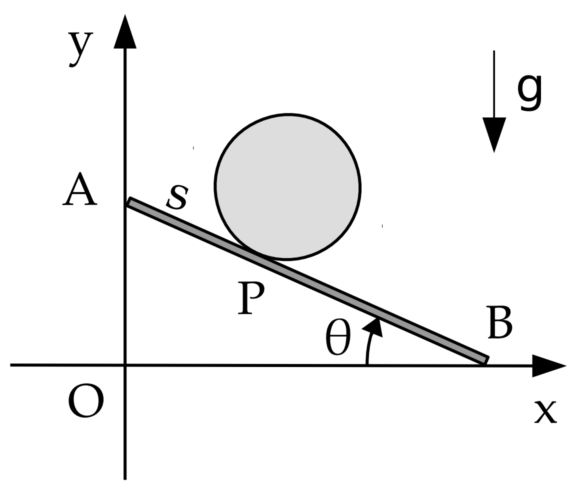
Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy. Un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere sull'asse Oy e l'estremo B vincolato a scorrere sull'asse Ox, ed entrambi i vincoli sono lisci. Inoltre, un disco omogeneo di massa m e raggio r rotola senza strisciare sull'asta. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g e rivolta verso il basso.

Si usino come coordinate la lunghezza s misurata dall'estremo A dell'asta al punto P, con P punto di contatto tra asta e disco, e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox (si veda la figura).

i) Calcolare le velocità angolari dell'asta e del disco.

ii) Trovare le reazioni vincolari in A e B in funzione delle coordinate s e θ, e delle loro derivate prime e seconde.

iii) Scrivere le equazioni del moto del sistema tramite le equazioni cardinali.



Esercizio 3. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su un toro liscio di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

con $\varphi, \theta \in S^1$ e $R > r > 0$ costanti. Sul punto agisce una forza elastica di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, diretta verso il punto $O = (0, 0, 0)$.

i) Scrivere la lagrangiana del sistema e ridurre il sistema ad un solo grado di libertà con il metodo di Routh.

ii) Fissati $R = \sqrt{3}r$ e $c^2 = \frac{mkR^4}{8}$, dove c è il momento coniugato alla variabile ciclica, tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $k > 0$ e $c \neq 0$, dove c è la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto. Possiamo riscrivere la forza centrale come

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = -\frac{k}{\rho}\frac{\mathbf{x}}{\rho}$$

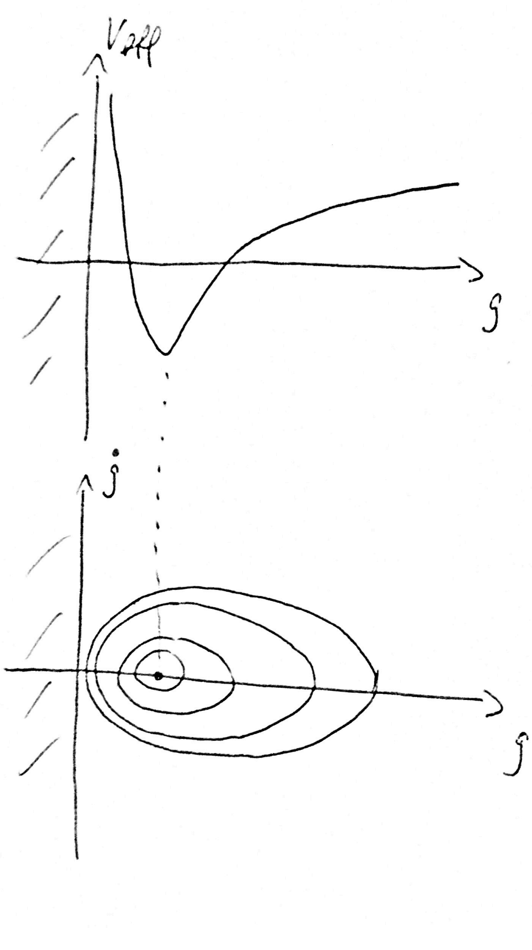
Prima di tutto cerco eventuali orbite circolari nel piano del moto, che come sappiamo corrispondono a punti stazionari del potenziale efficace. Risolvo quindi l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{m\rho^3} = \frac{-mk\rho^2 + c^2}{m\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^2 = \frac{c^2}{mk} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{|c|}{\sqrt{mk}}$$

Quindi esiste sempre un'unica orbita circolare.

Per tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto, calcolo l'energia potenziale efficace

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2} = k\log\rho + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$



ii) Poniamo $E = 0$, un'orbita circolare deve avere $\overline{\rho} = |c|/\sqrt{mk}$ e $\dot{\rho} = 0$. Quindi c deve risolvere l'equazione

$$V_{\text{eff}}(\overline{\rho}) = 0 \quad \to \quad k \log\left(\frac{|c|}{\sqrt{mk}}\right) = -\frac{k}{2} \quad \to \quad c = \pm\sqrt{\frac{mk}{e}}$$

iii) Il periodo dell'orbita circolare è $T = 2\pi/|\dot{\theta}|$, dove $\dot{\theta}$ è costante perchè $\overline{\rho}$ è fisso, e vale

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m\overline{\rho}^2} = \frac{cmk}{c^2 m} = \frac{k}{c}$$

Quindi

$$T = \frac{2\pi|c|}{k} = \frac{2\pi\sqrt{mk}}{k\sqrt{e}} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{ke}}$$

Esercizio 2.

i) La velocità angolare dell'asta è semplicemente $\boldsymbol{\omega}^a = -\dot{\theta}\mathbf{e}_3$, in quanto un riferimento solidale alla lamina è ruotato di un angolo θ rispetto ad Oxy, e il segno meno è dovuto al fatto che θ è misurato in senso orario.
Possiamo calcolare la velocità angolare del disco come somma di velocità angolari di sistemi di riferimento diversi. Considero infatti un sistema di riferimento intermedio Σ' solidale all'asta (con l'asse x' lungo l'asta e puntante verso B e l'asse y' sempre nel piano del moto), sappiamo che la sua velocità angolare rispetto a Oxy è $\boldsymbol{\omega}' = -\dot{\theta}\mathbf{e}_3$. In questo sistema di riferimento, sappiamo che la velocità angolare del disco è $\boldsymbol{\omega}'' = -(\dot{s}/r)\mathbf{e}'_3 = -(\dot{s}/r)\mathbf{e}_3$. La velocità angolare del disco è quindi

$$\boldsymbol{\omega}^d = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}'' = \left(-\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{r}\right)\mathbf{e}_3$$

ii) Siccome i vincoli in A e in B sono lisci abbiamo che le reazioni vincolari sono della forma

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_A = \Phi_A^x\mathbf{e}_1 + \cancel{\Phi_A^y\mathbf{e}_2} = \Phi_A^x\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{\Phi}_B = \cancel{\Phi_B^x\mathbf{e}_1} + \Phi_B^y\mathbf{e}_2 = \Phi_B^y\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Per esplicitarle posso scrivere la prima equazione cardinale per l'intero sistema e proiettare su $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Scrivo le coordinate dei punti (dove C è il baricentro dell'asta e D quello del disco):

$$\begin{gathered} (A - O) = \ell\sin\theta\mathbf{e}_2 \\ (B - O) = \ell\cos\theta\mathbf{e}_1 \\ (P - O) = s\cos\theta\mathbf{e}_1 + (\ell - s)\sin\theta\mathbf{e}_2 \\ (C - O) = (\ell/2)\cos\theta\mathbf{e}_1 + (\ell/2)\sin\theta\mathbf{e}_2 \\ (D - O) = (P - O) + r\sin\theta\mathbf{e}_1 + r\cos\theta\mathbf{e}_2 \end{gathered}$$

Le accelerazioni dei baricentri sono:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_C = -(\ell/2)\dot\theta\sin\theta\mathbf{e}_1 + (\ell/2)\dot\theta\cos\theta\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{v}_D = (\dot s\cos\theta - s\dot\theta\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (-\dot s\sin\theta + (\ell - s)\dot\theta\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{a}_C = -(\ell/2)(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta)\mathbf{e}_1 + (\ell/2)(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{a}_D = (\ddot s\cos\theta - 2\dot s\dot\theta\sin\theta - s\ddot\theta\sin\theta - s\dot\theta^2\cos\theta + r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\sin\theta)\mathbf{e}_1 + \\
(-\ddot s\sin\theta - 2\dot s\dot\theta\cos\theta + (\ell - s)\ddot\theta\cos\theta - (\ell - s)\dot\theta^2\sin\theta - r\ddot\theta\sin\theta - r\dot\theta^2\cos\theta)\mathbf{e}_2
\end{gathered}
$$

La prima equazione cardinale per tutto il sistema è

$$
M\mathbf{a}_C + m\mathbf{a}_D = -(M+m)g\mathbf{e}_2 + \Phi_A^x\mathbf{e}_1 + \Phi_B^y\mathbf{e}_2
$$

Quindi le reazioni vincolari in A e B sono

$$
\begin{cases}
\Phi_A^x = -M(\ell/2)(\ddot\theta\sin\theta + \dot\theta^2\cos\theta) + m((\ddot s - s\dot\theta^2 + r\ddot\theta)\cos\theta - (2\dot s\dot\theta + s\ddot\theta + r\dot\theta^2)\sin\theta) \\
\Phi_B^y = M(\ell/2)(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta) + m(-(\ddot s + (\ell - s)\dot\theta^2 + r\ddot\theta)\sin\theta - (2\dot s\dot\theta - (\ell - s)\ddot\theta + r\dot\theta^2)\cos\theta) + (M+m)g
\end{cases}
$$

iii) Per scrivere le equazioni del moto calcolo due nuove equazioni cardinali. Scelgo la seconda equazione cardinale con polo P per il solo disco, la quale è pura, e la seconda equazione cardinale con polo P per la sola asta, la quale non è pura, ma avendo calcolato le reazioni vincolari in A e B basta sostituirle nell'equazione. Calcolo prima la velocità del punto P come punto solidale ai due corpi rigidi e come polo:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_P^{(d)} = \mathbf{v}_P^{(a)} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}^a \times (P - A) = -s\dot\theta\sin\theta\mathbf{e}_1 + (\ell - s)\dot\theta\cos\theta\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{v}_P = d/dt(P - O) = (\dot s\cos\theta - s\dot\theta\sin\theta)\mathbf{e}_1 + (-\dot s\sin\theta + (\ell - s)\dot\theta\cos\theta)\mathbf{e}_2
\end{gathered}
$$

- Inizio con la seconda equazione cardinale con polo P per il solo disco

$$
\dot{\mathbf{M}}_P^d = -\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_D + \mathbf{N}_P^d
$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}_P^d = m(D - P) \times \mathbf{v}_P^{(d)} + I_P^d\boldsymbol{\omega}^d = \left(m\ell r\dot\theta\sin\theta\cos\theta - (3/2)mr^2\dot\theta - (3/2)mr\dot s\right)\mathbf{e}_3 \\
\dot{\mathbf{M}}_P^d = \left(m\ell r\ddot\theta\sin\theta\cos\theta + m\ell r\dot\theta^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (3/2)mr^2\ddot\theta - (3/2)mr\ddot s\right)\mathbf{e}_3 \\
-\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_D = -\mathbf{v}_P \times m(\cancel{\mathbf{v}_P} - r\dot\theta\sin\theta\mathbf{e}_1 + r\dot\theta\cos\theta\mathbf{e}_2) = \left(-mrs\dot\theta^2 + mr\ell\dot\theta^2\cos^2\theta\right)\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{N}_P^d = (D - P) \times (-mg\mathbf{e}_2) + \cancel{(P - P) \times (\boldsymbol{\Phi}_P)} = -mgr\sin\theta\mathbf{e}_3
\end{gathered}
$$

Da cui proiettando lungo $\mathbf{e}_3$ ottengo la prima equazione del moto

$$
m\ell r\ddot\theta\sin\theta\cos\theta - m\ell r\dot\theta^2\sin^2\theta - (3/2)mr^2\ddot\theta - (3/2)mr\ddot s + mrs\dot\theta^2 + mgr\sin\theta = 0
$$

- Ora calcolo la seconda equazione cardinale con polo P per la sola asta

$$\dot{\mathbf{M}}_P^a = -\mathbf{v}_P \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{N}_P^a$$

Calcolo i vari elementi dell'equazione:

$$\mathbf{M}_P^a = M(C-P)\times\mathbf{v}_C + I_C\boldsymbol{\omega}^a = \Big(M(\ell/2-s)(\ell/2)\dot\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) - (1/12)M\ell^2\dot\theta\Big)\,\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{M}}_P^a = \Big(-M(\ell/2)\dot s\dot\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + M(\ell/2-s)(\ell/2)\ddot\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$-2M(\ell/2-s)\ell\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - (1/12)M\ell^2\ddot\theta\Big)\,\mathbf{e}_3$$

$$-\mathbf{v}_P\times M\mathbf{v}_C = -M\ell/2\left(\dot s\dot\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) + 2(\ell/2-s)\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\mathbf{N}_P^a = (C-P)\times(-mg\mathbf{e}_2) + \cancel{(P-P)\times(\boldsymbol{\Phi}_P)} + (A-P)\times(\Phi_A^x\mathbf{e}_1) + (B-P)\times(\Phi_B^y\mathbf{e}_2) =$$
$$= (-mg(\ell/2-s)\cos\theta - \Phi_A^x s\sin\theta + \Phi_B^y(\ell-s)\cos\theta))\,\mathbf{e}_3$$

Da cui proiettando lungo $\mathbf{e}_3$ ottengo

$$M(\ell/2-s)(\ell/2)\ddot\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) - M(\ell/2-s)\ell\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - (1/12)M\ell^2\ddot\theta + mg(\ell/2-s)\cos\theta + \Phi_A^x s\sin\theta - \Phi_B^y(\ell-s)\cos\theta = 0$$

Sostituendo le reazioni vincolari ottengo la seconda equazione del moto.

Esercizio 3.

i) La velocità del punto materiale è

$$\mathbf{v}_P = -((R+r\cos\varphi)\dot\theta\sin\theta + r\dot\varphi\sin\varphi\cos\theta)\mathbf{e}_1 + ((R+r\cos\varphi)\dot\theta\cos\theta - r\dot\varphi\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{e}_2 + r\dot\varphi\cos\varphi\mathbf{e}_3$$

Quindi l'espressione dell'energia cinetica è

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_P|^2 = \frac{1}{2}m\left((R+r\cos\varphi)^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\right)$$

e dell'energia potenziale è

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k|P-O|^2 = \frac{1}{2}k\left((R+r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi\right) =$$
$$kRr\cos\varphi \quad \text{(a meno di costanti additive)}$$

La Lagrangiana dipende da φ ma non da θ, che è una variabile ciclica

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}m\left((R+r\cos\varphi)^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - kRr\cos\varphi$$

Abbiamo quindi un integrale primo che è il momento coniugato a θ

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = m(R+r\cos\varphi)^2\dot\theta = c \;\rightarrow\; \dot\theta = \nu(\varphi) = \frac{c}{m(R+r\cos\varphi)^2}$$

Posso quindi scrivere la Lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}_R^{(c)} = [\mathcal{L} - c\dot\theta]|_{\dot\theta=\nu(\varphi)} = \frac{1}{2}mr^2\dot\varphi^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{m(R+r\cos\varphi)^2} - kRr\cos\varphi$$

ii) Dalle ipotesi abbiamo che $R = \sqrt{3}r$ e $c^2 = mkR^4/8$. Siamo arrivati ad una Lagrangiana con un grado di libertà. Siccome abbiamo un ulteriore integrale primo (l'integrale di Jacobi, che equivale all'energia), possiamo tracciare il ritratto di fase del sistema ridotto.

$$J_R = \mathcal{L}_{R,2} - \mathcal{L}_{R,0} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{m(R + r\cos\varphi)^2} + kRr\cos\varphi$$

dove posso definire

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{c^2}{m(R + r\cos\varphi)^2} + kRr\cos\varphi$$

La funzione $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ è periodica di periodo 2π. Cerco prima i punti stazionari della funzione:

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}} = \frac{c^2}{m(R + r\cos\varphi)^3}r\sin\varphi - kRr\sin\varphi = 0 \ \rightarrow\ r\sin\varphi\left(\frac{c^2}{m(R + r\cos\varphi)^3} - kR\right) = 0$$

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{c^2}{m(R + r\cos\varphi)^3} = kR$$

Nel primo caso otteniamo i punti stazionari $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Nel secondo

$$(R + r\cos\varphi)^3 = \frac{c^2}{mkR} = \frac{R^3}{8} \quad \rightarrow \quad r\cos\varphi = -\frac{R}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

da cui ottengo i punti stazionari $\varphi = (5/6)\pi$ e $\varphi = (7/6)\pi$.
Valuto la funzione $\mathcal{V}_{\text{eff}}$ nei punti stazionari in modo da ricavare quali punti sono massimi e quali minimi

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(0) = \frac{c^2}{2m(R + r)^2} + kRr = \frac{18 + 23\sqrt{3}}{32}kr^2$$

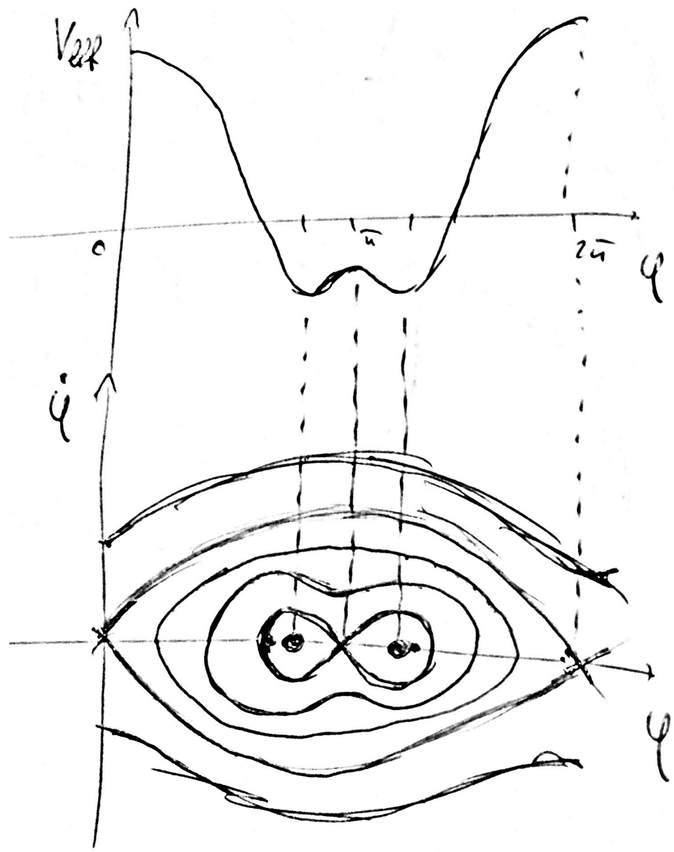
$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\pi) = \frac{c^2}{2m(R - r)^2} - kRr = \frac{18 - 23\sqrt{3}}{32}kr^2$$

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{c^2}{2m(R - (\sqrt{3}/2)r)^2} - (\sqrt{3}/2)kRr = -\frac{3}{4}kr^2$$

Poichè vale che

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(0) > \mathcal{V}_{\text{eff}}(\pi) > \mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$

il ritratto di fase ridotto è (tra 0 e 2π):



V_eff
0
π
2π
φ
φ̇
φ