Esercizi di Combinatoria - Stage di Siena

9 febbraio 2018 (48 era Unix)

1. Un villaggio è composto da abitazioni collegate da strade. Le abitazioni possono essere centrali, da cui partono tre strade, o periferiche, da cui partono due strade. Quante abitazioni ci sono nel villaggio, sapendo che il numero di abitazioni centrali è uguale al numero di quelle periferiche e che in tutto ci sono 30 strade?

2. In quanti modi diversi si possono mettere in fila i numeri 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 in modo che, comunque se ne scelgano quattro in posti consecutivi, la loro somma sia divisibile per tre?

3. Marco, Fabrizio e Giovanni, tre matematici, sfidano un gruppo di quattro fisici a un torneo di calcio balilla. Giocano un incontro per ogni possibile combinazione di due matematici (uno in attacco, uno in difesa) contro due fisici (uno in attacco, uno in difesa). Ciascun incontro ha la stessa durata, e in totale il torneo dura ben 24 ore (senza pause). Quanto tempo gioca Marco in difesa?

   Si noti che, ad esempio, vi saranno due incontri diversi di Marco e Fabrizio contro un certo attaccante e un certo difensore fra i fisici: uno con Marco attaccante e Fabrizio difensore, uno viceversa.

4. Abelarda, Brunilda e Callisto, tre vecchi conoscenti, vogliono comprare una casa a testa tra le 10 disponibili in fila sulla via principale della città. Siccome non si sopportano, vogliono assolutamente evitare di essere vicini di casa. Desiderano perciò che le case da loro acquistate siano due a due non adiacenti. In quanti modi possono comprare casa in modo da soddisfare questa condizione?

5. Cinque amici devono scendere da una seggiovia a cinque posti e possono farlo andando in tre direzioni differenti: a sinistra, dritto, oppure a destra. Scendendo da una seggiovia è facile scontrarsi con i propri compagni di risalita. Per esempio: se io decido di andare dritto e qualcuno alla mia sinistra di andare a destra, ci scontriamo. Lo stesso accade se io decido di andare a destra e qualcuno alla mia destra va dritto o a sinistra. Se invece qualcuno va nella mia stessa direzione non ci scontriamo, e così via. Se ciascuno dei cinque amici sceglie a caso dove andare con probabilità $\frac{1}{3}$ per ciascuna direzione, qual è la probabilità che non ci siano scontri?

6. Siano m, n interi positivi aventi massimo comun divisore uguale a 1. Nel polinomio $(mx+n)^{2000}$ i coefficienti di x^2 e x^3 sono uguali. Trovare m ed n.

7. Matteo deve fare un test a crocette con 11 domande. Ciascuna domanda ha una sola risposta giusta. La prima domanda ha 2 possibili risposte, la seconda domanda ha 3 possibili risposte, e così via, fino all'undicesima domanda che ha 12 possibili risposte. Qual è la probabilità che facendo a caso il test Matteo dia almeno una risposta giusta?

8. Si estrae una carta da un mazzo di 40 carte e si scarta. Si estrae poi un'altra carta: qual è la probabilità che questa seconda carta sia il sette di denari?

9. In un paese l'uno per cento della popolazione è affetto da una certa malattia. Il test per sapere se si è contagiati sbaglia nell'uno per cento dei casi. Lorenzo si sottopone al test e risulta malato. Qual è la probabilità che egli sia sano?

10. Un'urna contiene 8 palline numerate da 1 a 8. Federica pesca due palline di seguito, cancella il numero scritto sulla prima e lo sostituisce con il suo doppio, quindi cancella il numero sulla seconda pallina e lo sostituisce con il suo quadruplo. Reinserisce quindi le due palline nell'urna. Per esempio, se Federica ha pescato le palline 3 e 7 in quest'ordine, reinserirà nell'urna due palline con i numeri 6 e 28. Infine estrae nuovamente una pallina: qual è la probabilità che essa abbia il numero 8?

11. Sia n un intero positivo. Un treno ferma in $2n$ stazioni, incluse quella iniziale e finale, numerate in ordine dalla prima alla $2n$-esima. Si sa che in una certa carrozza, per ogni coppia di interi i, j tali che $1 \leq i < j \leq 2n$, è stato prenotato esattamente un posto per il tragitto tra la stazione i-esima e quella j-esima. Ovviamente prenotazioni diverse non possono sovrapporsi. Determinare, in funzione di n, il numero minimo di posti che devono essere disponibili in quella carrozza affinché la situazione descritta sia possibile.

12. Un triangolo equilatero è diviso in 9 triangolini come in figura, e su ogni triangolino è inizialmente scritto il numero 0. Marco fa il seguente gioco: ad ogni mossa sceglie 2 triangolini con un lato in comune e somma 1 o sottrae 1 ai numeri scritti su questi triangolini; l'operazione effettuata sui due triangolini è la stessa. Dopo qualche tempo si accorge che i numeri scritti sui 9 triangolini sono, in qualche ordine, n, $n+1$, $\ldots$, $n+8$, dove n è un intero non negativo. Dimostrare che n può essere soltanto 0 o 2.

    Domanda bonus: esibire un possibile procedimento per ottenere i casi $n = 0$ e $n = 2$.