COMBINATORIA

TARANTO 2020 (50 e.V.)

kuzminkirill.math@gmail.com

Esercizio $a, b > 0$ interi

Successione di $ab+1$ numeri reali distinti. Allora esiste:

- Una sottosucc lunga $a+1$ crescente

OPPURE

- Una sottosucc lunga $b+1$ decrescente

$x_1 \,-\,-\,-\,-\,- \, x_{50}$

$50 = 7 \cdot 7 + 1$

Allora esiste sottos lunga 8 cresc oppure sottosucc lunga 8 decr

---

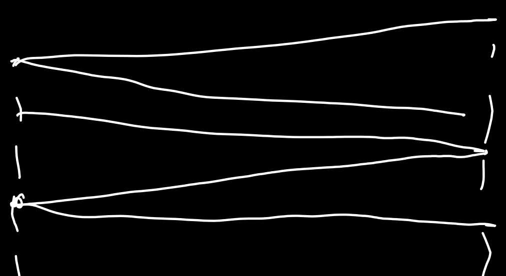
Lemma di Hall

Stagisti Souvenir

Ad ogni stagista piace un sottoinsieme dei souvenir

Sotto quali condizioni è possibile dare un souvenir ad ogni stagista in modo che ogni stagista riceva un souvenir che gli piace

St So



Condizione necessaria:

$X \subseteq$ Stagisti

$\Gamma(X)$ è l'insieme dei souvenir che piacciono ad almeno un elem $\in X$

Necessaria: $|X| \leq |\Gamma(X)| \quad \forall X$

Teorema: è anche sufficiente (di Hall)

Dim: Induz (estesa) sul numero di stagisti.

1 stagista   Per ip gli piace almeno 1 souvenir
Gliene assegniamo uno a caso

Caso induttivo

Se $\forall X \subseteq$ Stagisti vale $|X| < |\Gamma(x)|$

Allora possiamo prendere uno stagista, dargli un souvenir che gli piace, e ricondurci all'ip IND

INFATTI, per i sotti $\subseteq$ Stagisti che NON lo contengono $|x| \leq |\Gamma(x)|$ vale comunque

Resta: $\exists X \subseteq$ Stagisti t.c.
$|X| = |\Gamma(x)|$
per Stagisti $\setminus X$ e Souvenir $\setminus \Gamma(x)$
continua a valere l'ip induttiva
Se no, per un $Y \subseteq$ Stag $\setminus X$ per cui non vale (ovvero $|Y| < \Gamma(Y) \setminus \Gamma(x))$

Si avrebbe $|X \cup Y| < |\Gamma(X \cup Y)|$

$$= |X| + |Y| \quad = |\Gamma(X)| + |\Gamma(Y) \setminus \Gamma(X)|$$

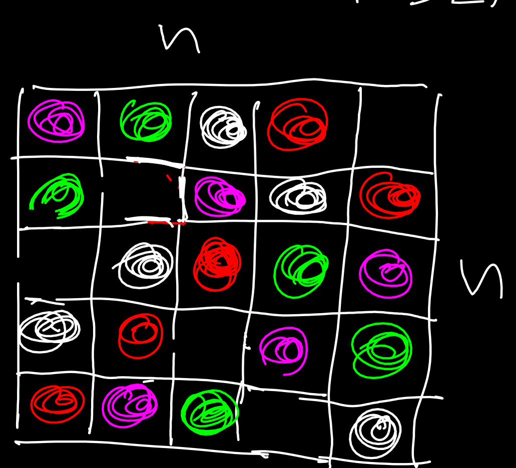
ASSURDO: nell'insieme di tutti gli stagisti non è possibile

Quindi per induzione sui pezzi

$X, \Gamma(X)$ $\quad$ $Stag \setminus X$, $Sovv \setminus \Gamma(X)$

Lemma dei matrimoni

ESEMPIO/ESERCIZIO



Voglio piazzarci n pedine dello stesso colore in modo da averne esatt 1 per ogni riga e colonna

Cambio colore: voglio piazzare altre n pedine di colore diverso, con la stessa condizione e INOLTRE non voglio sovrapporrmi a pedine già piazzate

Tesi: posso continuare ad aggiungere n pedine per volta con le stesse condizioni fino a riempire la scacchiera

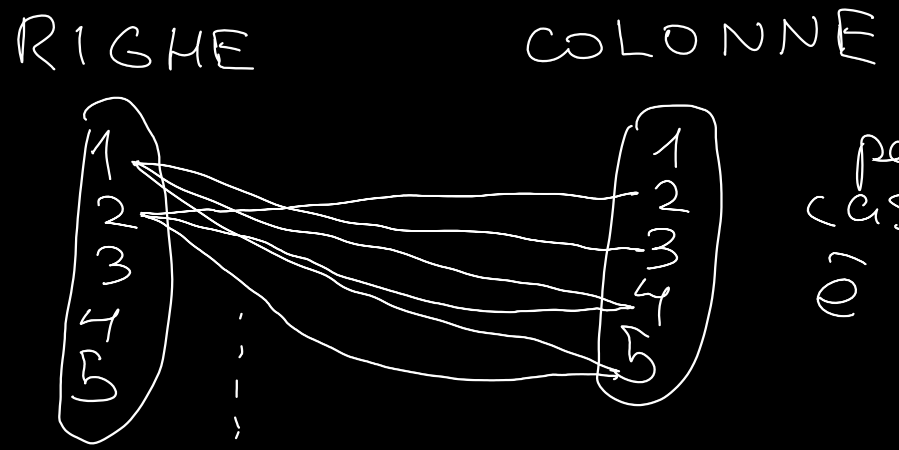
---

Dim usa Lemma di Hall

$n \times n$ $\quad$ h colori già piazzati

k ancora da piazzare

$(k+h=n)$



Ad ogni riga associamo le colonne per cui la casella all'n è libera

Ogni arco rappresenta casella libera.

Se riusciamo a trovare un matching di taglia n vinciamo

Sottoinsieme di archi di un grafo che hanno estremi tutti diversi

$n \times n$ — h colori già piazzati
k ancora da piazzare
$(k+h=n)$

Voglio vedere che ipotesi di Hall rispettate
ovvero $\forall\, l \leq n$ date l righe ci sono posti liberi in almeno una di esse in almeno l colonne diverse

Se $l \leq k$ siamo a posto perché ogni singola riga ha k posti liberi

Prendo $l > k$ e suppongo, per assurdo, che le l righe abbiano posti liberi in al più j colonne con $k \leq j < l$

Queste l righe e j colonne individuano $l \cdot j$ caselle. Quante sono libere? Sono $l \cdot k$

righe

caselle libere x riga

D'altra parte ognuna delle j colonne associate ha almeno $\ell-k$ posti già occupati.

Ogni colonna ha $h = n-k$ posti occupati, almeno $\ell-k$ di loro strabordano nella zona delle ℓ righe

ℓk = caselle libere $\leq \ell \cdot j - j(\ell-k) =$

$= jk < \ell k$

perché $j<\ell$

$$\boxed{\text{ASSURDO} \quad \ell k < \ell k}$$

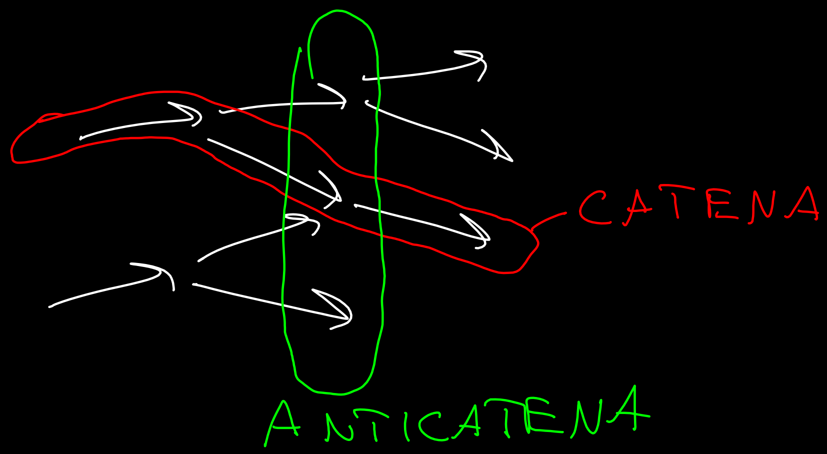
Attenzione: dim di Hall è costruttiva $\Rightarrow \exists$ un procedimento per piazzare pedine

TEOREMA DI DILWORTH

ORDINI PARZIALI SU INSIEMI FINITI

CATENA: Sottoinsieme in cui tutti sono confrontabili

ANTICATENA: Sottoinsieme in cui NESSUNA COPPIA è confrontabile



Partizioni in catene

Cardinalità di un'anticatena

Cosa ovvia

$$|P_{cat}| \geq |\text{Anticatena}|$$

COSA NON OVVIA

Dilworth: $\exists$ una partiz in catene e un'anticatena per cui vale l'=

Partiz in anticatene

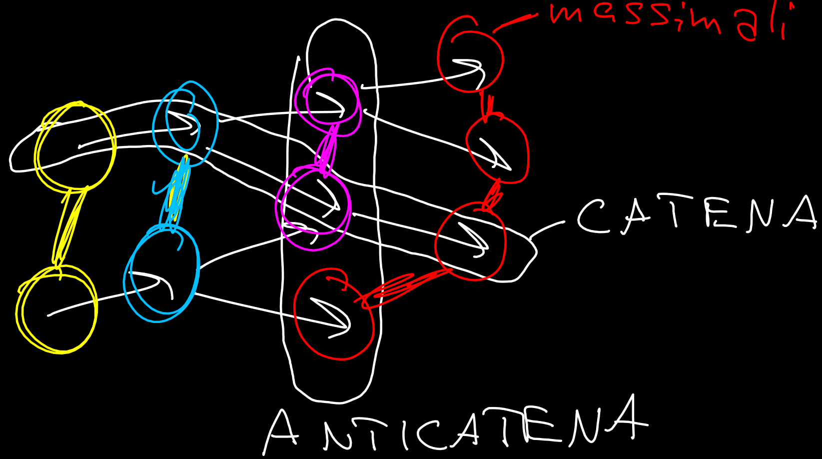
Catena

OVVIO: $$|P_{ANTIC}| \geq |\text{Catena}|$$

Duale di Dilworth (Minsky):

$\exists$ P_{ANTIC}, CATENA per cui vale l'=

DIM DUALE DILWORTH (+ facile dell'altro)



Prendo gli elementi massimali

Def: In una relaz d'ordine x è massimale se non $\exists y$ t.c. $x < y$

OSS: ordine totale allora massimale $\Rightarrow$ massimo (ovvero $\geq$ TUTTI GLI ALTRI)

Per def, i massimali formano un'anticatena

↳ Primo elemento della nostra partizione

Per induzione, il resto si partiziona in n anticatene, ed $\exists$ catena lunga n

massimo di questa catena ($\exists$ perché insieme finito)

è $\leq$ uno dei massimali totali, perché non è massimale lui stesso per costruz

Costruzione effettiva: prendere ogni volta i massimali di quello che resta

Catena: partire da un elemento dell'ultima anticatena e risalire

---

successione lunga $ab+1$, allora
di reali distinti

$\exists$ sottosucc lunga $a+1$ cresc

o

sottosucc lunga $b+1$ decr

Idea utile per trovare ordini parziali: sono dati 2 ordini totali

$<_1, <_2$ diciamo che $a \underset{\text{Nuovo ord parz}}{<} b$ se $a <_1 b$ e $a <_2 b$

$<_1$: $<$ dei numeri reali

$<_2$: precedere nella successione

ordine parziale

$X_i <_{op} X_j$ se

$x_i < x_j$ come numeri reali

e $i < j$

Catena: è una sottosucc crescente

Anticatena: è una sottosucc DEcrescente

$\exists$ catena e partizione in anticatene della stessa cardinalità

Se $\exists$ catena lunga $a+1$ siamo a posto, se no sono tutte più corte, ma allora per Dilworth duale $\exists$ partiz in al più a anticatene

Siccome tutti sono $ab+1$, almeno un'anticatena ha card $b+1$, ovvero $\exists$ sottosucc Decrescente lunga $b+1$

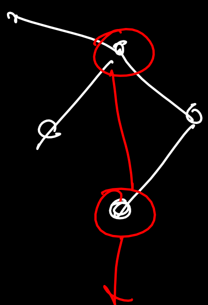
DIM DILWORTH

$\exists$ Anticatena e Partiz in catene con stesse card

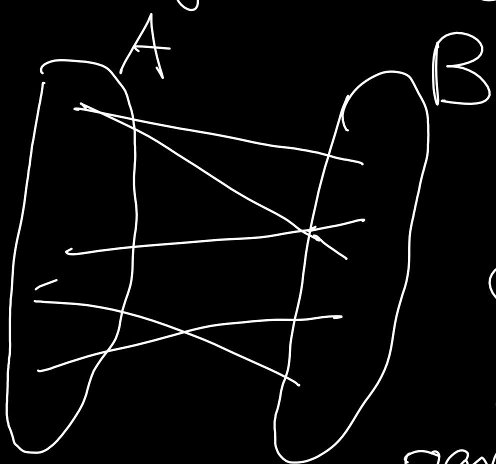
$\leq$ ovvio

Lemma di König

Dato un grafo bipartito



COVERING



Matching: Sottoinsieme di archi senza estremi in comune

Covering: Sottoinsieme di vertici tale che ogni arco ha almeno un estremo nell'insieme

Cosa ovvia: $|\text{Matching}| \leq |\text{Covering}|$

ogni arco del M ha almeno un estremo in C

König: Per un grafo bipartito $\exists\, M, C$ per cui $|M| = |C|$

Se fossimo nelle ipotesi di Hall prenderei $C = A$

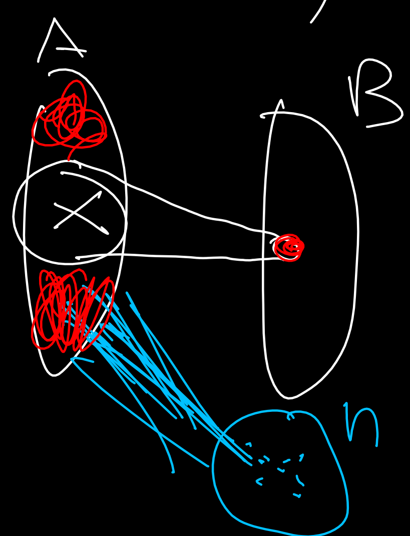
$M =$ matching dato da Hall

Caso difficile: non siamo in ipotesi Hall, ovvero

$$\exists X \subseteq A \text{ t.c. } |\Gamma(X)| < |X|$$

Idea: riportarlo ad uguaglianza aggiungendo elementi a B

Prendo $X \subseteq A$ t.c. $|X| - |\Gamma(X)|$ sia massima, sia n questo massimo



Aggiungiamo n elementi a B e colleghiamo ogni elemento di A a ciascuno di loro

Questo ci riporta nelle ipotesi di Hall (abbiamo aggiunto n elem ad ogni $\Gamma(X)$)

Prendiamo il matching risultante che ha card $|A|$

Ritogliendo gli n ne restano almeno

M: $|A| - n$

Covering: $A \setminus X$ e $\Gamma(X)$

$$|A| - |X| + \Gamma(X) = |A| - n$$

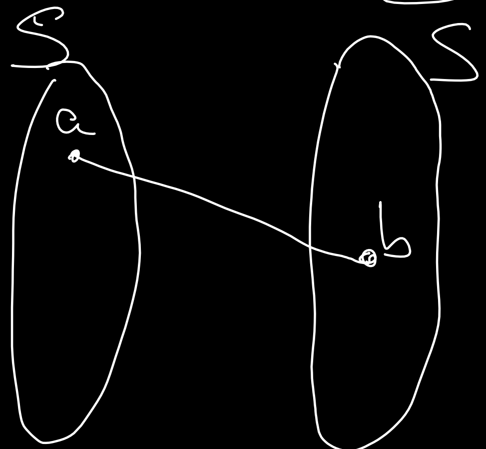
Ma $|X| - |\Gamma(X)| = n$

C:

DILWORTH SEGUE DA

König sul grafo bipartito così

Formato S parzialm ordinato



arco tra a e b

se $a < b$ in S

stretto!!!

Prendiamo M e C dati da König

M darà la partiz in catene

C darà l'anticatena

FINIRE PER ESERCIZIO o guardare su wikipedia

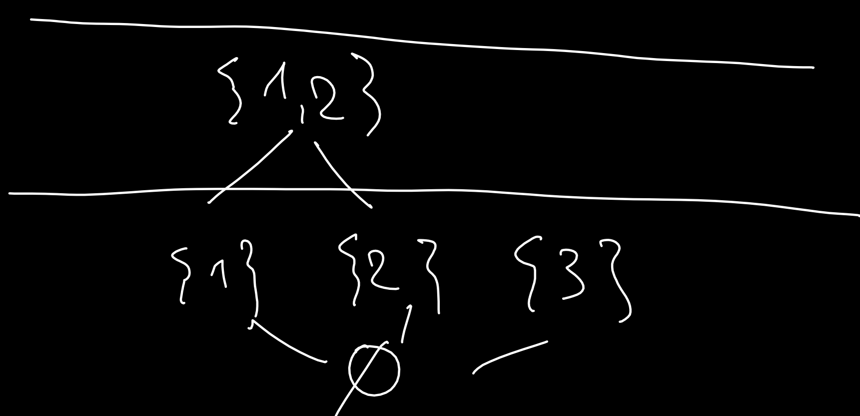
Teorema di Sperner

$$\left(\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \subseteq \right)$$

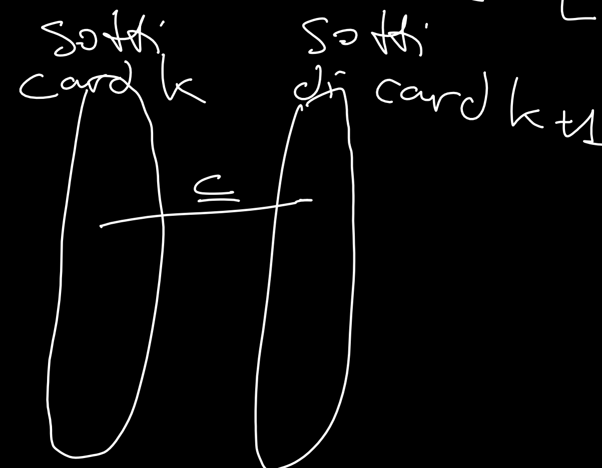
La più lunga anticatena qui ha cardinalità $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

C'è un'anticatena ovvia di questa cardinalità, ovvero sotti grandi $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Usiamo Dilworth: produciamo partizione in $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ catene

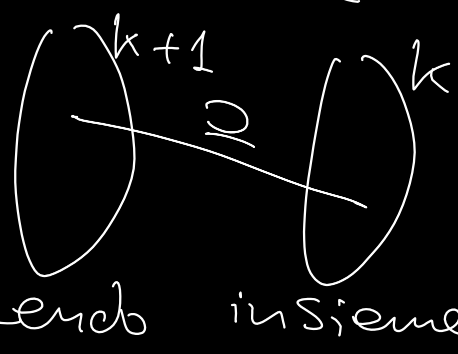


Se $k < k+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



Rispette ip di Hall, produce matching

Stessa cosa se $k+1 > k \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



Mettendo insieme questi matching abbiamo partiz in catene, la card è uguale alla card del livello $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$