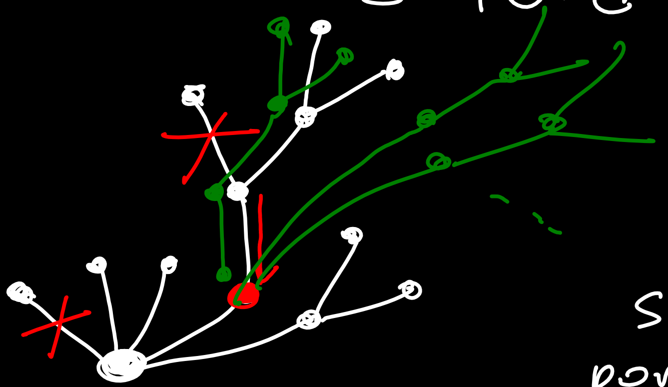
COMBINATORIA

TARANTO REMOTO 2020 (50 e.U.)

Kirill Kuzmin
kuzminkirill.math@gmail.com

INDUZIONE „SPINTA"

Ercole vs Idra



Taglio:
Ricresce struttura tagliata dal vertice sotto a quello che portava il collo tagliato

Esercizio: Dimostrare che Ercole ubriaco riesce a battere l'Idra.

Induzione estesa

„Struttura" ⟶ Numeri interi

Se dimostriamo che

- Proprietà vera per strutture cui è associato lo 0
- Usando come ipotesi "proprietà vera per strutture cui è associato 0, 1, .. n-1" si riesce a mostrare per strutture cui è associato n

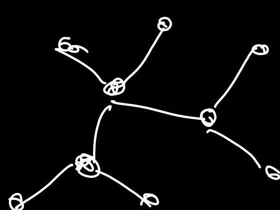
Allora Propiretà vera per tutte le strutture

Esempio: Grafo ad albero. Allora

$V - E = 1$

vertici

archi "edges"



Che quantità usiamo? Numero di vertici

Caso base:

• 1 vertice

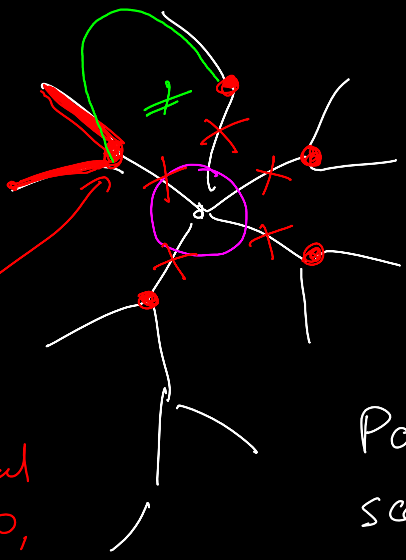
$1_v - 0_E = 1$

SI

Partire dalla struttura grande e ricondurla a più piccole

NO

Partire da piccole per costruire una più grande



per ogni vertice vicino al tagliato, prendete la sua componente connessa

NO perché non siete sicuri di riuscire a costruire ogni possibile cosa

Parto da albero, scelgo un vertice lo rimuovo

FATTO: ogni componente connessa è un albero

- Connessa: sì
- Senza cicli: sì
- Distinte: sì, se no ci sarebbe stato ciclo nel grafo originario

IP INDUTTIVA: per ogni pezzo

$$V_{pezzo} - E_{pezzo} = 1$$

k pezzi: $V_{\substack{tutti \\ i\ pezzi}} - E_{\substack{tutti \\ i\ pezzi}} = k$

$- k$ archi dai pezzi al vertice centrale

$+ 1$ vertice rimosso

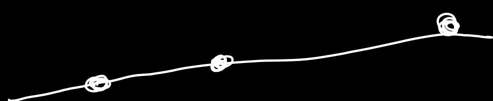
$$V_{TOT} - E_{TOT} = k - k + 1 = 1$$

INDUZIONE : ESEMPIO SBAGLIATO

Ci sono n punti nel piano tali che per ogni coppia la retta che ci passa contiene un terzo punto dell'insieme

Allora tutti i punti sono allineati

Idea sbagliata: INDUZIONE

$n = 3$  OK

Tolgo un punto: gli altri $n-1$ sono allineati per IP IND, allora anche il rimanente deve essere allineato con loro

ERRORE

Infatti, se tolgo un punto, non è più detto che l'ipotesi valga per gli $n-1$ rimasti

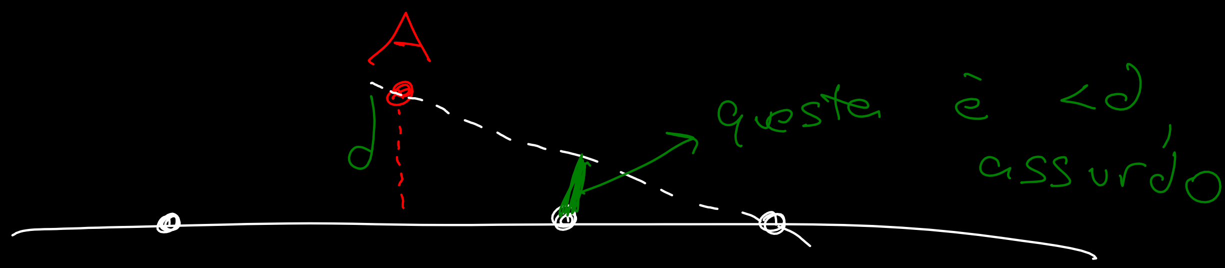
---

MODO GIUSTO: PER ASSURDO

Supponiamo non tutti allineati

Consideriamo le distanze tra punti A e rette per coppie di punti dell'insieme cui A non appartiene

Prendiamo la distanza minima (che esiste perché è tutto finito)



Attenzione: non vero per infiniti punti

Esempio: punti a coordinate intere nel piano

Sia $(A, <)$ un insieme totalmente ordinato. $<$ si dice „buon ordine" se ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo

Esempio (già noto)

$(\mathbb{N}, <)$ è un buon ordine

Esempio: ogni insieme finito è ben ordinato

Buoni ordini generici

$(\mathbb{N}, <)$

Ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo

Non esistono successioni strettamente decrescenti infinite

INDUZIONE ESTESA

$(A, <)$ Buon ordine

P proprietà su elementi di A

se
- $P(\min A)$
- per ogni $a \in A$, usando come ipotesi „P è vera per ogni $b < a$", riuscite a mostrare $P(a)$

Allora P è vera per tutti gli elementi di A

Ottenere nuovi insiemi ordinati a partire da vecchi

$(A, <_A)$ $(B, <_B)$ ordini totali

$A+B$ è Insieme: $A \sqcup B$

Ordine: • All'interno di A e B è conservato l'ordine vecchio

• Ogni elemento di A è più piccolo di ogni elemento di B

Notazione: $(\mathbb{N}, <)$ si indica anche con ω

Esempio: $\omega + 1 \neq \omega$ perché ω non ha max, $\omega+1$ sì

$$\underbrace{0<1<2<\dots}_{\omega} < \bullet_{1}$$

$1+\omega = \omega$

$$\underset{1}{\bullet} < \bullet < \bullet < \bullet < \dots = \omega$$

FATTO: Se A e B erano dei buoni ordini, anche $A+B$ lo è

$+$ non commutativo, sì associativo

DIM: esercizio

$A \cdot B$ Insieme: $A \times B$

(a_1, b_1) (a_2, b_2)

Ordine antilessicografico

Se $b_1 < b_2$ allora $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$

$b_1 > b_2$ allora $(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$

$b_1 = b_2$ allora si confrontano a_1 e a_2

- Associativo, non commutativo
- Partendo da buoni ordini si ottiene un buon ordine

Accenno dimostrazione

Abbiamo un po' di coppie in $A \times B$

- Scegliamo le coppie con coordinata b minima (B è buon ordine)
- tra queste prendiamo quella con A minimo (A è ben ordinato)

Esempio $\omega \cdot \omega$ è un buon ordine

Sfruttiamolo per esercizio

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}}$$

1^2 1

2^2 2 2

3 3 3

4 4 $\boxed{4}$ 4

\- -

n^2 n n - - - - n

n

$\boxed{n}$

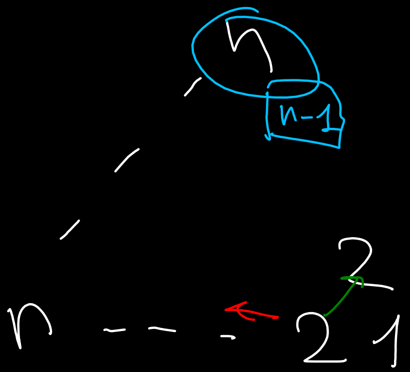
. .

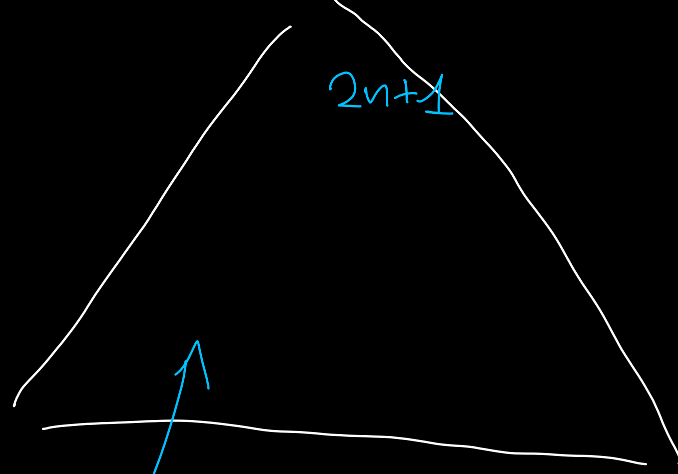
2 .

1 2 n

diminuisco c: −1 • non cambia −1

diminuisco r • +1 +1 • non cambia





Tutte le somme sono $2n+1$

Per induzione estesa su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{c}
(0,0) \\
(1,0)\ (1,1) \\
(2,0)\ (2,1)\ (2,2) \\
\dots
\end{array}
$$

$P(a,b)$ = nel posto (a,b) la somma è $2n+1$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è buon ordine, quindi coord presenti sono un buon ordine

Quindi usiamo induzione

In $(0,0)$ la somma è $2n+1$

Caso base: OK

Caso induttivo: mettiamoci nel posto (r,c) e supponiamo che proprietà vera

r: riga, c: col

Per tutte le coppie $< (r,c)$

Andando verso sx o alto vado su un indice minore, MA LA SOMMA NON CAMBIA

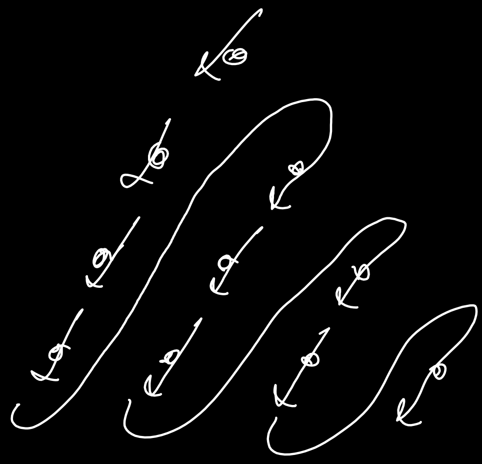
Ma per gli indici $< (r,c)$ la somma è $2n+1$ per IP INDUTTIVA ← ok perché buon ordine

Quindi anche per (r,c)

Ho un po' barato

Siccome il triangolo ha $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi

L'ordine su di lui è l'unico possibile su un insieme di $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi



(r,c)

Esempio per cui il $\cdot$ non è commutativo

$$\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega = \omega$$

$\{0 < 1\}$

$(n, 0) < (m, 1)$

$\omega \cdot 2$

$(0,0) < (1,0) < (2,0) \cdots < (0,1) < (1,1) < \cdots$

$\circ - - - - - - - - < \boxed{\circ} - - - - - - -$

$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega$

lui ha infiniti elementi più piccoli

NON succede in ω

$(2, \omega)$

$(0,0) < (1,0) < (0,1) < (1,1) < (0,2) < (1,2) < \cdots$

$\underbrace{\circ < \circ}$ $<$ $\underbrace{\circ < \circ}$ $<$ $\underbrace{\circ < \circ}$ $<$

$2 \cdot \omega = \omega$

Idea per l'idra: discesa infinita

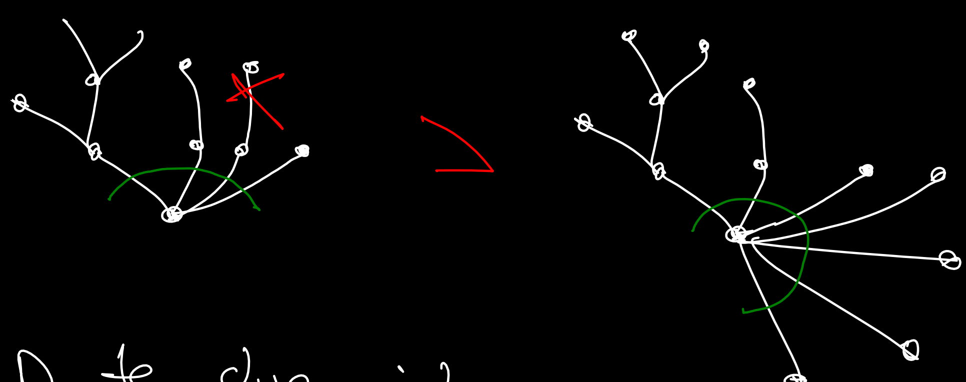
Per attuarla, abbiamo bisogno di un buon ordine sulle idre

Strategia: Mettere un buon ordine

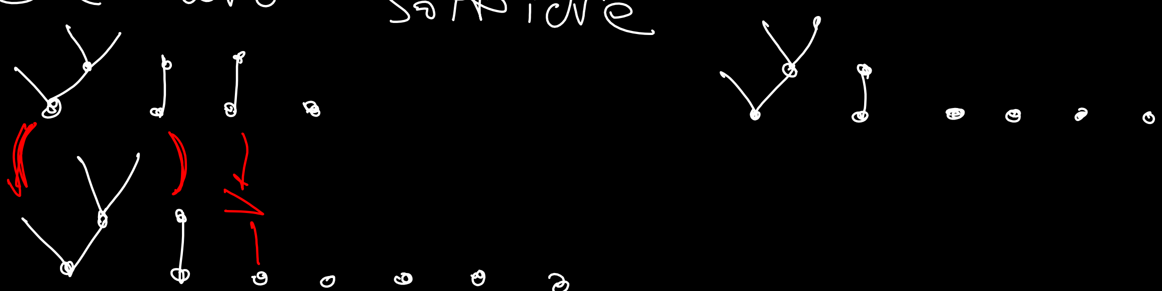
sulle idre tale che qualunque taglio faccia Ercole si ottiene un'idra più piccola (secondo questo ordine!!!)
La tesi segue per discesa infinita

Per altezza: non totale ma buon punto di partenza

Costruiamo ordine ricorsivamente



Date due idre, prendiamo la sucessione delle loro sottoidre



Idra$_1$ > Idra$_2$ se nel primo posto in cui le sucessioni delle sottoidre

differiscono la sottoidra della 1
è > della sottoidra della 2

presuppone ordine già definito
per idre più basse

Stiamo lavorando per ricorsione

La prossima volta costruiremo
meglio l'ordine e dimostreremo
che è un buon ordine