Semifinale nazionale A, edizione VIII, 2007

Esercizio 1

Risposta: 0112

Tra 1 e 36 ci sono 2 numeri che rispettano la proprietà richiesta, cioè 12 e 24; così come tra 37 e 72, ecc; poiché $\mathrm{mcm}\,(12, 18) = 36$, la cosa si ripete con periodo 36. Si ha $\frac{1980}{36} = 55$, quindi sotto 1980 ci sono 110 numeri con la propriet richiesta; 1992 e 2004 completano la lista per un totale di 112.

Esercizio 2

Risposta: 1975

Un multiplo di 25 finisce con 00, 25, 50 o 75, quindi la prima cifra del numero richiesto diviso per 25 è 0, 2, 5 o 7. Tuttavia i primi 2 casi vanno scartati in quanto $25 \cdot 40 = 1000$ e quindi il numero richiesto, di 4 cifre, diviso per 25 dà un risultato maggiore di 40 e inizia quindi con un 5 o con un 7. Notiamo inoltre che, accioché le ultime cifre di un multiplo di 25 siano 50 deve trattarsi di 25 moltiplicato per un numero pari non multiplo di 4. Numeri di 2 cifre con questa proprietà che inizino con 5 sono 50, 54 e 58, ma provando non vanno bene. L'unico caso rimasto è quindi che il numero richiesto finisca con 75, quindi dividendolo per 25 si ottiene un numero che dà resto 3 se diviso per 4. Tali numeri con 2 cifre e prima cifra 7 sono 71, 75 e 79; facendo i conti si scopre che solo 79 va bene, e infatti $79 \cdot 25 = 1975$, che è la risposta.

Esercizio 3

Risposta: 5583

Sia m il numero di muri e sia t il numero di triangoli che si vengono a formare. I muri che delimitano il territorio vanno costruiti in ogni caso; ciò che si forma dopo la fine dei lavori è un grafo planare con $2007 + 1789 = 3796$ vertici, $t + 1$ facce e m lati, quindi per la formula di Eulero si ha $3796 + (t + 1) = m + 2$. Tuttavia il numero di muri pu essere calcolato anche come $2m = 3t + 2007$, infatti ogni triangolo è circondato da 3 muri, la zona esterna al villaggio ha 2007 lati del grafo che la delimitano, e il totale va diviso per 2 in quanto ogni muro separa 2 facce del grafo. Risolvendo il sistema si ottiene $t = 5583$.

Esercizio 4

Risposta: 0671

Prima soluzione: Detta $f(\theta)$ l'espressione dell'esercizio si ha

$$f'(\theta) = -252 \sin\theta - 275 \cos\theta,$$

che si annulla quando $\tan\theta = -\frac{275}{252}$, cioè quando $\sin\theta = \frac{275}{373}$ e $\cos\theta = -\frac{252}{373}$, oppure quando $\sin\theta = -\frac{275}{373}$ e $\cos\theta = \frac{252}{373}$. Guardando la derivata seconda si scopre che nel primo caso si ha il minimo e nel secondo il massimo di $f(\theta)$, ovvero 671.

Seconda soluzione: Moltiplichiamo per

$$1 = \frac{\sqrt{275^2 + 252^2}}{\sqrt{275^2 + 252^2}} = \frac{373}{373}$$

la prima parte dell'espressione, il cui valore quindi non cambia. Si ottiene $\left(\frac{252}{373}\cos\theta - \frac{275}{373}\sin\theta\right) 373 + 298$. Poiché $\frac{252}{373}$ e $\frac{275}{373}$ hanno somma dei quadrati uguale a 1 essi sono rispettivamente coseno e seno di un qualche angolo α, e quindi l'espressione diventa

$$(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)\, 373 + 298 = 373\cos(\alpha + \theta) + 298.$$

Il termine $373\cos(\alpha + \theta)$ assume valore massimo quando $\theta = -\alpha$, e allora vale 373, quindi il massimo valore possibile di tutta l'espressione è

$$373 + 298 = 671.$$

Esercizio 5

Risposta: 0333

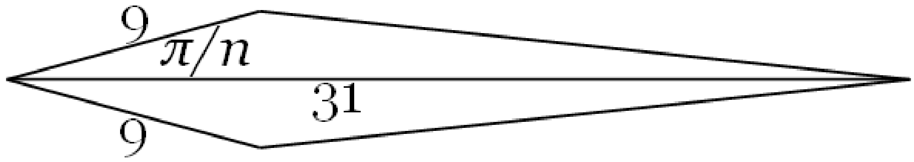
Poiché il codice ha un numero dispari di cifre c'è una cifra centrale, e un gruppo di massimo due cifre laterali (poiché il totale non supera 5) che si ripete in un verso e nell'altro. Per semplicità, assumeremo che il codice abbia comunque cinque cifre, togliendo poi gli eventuali zeri agli estremi. Poiché il numero sia multiplo di 3 la somma delle cifre deve essere un multiplo di 3; quindi, se la cifra centrale è multipla di 3 (quindi è una tra 0, 3, 6, 9), allora la somma delle cifre del gruppo laterale deve essere multipla di 3; se la cifra centrale dà resto 1 divisa per 3 (quindi è 1, 4 o 7) la somma delle cifre del gruppo laterale deve dare resto 2 divisa per 3; infine se la cifra centrale dà resto 2 divisa per 3 (ed è quindi 2, 5 o 8), la somma delle cifre del gruppo laterale deve dare resto 2 divisa per 3. Tutte queste possibilit conducono alla seguente tabella:

Cifra centrale	Prima cifra del gruppo laterale	Seconda cifra del gruppo laterale
	0, 3, 6, 9	0, 3, 6, 9
0, 3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8
	2, 5, 8	1, 4, 7
	0, 3, 6, 9	1, 4, 7
1, 4, 7	1, 4, 7	0, 3, 6, 9
	2, 5, 8	2, 5, 8
	0, 3, 6, 9	2, 5, 8
2, 5, 8	1, 4, 7	1, 4, 7
	2, 5, 8	0, 3, 6, 9

Contando tutte le possibilità si ottengono 334 combinazioni; tuttavia la combinazione 00000 non va bene in quanto il numero deve essere positivo e quindi la risposta è 333.

Esercizio 6

Risposta: 0877



Uno Shuriken a n punte è composto da n pezzi come quelli nella figura e, sfruttando la formula trigonometrica per l'area di un triangolo, la superficie del frammento raffigurato è $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot 9 \cdot 31$, e l'area totale è quindi $n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot 9 \cdot 31$. Poiché $\sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$, si ha $n \sin \frac{\pi}{n} < \pi$, perciò $n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot 9 \cdot 31 < \pi \cdot 9 \cdot 31 \approx 876,5$. Inoltre $\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$ tende a 1 al crescere di n, e dunque la risposta è l'approssimazione per eccesso di $876,5$, cioè 877.

Esercizio 7

Risposta: 3888

Per fare 3 o 4 virgole sono necessarie e sufficienti 2 monete, per farne 8 o 9 ne servono e ne bastano 3. Così sono necessarie e sufficienti 3 monete per 80 o 90 virgole, e altrettante monete o banconote per 8 o 9 korone. Quindi 8 korone 88 virgole esigono almeno 9 monete che sono anche sufficienti. 10 e 20 korone si pagano con una sola banconota, e solo 30 ne richiedono 2. Quindi per un totale di almeno 11 monete o banconote bisogna pagare 38 korone e 88 virgole, e la risposta è 3888.

Esercizio 8

Risposta: 0045

È facile osservare che anche i maschietti stanno solo con i maschietti. Ci saranno allora almeno 10 gruppi formati solo da persone dello stesso sesso (senza perdita di generalità maschietti) e al più 9 formati solo da persone del sesso opposto (senza perdita di generalità femminucce). L'intero positivo n può essere scritto in modo unico come $n = 9k + r$, con k intero non negativo e $0 < r \leqslant 9$. Ignoreremo i casi in cui $k = 0$ poiché non ci sarebbero abbastanza persone da formare 19 gruppi non vuoti. Notiamo poi che i gruppi delle femminucce hanno almeno k elementi, e almeno uno di questi ne ha $k + 1$, pertanto i gruppi dei maschietti hanno almeno k elementi, perciò $9k + r = n \leqslant 10k$. Questa diseguaglianza viene rispettata per $k = 1$ ed $r \leqslant 9$ positivo qualunque, per $k = 2$ e $2 \leqslant r \leqslant 9$, e così via fino a $k = 9$ in cui è rispettata solo per $r = 9$. Quest0 dà luogo a $45 = 9 + 8 + \ldots + 1$ probabili n; è poi facile esibire una costruzione che coinvolge esattamente 9 gruppi di femminucce e 10 di maschietti con questi n.

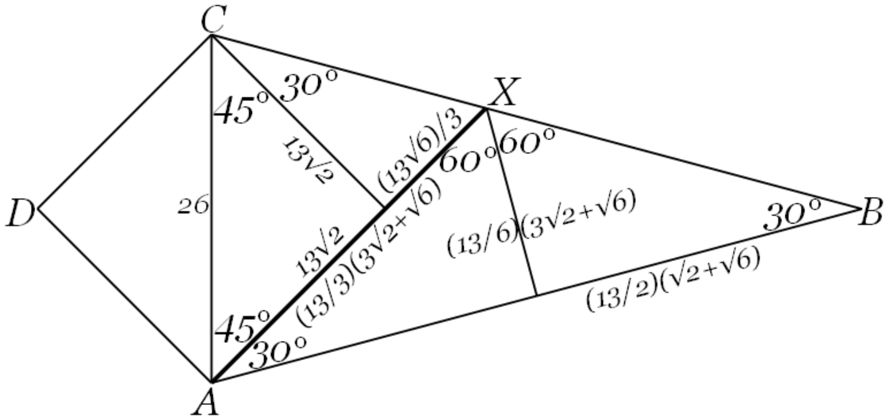
Esercizio 9

Risposta: 0059

Affinché il polinomio $x^2 - ax + 4a$ abbia radici intere il discriminante deve essere un quadrato perfetto, ovvero $a^2 - 16a = k^2$, con k intero. Riscriviamo quest'ultima uguaglianza come $(a - 8)^2 = k^2 + 64$. Poiché a è intero, $k^2 + 64$ deve essere un quadrato perfetto h^2, quindi $64 = h^2 - k^2 = (h + k)(h - k)$. A questo punto è possibile, scomponendo 64 come prodotto di 2 divisori in tutti i modi possibili, trovare le soluzioni intere di quest'ultima equazione. In particolare i possibili valori di k sono 15, 6 e 0, ed i corrispondenti valori positivi di a sono 25, 18 e 16, la cui somma è 59.

Esercizio 10

Risposta: 0435



Con riferimento alla figura, sia X l'altra estremità del taglio. Si ricavano innanzitutto le misure degli angoli e poi, sfruttando le relazioni tra lato e diagonale di un quadrato e quelle tra i lati del triangolo con angoli di 30°, 60°, 90° si ricavano le misure dei segmenti. Si calcolano poi le aree: quella del frammento AXB è circa $420,5$, mentre quella del frammento $AXCD$ è circa $435,6$, perciò la risposta è 435.

Osservazione: per non sbagliare, in esercizi del genere si calcola prima il valore esatto espresso con radicali, frazioni, numeri trascendenti, ecc. e poi si approssima il valore numerico.

Esercizio 11

Risposta: 2592

Tra i divisori di $2^{10}3^8$ ce ne sono 9 con 0 come esponente del 2 (uno per ogni possibile esponente del 3), altri 9 con 1 come esponente del 2, ecc; l'esponente del 2 nel prodotto di tutti i divisori di $2^{10}3^8$ è quindi 9 volte la somma degli interi da 0 a 10, cioè 55. Inoltre, analogamente a prima, tra i divisori di $2^{10}3^8$ ce ne sono 11 con 0 come esponente del 3, altri 11 con 1 come esponente del 3, ecc; l'esponente del 3 nel prodotto richiesto è quindi 11 volte la somma degli interi da 0 a 8, cioè 36. Il prodotto di tutti i divisori di $2^{10}3^8$ è quindi $2^{9\cdot 55}3^{11\cdot 36}$, e la radice 99-esima di questo numero è $2^5 3^4$, ovvero 2592.

Esercizio 12

Risposta: 2376

Chiamiamo x il terzo lato. Per il teorema di Carnot

$$57^2 = 75^2 + x^2 - 2 \cdot 75 \cdot x \cdot \cos 30°,$$

da cui $x^2 - 75 \cdot \sqrt{3} \cdot x + (75^2 - 57^2) = 0$. I possibili valori di x sono dati dalle soluzioni di quest'equazione e, per le relazioni radici-coefficienti, il prodotto di tali valori è $75^2 - 57^2 = 2376$.

Esercizio 13

Risposta: 7524

Il perimetro della matita è 12; col taglio la matita e il perimetro vengono divisi in due parti uguali e quindi i quadretti in cui viene affettata la pergamena hanno lato 6, la loro area è dunque 36 e l'area totale della pergamena è $36 \cdot 209 = 7524$.

Esercizio 14

Risposta: 6016

Dalla terza relazione segue che $b\left(c^3 - 1\right) \leqslant ac^3$, e quindi dividendo e combinando con la prima relazione si ha che $\frac{c^3-1}{c^3}b \leqslant a < b$. Ma allora $b - 1 \geqslant \frac{c^3-1}{c^3}b$, e pertanto $b \geqslant c^3$. Dall'osservazione iniziale segue pertanto che $c^3 - 1 \leqslant a$. Insieme con la seconda relazione questo ci dice che non esistono soluzioni con $c \geqslant 3$ e che c'è una sola soluzione con $a = 7$ e $b = 8$ quando $c = 2$. Se invece $c = 1$, allora a può assumere valore 1, 2 o 3 e b è libero di variare tra gli interi maggiori di a e minori o uguali a 2007. Quest'ultimo caso dà luogo a 6015 possibilità che si sommano alla soluzione già trovata per un totale di 6016.

Esercizio 15

Risposta: 9999

Sia S la somma richiesta e sia $P(x)$ un polinomio monico che ha come radici 2007, $2 \cdot 2007$, $\ldots$, $2007 \cdot 2007$, dunque

$$P(x) = (x - 2007)(x - 2 \cdot 2007) \ldots (x - 2007 \cdot 2007).$$

Per le relazioni radici-coefficienti il coefficiente di grado 2006 è l'opposto della somma di tutti questi numeri, il coefficiente di grado 2005 è la somma di tutti i possibili prodotti a due a due di numeri distinti tra questi, ecc; fino al termine noto che è l'opposto del prodotto di tutti i numeri. Quindi $P(-1) = -S-1$; il -1 è dovuto al termine x^{2007} nel polinomio; ma allora $S = -P(-1) - 1$. Si ha che $P(-1) = (-1-2007)(-1-2\cdot 2007)\dots(-1-2007^2)$ contiene numerosi fattori divisibili per 10 (ad esempio $-1-7\cdot 2007$, $-1-17\cdot 2007$, ecc.), pertanto le ultime cifre di $-P(-1)$ sono 0000 e quindi le ultime cifre di S sono 9999.