Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Appunti del corso di

Istituzioni di Analisi Matematica

Frutto della libera rielaborazione delle lezione tenute dal professor Massimo Gobbino durante l'Anno Accademico 2018/2019

Marco Inversi

Ultima Modifica

08/06/2019

Indice

Capitolo 1

Analisi Funzionale

1.1 Teorema di Hahn-Banach

1.1.1 Motivazioni

Sia dati due spazi vettoriali $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$. Esiste un'applicazione lineare non nulla tra $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$? Se sono anche spazi normati, esiste un'applicazione lineare continua non nulla? Esistono applicazioni lineari non continue? In questa sezione tenteremo di rispondere a queste domande.

Osservazione 1.1.1. Dati $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ spazi vettoriali, l'assioma di scelta garantisce l'esistenza di basi algebriche. Allora è facile costruire un'applicazione lineare non nulla fissandone il valore sulla base di $\mathbb{V}$.

Ricordiamo il sequente risultato, che caratterizza la continuità delle applicazioni lineari.

Proposizione 1.1.2. *Siano $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ spazi normati e sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineare. I seguenti fatti sono equivalenti:*

- *f è continua;*
- *f è continua in 0;*
- *f è limitata, cioè esiste una costante positiva M tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che*

$$\|f(v)\|_{\mathbb{W}} \leq M \|v\|_{\mathbb{V}} ;$$

- *f è lipschitziana.*

Osservazione 1.1.3. Se $\mathbb{V}$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, è facile costruire applicazioni lineari a valori in $\mathbb{R}$ non continue. Essendo $\mathbb{V}$ di dimensione infinita, esiste una famiglia $\mathscr{V} = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di vettori unitari linearmente indipendenti. Per l'assioma di scelta, è possibile completare $\mathscr{V}$ ad una base algebrica $\mathscr{B}$. Allora, definiamo $f(v_n) \coloneqq n$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e $f(v) \coloneqq 0$ per ogni v in $\mathscr{B} \setminus \mathscr{V}$. Per linearità, f si estende ad un'applicazione lineare definita su tutto $\mathbb{V}$ che non è continua perchè non è limitata (vedi 1.1.2).

L'assioma di scelta consente di dimostrare l'esistenza di applicazioni lineari continue; questo risultato è noto come teorema di estensione di Hahn-Banach.

1.1.2 Teorema di Hahn-Banach: forma analitica

Definizione 1.1.4 (Pseudo-norma).
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale. Una pseudo-norma in $\mathbb{V}$ è una funzione $p : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tale che

- $p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$ per ogni v_1, v_2 in $\mathbb{V}$ (subadditiva);
- $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ per ogni v in $\mathbb{V}$, per ogni $\lambda > 0$ (omogeneità positiva).

Teorema 1.1.5 (Hahn-Banach, forma analitica).
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale, $p : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una pseudo-norma su $\mathbb{V}$ (vedi 1.1.4), $\mathbb{E}$ un sottospazio di $\mathbb{V}$ e $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $f(v) \leq p(v)$ per ogni v in $\mathbb{V}$. Esiste un'applicazione lineare $\hat{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tale che

- *$\hat{f}(v) \leq p(v)$ per ogni v in $\mathbb{V}$;*
- *$\hat{f}(v) = f(v)$ per ogni v in $\mathbb{E}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F}$ la famiglia di tutte le coppie $(\mathbb{F}; g)$ tali che

- $\mathbb{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$ che contiene $\mathbb{E}$;
- $g : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare che estende f e tale che $g(v) \leq p(v)$ per ogni v in $\mathbb{F}$.

Dati $(\mathbb{F}_1; g_1)$ e $(\mathbb{F}_2; g_2)$ in $\mathscr{F}$, diciamo che $(\mathbb{F}_2; g_2) \succ (\mathbb{F}_1; g_1)$ se $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2$ e $g_2 \equiv g_1$ in $\mathbb{F}_1$. Abbiamo definito un ordinamento parziale su $\mathscr{F}$. Inoltre, se $(\mathbb{F}_1; g_i)_{i \in \mathscr{I}}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathscr{F}$, è facile vedere che ammette maggiorante: basta definire

$$\mathbb{F}_\infty := \bigcup_{i \in \mathscr{I}} \mathbb{F}_i,$$

$$g_\infty(x) := g_i(x) \text{ se } x \in \mathbb{F}_i.$$

Per definizione di ordinamento in $\mathscr{F}$, la funzione g_∞ è ben definita in $\mathbb{F}_\infty$, è lineare e verifica la stima $g_\infty(v) \leq p(v)$ per ogni v in $\mathbb{F}_\infty$.

Per l'assioma di scelta (nella forma equivalente del lemma di Zorn), esiste un elemento massimale in $\mathscr{F}$ che denotiamo con $(\mathbb{F}; g)$. Per concludere, basta dimostrare che $\mathbb{F} = \mathbb{V}$. Per assurdo, supponiamo che esista v_0 in $\mathbb{V} \setminus \mathbb{F}$ e mostriamo che è possibile estendere ulteriormente g: questo è assurdo perchè è contro la massimalità di $(\mathbb{F}; g)$ rispetto all'ordinamento di $\mathscr{F}$. Se w è un elemento di $\mathbb{F} + \operatorname{Span}(v_0)$, esistono v in $\mathbb{F}$ e un numero reale α tali che $w = v + \alpha v_0$; inoltre tale decomposizione è unica. Supponiamo di aver definito $g(v_0)$. Allora, possiamo definire

$$g(v + \alpha v_0) := g(v) + \alpha g(v_0).$$

Per ogni scelta di $g(v_0)$, l'applicazione $g : \mathbb{F} + \operatorname{Span}(v_0) \to \mathbb{R}$ è lineare ed estende g. Per trovare l'assurdo, quindi, è sufficiente mostrare che si può definire $g(v_0)$ in modo che per ogni v in $\mathbb{F}$ e per ogni α in $\mathbb{R}$ valga la stima

$$g(v + \alpha v_0) \leq p(v + \alpha v_0). \tag{1.1}$$

Osserviamo che, se $\alpha = 0$ ogni scelta per $g(v_0)$ è ammissibile. Se α è positivo, (1.1) è equivalente a richiedere che

$$g\left(\frac{v}{\alpha} + v_0\right) \leq p\left(\frac{v}{\alpha} + v_0\right)$$

per ogni v in $\mathbb{F}$, ovvero che
$$g(w+v_0) \leq p(w+v_0) \tag{1.2}$$
per ogni w in $\mathbb{F}$. Se α è negativo, ponendo $\beta = -\alpha$ e ragionando in maniera analoga, si trova che (1.1) è equivalente a richiedere che
$$g(z-v_0) \leq p(z-v_0) \tag{1.3}$$
per ogni z in $\mathbb{F}$. Unendo le condizioni (1.2) e (1.3), la condizione (1.1) è equivalente a richiedere che
$$g(z) - p(z-v_0) \leq g(v_0) \leq p(w+v_0) - g(w) \tag{1.4}$$
per ogni z, w in $\mathbb{F}$. Dunque, se vale la stima
$$g(z) - p(z-v_0) \leq p(w+v_0) - g(w) \tag{1.5}$$
per ogni z, w in $\mathbb{F}$, allora è possibile scegliere $g(v_0)$ in modo tale che sia vera la condizione (1.4) e questo conduce all'assurdo. Si osserva facilmente che per le proprietà di linearità e di g in $\mathbb{F}$, la limitazione di g in $\mathbb{F}$ con la pseudo-norma e la subadditività di p vale che
$$g(z) + g(w) = g(z+w) \leq p(z+w) \leq p(z-v_0) + p(w+v_0) \tag{1.6}$$
per ogni z, w in $\mathbb{F}$. Le condizioni (1.6) e (1.5) sono ovviamente equivalenti. Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Corollario 1.1.6 (Funzionale allineato)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale normato e sia v_0 in $\mathbb{V}$. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tale che

- $f(v_0) = \|v_0\|_{\mathbb{V}}$*;*
- f *è* 1*-lipschitziana, cioè* $|f(v)| \leq \|v\|_{\mathbb{V}}$ *per ogni* v *in* $\mathbb{V}$*.*

Dimostrazione. Poniamo $\mathbb{E} \coloneqq \mathrm{Span}(v_0)$; definiamo $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ tale che
$$\varphi(\alpha v_0) \coloneqq \alpha \|v_0\|_{\mathbb{V}}.$$
Usando la norma di $\mathbb{V}$ come pseudo-norma, il teorema 1.1.5 garantisce l'esistenza di un'estensione lineare e 1-lipschitziana di φ a tutto $\mathbb{V}$. □

Osservazione 1.1.7. Siano $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sono spazi vettoriali normati. Per il corollario 1.1.6 esiste un'applicazione lineare continua φ tra $\mathbb{V}$ ed $\mathbb{R}$. Inoltre, è facile costruire un'applicazione lineare continua ψ tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{W}$. Per composizione, otteniamo un'applicazione lineare continua tra $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$.

Esempio 1.1.8. Sia $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ con la norma 1, cioè $\|(x;y)\|_1 = |x| + |y|$; sia $v_0 = (1;0)$. Per ogni α in $(-1,1)$ poniamo $f_\alpha(x;y) \coloneqq x + \alpha y$. Osserviamo che $f_\alpha(v_0) = \|v_0\|_1$ e che per ogni (x,y) in $\mathbb{R}^2$, per ogni α in $(-1,1)$ vale che
$$|f_\alpha(x,y)| = |x + \alpha y| \leq |x| + |y| = \|(x;y)\|_1.$$
In altri termini, f_α è un funzionale allineato a v_0. Questo esempio mostra che il funzionale allineato ad un vettore in generale non è unico. A livello puramente euristico, possiamo dire che questo fenomeno è legato alla presenza di "angoli" nella palla unitaria rispetto alla norma 1.

1.1.3 Spazi di applicazioni lineari continue

Definizione 1.1.9 (Norma operatoriale)**.**
Siano $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ spazi normati. Si indica con $\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})$ l'insieme delle applicazioni lineari e continue tra $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$. Per ogni f in $\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})$, poniamo

$$\|f\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} := \sup\left\{\|f(v)\|_{\mathbb{W}} \mid \|v\|_{\mathbb{V}} \le 1\right\}.$$

Osservazione 1.1.10. Per la proposizione 1.1.2, è facile vedere che la definizione 1.1.9 è ben posta e che la funzione $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} : \mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W}) \to [0,+\infty)$ è una norma che associa ad ogni funzione lineare continua la sua costante di Lipschitz (come nella proposizione 1.1.2).

Proposizione 1.1.11. *Siano $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ spazi normati. Supponiamo che $\mathbb{W}$ sia uno spazio di Banach. Lo spazio $\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})$ con la norma operatoriale definita in 1.1.9 è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})$ con la proprietà di Cauchy rispetto alla norma operatoriale. Sia v in $\mathbb{V}$; osserviamo che per ogni n, m in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_{\mathbb{W}} = \|(f_n - f_m)(v)\|_{\mathbb{W}} \le \|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} \|v\|_{\mathbb{V}}.$$

In altri termini, $\{f_n(v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{W}$ per ogni v in $\mathbb{V}$. Essendo $\mathbb{W}$ uno spazio di Banach, per ogni v in $\mathbb{V}$ esiste $f_\infty(v)$ in $\mathbb{W}$ tale che la successione $\{f_n(v)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f_\infty(v)$. Abbiamo mostrato che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad una funzione f_∞: questo garantisce che f_∞ è lineare e lipschitziano (infatti la successione delle costanti di Lipschitz relative alla successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata). Basta mostrare che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f_∞ rispetto alla norma operatoriale. Sia dato $\varepsilon > 0$; esiste n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \ge n_0$ si ha $\|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} \le \varepsilon$. In altri termini, per ogni $n, m \ge n_0$ per ogni v in $\mathbb{V}$ tale che $\|v\|_{\mathbb{V}} \le 1$ vale che

$$\|f_n(v) - f_m(v)\|_{\mathbb{W}} \le \|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} \|v\|_{\mathbb{V}} \le \varepsilon.$$

Prendendo il limite per m che tende a $+\infty$, otteniamo che per ogni $n \ge n_0$ per ogni v in $\mathbb{V}$ tale che $\|v\|_{\mathbb{V}} \le 1$ si ha che

$$\|f_n(v) - f_\infty(v)\|_{\mathbb{W}} \le \varepsilon;$$

passando al sup in v si trova che $\|f_n - f_\infty\|_{\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{W})} \le \varepsilon$ per ogni $n \ge n_0$. Questo conclude la dimostrazione. □

Esempio 1.1.12. Siano $\mathbb{V} = \{u \in C^0([0,1]) \mid u(0) = 0\}$ con la norma del sup e $\mathbb{W} = \mathbb{R}$. Poniamo

$$f(u) = \int_0^1 u(x)\, dx.$$

Si mostra facilmente che f è 1-lipschitziana, tuttavia non esiste u in $\mathbb{V}$ tale che $\|u\|_{\mathbb{V}} = 1$ e $|f(u)| = 1$. L'esempio mostra che è possibile che l'estremo superiore nella definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9) non sia un massimo.

Definizione 1.1.13 (Duale topologico)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato. Lo spazio $\mathscr{L}(\mathbb{V};\mathbb{R})$ dotato della norma operatoriale definita in 1.1.9 è detto duale (topologico) di $\mathbb{V}$ e si indica con $\mathbb{V}'$.

Osservazione 1.1.14. La proposizione 1.1.11 assicura che il duale topologico di uno spazio normato $\mathbb{V}$ è uno spazio di Banach.

Lemma 1.1.15 (Caratterizzazione duale della norma)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato e sia $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico come nella definizione 1.1.13. Per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\|v\|_{\mathbb{V}} = \sup\left\{|f(v)| \ \mid\ f \in \mathbb{V}', \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\right\} = \max\left\{|f(v)| \ \mid\ f \in \mathbb{V}', \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\right\}.$$

Dimostrazione. Sia f in $\mathbb{V}'$ tale che $\|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1$. Vale che

$$|f(v)| \leq \|f\|_{\mathbb{V}'} \|v\|_{\mathbb{V}} \leq \|v\|_{\mathbb{V}}.$$

Quindi vale che

$$\|v\|_{\mathbb{V}} \geq \sup\left\{|f(v)| \ \mid\ f \in \mathbb{V}', \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\right\}$$

Per il corollario 1.1.6, dato v in $\mathbb{V}$ esiste un funzionale allineato a v, cioè un'applicazione f in $\mathbb{V}'$ tale che $\|f\|_{\mathbb{V}'} = 1$ e $f(v) = \|v\|_{\mathbb{V}}$. Questo garantisce che

$$\|v\|_{\mathbb{V}} \leq \sup\left\{|f(v)| \ \mid\ f \in \mathbb{V}', \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\right\}$$

e che l'estremo superiore è realizzato dal funzionale allineato. □

Esempio 1.1.16. Sia Ω un insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione misurabile. Denotiamo con $|\cdot|$ la norma euclidea su $\mathbb{R}^d$. La caratterizzazione duale della norma consente di dimostrare facilmente la seguente disuguaglianza:

$$\left|\int_\Omega f(x)\ dx\right| \leq \int_\Omega |f(x)|\ dx.$$

Sia $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare. Vale che

$$L\left(\int_\Omega f(x)\ dx\right) = \int_\Omega L(f(x))\ dx.$$

Utilizzando la disuguaglianza analoga per funzioni di una variabile a valori in $\mathbb{R}$ (la cui verifica è elementare), se $\|L\|_{(\mathbb{R}^d)'} \leq 1$, si trova che

$$\begin{aligned}\left|L\left(\int_\Omega f(x)\ dx\right)\right| &= \left|\int_\Omega L(f(x))\ dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |L(f(x))|\ dx \\ &\leq \int_\Omega \|L\|_{(\mathbb{R}^d)'} |f(x)|\, dx \\ &\leq \int_\Omega |f(x)|\ dx.\end{aligned}$$

La disuguaglianza passa all'estremo superiore rispetto alle applicazioni L in $(\mathbb{R}^d)'$ aventi norma operatoriale minore o uguale a 1. Si conclude con la caratterizzazione duale della norma (vedi 1.1.15).

Esempio 1.1.17. Sia $d \geq 1$ un intero. Per il teorema di rappresentazione di Riesz in dimensione finita, il duale di $\mathbb{R}^d$ dotato della norma euclidea è isometrico a $\mathbb{R}^d$ e ogni applicazione lineare continua da $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}$ coincide con il prodotto scalare per un vettore di $\mathbb{R}^d$.

Ricordiamo che la funzione

$$|x|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

è una norma su $\mathbb{R}^d$ (è la norma 1). Vogliamo determinare il duale di $\mathbb{R}^d$ dotato della norma $|\cdot|_1$. Ricordiamo che questa è equivalente alla norma euclidea. Data un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua rispetto alla norma 1, L è continua rispetto alla norma euclidea; quindi, esiste un vettore v in $\mathbb{R}^d$ tale che $L(x) =< v, x >$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$. Vogliamo determinare la norma operatoria di L. Osserviamo che per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$|L(x)| \leq \max\{|v_i| \mid i = 1, \ldots, d\} \, |x|_1 \, ;$$

dunque la norma operatoria di L è minore o uguale di $\max\{|v_i| \mid i = 1, \ldots, d\}$. Dobbiamo mostrare la disuguaglianza opposta; supponiamo che $\max\{|v_i| \mid i = 1, \ldots, d\} = v_1$ e prendere x in $\mathbb{R}^d$ tale che $x_1 := \operatorname{sgn}(v_1)$ e $x_i := 0$ se $i \geq 2$. Allora è ovvio che

$$\|L\|_{(\mathbb{R}^d)'} \geq |v_i| = \max\{|v_i| \mid i = 1, \ldots, d\}.$$

Questo mostra che il duale di $\mathbb{R}^d$ dotato della norma 1 è isometrico a $\mathbb{R}^d$ dotato della norma ∞, nel senso che la mappa

$$J : (\mathbb{R}^d; |\cdot|_\infty) \to (\mathbb{R}^d; |\cdot|_1)'$$

tale che $L(v) :=< v, \cdot >$ è un'isometria lineare e bigettiva.

1.1.4 Convergenza debole e debole*

Definizione 1.1.18 (Convergenza debole e debole*).
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato, sia $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico (vedi 1.1.13). Siano $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}$ e v_∞ un elemento in $\mathbb{V}$. Si dice che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole a v_∞ e si scrive $v_n \rightharpoonup v_\infty$ se per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(v_\infty).$$

Siano $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}'$ e f_∞ un elemento in $\mathbb{V}'$. Si dice che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* a f_∞ e si scrive $v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v_\infty$ se per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(v) = f_\infty(v).$$

Osservazione 1.1.19. Nelle notazioni della definizione 1.1.18, è ovvio che la convergenza in norma di una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ implica la convergenza debole.

La convergenza debole* è la convergenza puntuale di una famiglia di funzionali lineari continui ad un funzionale lineare continuo.

Proposizione 1.1.20. *Nel contesto della definizione precedente, valgono i seguenti fatti:*

- *se* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sono successioni in* $\mathbb{V}$ *che convergono debole a* v_∞ *e* u_∞ *in* $\mathbb{V}$ *rispettivamente e se* α *è un numero reale, allora* $\{v_n + \alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge debolmente a* $v_\infty + \alpha u_\infty$*;*

- *se* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* v_∞ *rispetto alla norma di* $\mathbb{V}$*, allora* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge debolmente a* v_∞*;*

- *se* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ammette un limite debole, allora tale limite è unico.*

Dimostrazione. L'unica affermazione non banale è l'unicità del limite debole. Supponiamo che esistano v_∞ e u_∞ tali che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole a v_∞ e u_∞. In altri termini, per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che

$$f(v_\infty) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(u_\infty),$$

cioè $f(v_\infty - u_\infty) = 0$. Se $u_\infty \neq v_\infty$, sia f il funzionale allineato a $v_\infty - u_\infty$ (vedi 1.1.6); l'assurdo segue banalmente. □

Teorema 1.1.21 (Semicontintinuità inferiore della norma)**.**
Sia $\mathbb{V}$ *uno spazio normato e sia* $\mathbb{V}'$ *il suo duale topologico (vedi 1.1.13). Valgono i seguenti fatti:*

- *se* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* $\mathbb{V}$ *che converge debole ad un elemento* v_∞ *in* $\mathbb{V}$*, allora*
$$\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|_{\mathbb{V}} \geq \|v_\infty\|_{\mathbb{V}}\,;$$

- *se* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* $\mathbb{V}'$ *che converge debole * ad un funzionale* f_∞ *in* $\mathbb{V}'$*, allora*
$$\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\mathbb{V}'} \geq \|f_\infty\|_{\mathbb{V}'}\,.$$

Dimostrazione. Sia f un funzionale allineato a v_∞ (vedi 1.1.6). Vale che

$$\|v_\infty\|_{\mathbb{V}} = |f(v_\infty)| = \lim_{n\to+\infty} |f(v_n)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|_{\mathbb{V}}\,.$$

Per quanto riguarda il secondo enunciato, sia v in $\mathbb{V}$ tale che $\|v\|_{\mathbb{V}} \leq 1$. Allora vale che

$$|f_\infty(v)| = \liminf_{n\to+\infty} |f_n(v)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\mathbb{V}'} \|v\|_{\mathbb{V}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\mathbb{V}'}\,.$$

Per la definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9), si ha la tesi passando all'estremo superiore al variare dei vettori v in $\mathbb{V}$ tali che $\|v\|_{\mathbb{V}} \leq 1$. □

Teorema 1.1.22 (Banach-Alaoglu)**.**
Sia $\mathbb{V}$ *uno spazio normato separabile, sia* $\mathbb{V}'$ *il suo duale topologico (vedi 1.1.13). Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione in* $\mathbb{V}'$ *limitata rispetto alla norma di* $\mathbb{V}'$ *da una costante* M*. Allora esiste una sottosuccessione, non rinominata, ed un funzionale lineare continuo* f_∞ *tale che* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge debole* a* f_∞*. Inoltre,* $\|f_\infty\|_{\mathbb{V}'} \leq M$*.*

Dimostrazione. Sia D un sottoinsieme denso e numerabile in $\mathbb{V}$. Osserviamo che per ogni d in D per ogni n in $\mathbb{N}$ vale la stima

$$|f_n(d)| \leq \|f_n\|_{\mathbb{V}'} \|d\|_{\mathbb{V}} \leq M \|d\|_{\mathbb{V}}\,.$$

In particolare, la successione $\{f_n(d)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata per ogni d in D. Essendo D numerabile, con un procedimento diagonale è possibile trovare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f_\infty : D \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(d) = f_\infty(d)$$

per ogni d in D. Vogliamo mostrare che per la stessa sottosuccessione si ha che $\{f_{n_k}(v)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy per ogni v in $\mathbb{V}$. Sia dato $\varepsilon > 0$; scegliamo d in D tale che $\|v-d\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{\varepsilon}{3M}$; scegliamo n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $k,h \geq n_0$ vale che $|f_{n_k}(d) - f_{n_h}(d)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Allora, per ogni $h,k \geq n_0$ vale che

$$\begin{aligned}
|f_{n_k}(v) - f_{n_h}(v)| &\leq |f_{n_k}(d) - f_{n_k}(v)| + |f_{n_k}(d) - f_{n_h}(d)| + |f_{n_h}(d) - f_{n_h}(d)| \\
&\leq M\,\|d-v\|_{\mathbb{V}} + |f_{n_k}(d) - f_{n_h}(d)| + M\,\|d-v\|_{\mathbb{V}} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Questo argomento permette di estendere la funzione f_∞ a tutto $\mathbb{V}$, con la proprietà che

$$f_\infty(v) := \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(v).$$

La convergenza puntuale assicura che f_∞ è lineare e che è lipschitziana (la successione delle costanti di Lipschitz di $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata). □

Osservazione 1.1.23. Precisiamo che non esiste un duale di questo teorema, cioè non è detto che una successione di vettori in $\mathbb{V}$ limitata in norma abbia una sottosuccessione debolmente convergente. Un enunciato del genere è vero sotto ipotesi aggiuntive, come preciseremo in seguito.

Osservazione 1.1.24. La versione del teorema 1.1.22 enunciata e dimostrata non è quella più generale possibile. L'ipotesi di separabilità può essere rimossa e tutta la teoria può essere formulata in un contesto molto più generale.

1.1.5 Teorema di Hahn-Banach: forma geometrica

Definizione 1.1.25 (Separazione mediante iperpiani)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico. Siano A, B sottoinsiemi di $\mathbb{V}$ e f un funzionale in $\mathbb{V}'$.

- Si dice che f separa debolmente A e B se per ogni a in A e per ogni b in B vale che $f(a) < f(b)$.
- Si dice che f separa strettamente A e B se esistono due numeri reali δ_1, δ_2 tali che per ogni a in A e per ogni b in B vale che $f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(b)$.

Siamo interessati a mostrare l'esistenza di separazioni forti e deboli, almeno tra certi sottoinsiemi di $\mathbb{V}$.

Lemma 1.1.26 (Pseudo-norma associata ad un insieme convesso)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato e sia C un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ convesso, aperto e contenente 0*. Per ogni v in $\mathbb{V}$ definiamo*

$$p(v) := \inf\left\{\alpha > 0 \;\middle|\; \frac{v}{\alpha} \in C\right\}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- *p è una pseudo-norma (vedi 1.1.4);*
- *esiste un numero reale M tale che $0 \leq p(v) \leq M \|v\|_{\mathbb{V}}$ per ogni v in $\mathbb{V}$;*
- *C è la palla unitaria rispetto alla pseudo-norma, cioè si ha che*

$$C = \{v \in \mathbb{V} \mid p(v) < 1\}.$$

Dimostrazione. Sia v in $\mathbb{V}$ fissato; definiamo l'insieme

$$A(v) := \left\{ \alpha > 0 \;\middle|\; \frac{v}{\alpha} \in C \right\}.$$

Siccome C è un intorno aperto di 0 ed è convesso, l'insieme $A(v)$ è una semiretta destra aperta, cioè

$$A(v) = (p(v), +\infty).$$

Per quanto riguarda il primo enunciato, osserviamo che per ogni v in $\mathbb{V}$ per ogni numero positivo λ si ha che $A(\lambda v) = \lambda A(v)$, pertanto $p(\lambda v) = \lambda p(v)$. Per mostrare che p è subadditiva, è sufficiente verificare che per ogni v_1, v_2 in $\mathbb{V}$ vale che $A(v_1) + A(v_2)$ è contenuto in $A(v_1 + v_2)$, cioè che per ogni α_1 in $A(v_1)$ per ogni α_2 in $A(v_2)$ vale che $\alpha_1 + \alpha_2$ è in $A(v_1 + v_2)$. Osserviamo che

$$\frac{v_1 + v_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{v_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{v_2}{\alpha_2}$$

appartiene a C perchè e una combinazione convessa di due suoi elementi, per definizione di $A(v_1)$ e $A(v_2)$.

Per quanto riguarda il secondo enunciato, è ovvio che p sia una funzione non negativa. Osserviamo anche che esiste un raggio r tale che $\overline{\mathcal{B}(0; r)}$ è completamente contenuto in C. Notiamo che per ogni v in $\mathbb{V} \setminus \{0\}$ vale che $\frac{r}{\|v\|_{\mathbb{V}}} v$ è un elemento di C; quindi concludiamo facilmente che

$$p(v) \leq \frac{1}{r} \|v\|_{\mathbb{V}}.$$

Per quanto concerne il terzo enunciato, è un'ovvia conseguenza della definizione di p. Infatti, se v è un elemento di C, allora 1 appartiene ad $A(v)$; del resto, $A(v)$ è un insieme aperto e $p(v)$ ne è l'estremo inferiore, quindi è strettamente minore di 1. Invece, se $p(v) < 1$, essendo $A(v)$ una semiretta destra, si ha che 1 appartiene ad $A(v)$, cioè v è un elemento di C. □

Proposizione 1.1.27. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e C un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ convesso, aperto e contenente 0. Sia v_0 un punto in $\mathbb{V} \setminus C$. Allora esiste una separazione debole tra v_0 e C nel senso della definizione 1.1.25.*

Dimostrazione. Sia p la pseudo-norma associata a C costruita come nella proposizione 1.1.26. Poniamo $E = \operatorname{Span}(v_0)$ e definiamo $f : E \to \mathbb{R}$ tale che $f(\alpha v_0) := \alpha$. L'applicazione f è ovviamente lineare; inoltre per ogni α in $\mathbb{R}$ vale la stima

$$f(\alpha v) \leq p(\alpha v).$$

Infatti, se $\alpha \leq 0$ allora è ovvia; se, invece, α è positivo segue banalmente dal fatto che $p(v_0) \geq 1$, essendo v_0 in $\mathbb{V} \setminus C$ (vedi 1.1.26).

Per il teorema di Hahn-Banach nella versione analitica (vedi 1.1.5), esiste un'applicazione lineare $\hat{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ che estende f e tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale la stima $\hat{f}(v) \leq p(v)$. Per il secondo enunciato del lemma 1.1.26, esiste un numero positivo M tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ valgono le seguenti disuguaglianze

$$\hat{f}(v) \leq p(v) \leq M \|v\|_{\mathbb{V}} ,$$

$$\hat{f}(-v) \leq p(v) \leq M \|v\|_{\mathbb{V}} ;$$

da ciò segue facilmente che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\left| \hat{f}(v) \right| \leq M \|v\|_{\mathbb{V}} ,$$

cioè $\hat{f}$ è continua.

Infine, osserviamo che $\hat{f}$ è la separazione debole cercata: infatti, come segue dal lemma 1.1.26, per ogni v in C vale che

$$\hat{f}(v) \leq p(v) < 1 = f(v_0).$$

□

Corollario 1.1.28. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e C un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ convesso, aperto. Sia v_0 un punto in $\mathbb{V} \setminus C$. Allora esiste una separazione debole tra v_0 e C nel senso della definizione 1.1.25.*

Dimostrazione. Sia w_0 un qualsiasi punto in C. Poniamo $\hat{C} := C - w_0$ e $\hat{v}_0 = v_0 - w_0$. Si osserva facilmente che $\hat{C}$ e $\hat{v}_0$ rispettano le ipotesi della proposizione 1.1.27; allora esiste una separazione debole tra $\hat{C}$ e $\hat{v}_0$; è immediato verificare che tale separazione vale anche per C e v_0. □

Teorema 1.1.29 (Hahn-Banach, prima forma geometrica)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato, A e B due sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{V}$ tali che A è un aperto convesso e B è convesso. Allora esiste una separazione debole nel senso della definizione 1.1.25.

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$C := A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Essendo unione di traslati di A, l'insieme C è aperto. Inoltre è convesso: dati a_1, a_2 in A, b_1, b_2 in B e t in $[0, 1]$, si ha che

$$t(a_1 - b_1) + (1 - t)(a_2 - b_2) = [ta_1 + (1 - t)a_2] - [tb_1 + (1 - t)b_2]$$

che è un elemento di C, essendo A e B convessi. Siccome A e B sono disgiunti, vale che 0 non appartiene a C. Per il corollario 1.1.28, esiste un'applicazione lineare continua f tale che per ogni a in A per ogni b in B vale che

$$0 = f(0) < f(a - b) = f(a) - f(b).$$

f è una separazione debole cercata tra A e B. □

Teorema 1.1.30 (Hahn-Banach, seconda forma geometrica)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato, A e B due sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{V}$ tali che A è un convesso compatto e B è un convesso chiuso. Allora esiste una separazione forte nel senso della definizione 1.1.25.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$A_\varepsilon := A + \mathcal{B}(0;\varepsilon), \quad B_\varepsilon := B + \mathcal{B}(0;\varepsilon).$$

Affermiamo che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni ε in $(0, \varepsilon_0)$, A_ε e B_ε sono disgiunti. Supponiamo per assurdo che per infiniti n in $\mathbb{N}$ esistano a_n in A, b_n in B, z_n, w_n in $\mathcal{B}(0; 2^{-n})$ tali che

$$a_n + z_n = b_n + w_n.$$

Per compattezza di A, esiste a_∞ in A tale che la successione $\{a_n\}_{n\in I}$ (I è qualsiasi sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$) converge ad a_∞. Siccome $\{z_n\}_{n\in I}$ e $\{w_n\}_{n\in I}$ convergono a 0, anche $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad a_∞. Essendo B chiuso, a_∞ appartiene a B; tuttavia, questo è contro il fatto che A e B sono disgiunti.

Sia N in $\mathbb{N}$ tale che $A_{2^{-N}}$ e $B_{2^{-N}}$ sono disgiunti. Inoltre, è facile verificare che $A_{2^{-N}}$ e $B^{2^{-N}}$ sono aperti convessi. Per il teorema 1.1.29 esiste un'applicazione lineare continua f che li separa debolmente, cioè tale che per ogni a in A, per ogni b in B, per ogni v, w in $\mathcal{B}(0;1)$ vale la stima

$$f(a + 2^{-N}v) < f(b + 2^{-N}w).$$

Sia c un numero reale nella separazione tra i due insiemi. Sia v_0 in $\mathcal{B}(0;1)$ tale che $f(v_0) > 0$. Allora, per ogni a in A per ogni b in B vale che

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a + 2^{-N}v_0) - f(2^{-N}v_0) \\ &\leq c - 2^{-N}f(v_0) \\ &\leq c + 2^{-N}f(v_0) \\ &\leq f(b - 2^{-N}v_0) + f(2^{-N}v_0) = f(b); \end{aligned}$$

dunque f separa strettamente A e B. □

Corollario 1.1.31. *Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato; esiste sempre una separazione stretta tra un punto ed un chiuso convesso che non lo contiene.*

Dimostrazione. La verifica segue ovviamente dal teorema 1.1.30. □

Esempio 1.1.32. In $\mathbb{R}^2$, siano

$$A = \{y \leq 0\}, \ B = \left\{y \geq \frac{1}{x}, x > 0\right\}.$$

A e B sono due convessi chiusi disgiunti; tuttavia, non esiste una separazione forte tra A e B. L'esempio mostra che il teorema 1.1.30 è generalmente falso se nessuno tra A e B è compatto.

Teorema 1.1.33. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e A un sottoinsieme di $\mathbb{V}$ convesso e fortemente chiuso, cioè se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in A che converge fortemente a v_∞, questo è un elemento di A. Allora A è debolmente chiuso, cioè se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in A che converge debolmente a v_∞, questo è un elemento di A.*

Dimostrazione. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in A che converge debolmente a v_∞; supponiamo che v_∞ non appartenga ad A. Per il corollario 1.1.31, esiste un'applicazione lineare continua f e due numeri reali δ_1, δ_2 tali che per ogni a in A vale

$$f(a) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq f(v_\infty).$$

Per definizione di convergenza debole (vedi 1.1.18), si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(v_\infty).$$

L'assurdo segue banalmente. □

Teorema 1.1.34. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Supponiamo che φ sia fortemente semicontinua inferiormente, cioè se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{V}$ che converge fortemente a v_∞, vale la disuguaglianza*

$$\liminf_{n\to+\infty} \varphi(v_n) \geq \varphi(v_\infty). \tag{1.7}$$

Allora φ è debolmente semicontinua inferiormente, cioè se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{V}$ che converge debolmente a v_∞, vale la disuguaglianza (1.7).

Dimostrazione. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}$ e v_∞ un punto tale che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v_∞. Dobbiamo mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \varphi(v_n) \geq \varphi(v_\infty). \tag{1.8}$$

Se il membro di sinistra in (1.8) è $+\infty$, non c'è nulla da dimostrare. A meno di estrarre una sottosuccessione, non rinominata, possiamo supporre che il limite inferiore sia un limite che denotiamo con l in $[-\infty, +\infty)$. Per ogni $M > l$, poniamo

$$S_M := \{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) \leq M\}.$$

Essendo φ fortemente semicontinua inferiormente e convessa, S_M è convesso e fortemente chiuso. Per il teorema 1.1.33, allora è anche chiuso debolmente. Osserviamo che per ogni $M > l$, la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente contenuta in S_M; pertanto, v_∞ appartiene ad S_M per ogni $M > l$. In altri termini, si ha che

$$\varphi(v_\infty) \leq l = \liminf_{n\to+\infty} \varphi(v_n).$$

□

Proposizione 1.1.35. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato e $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico (vedi 1.1.13). Supponiamo che $\mathbb{V}'$ sia separabile. Allora anche $\mathbb{V}$ è separabile.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{V}'$ è separabile, allora la sfera unitaria in $\mathbb{V}'$ è separabile (infatti ogni sottoinsieme di uno spazio metrico separabile è separabile). Sia $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme denso della sfera unitaria di $\mathbb{V}'$; in particolare, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $\|f_n\|_{\mathbb{V}'} = 1$. Per definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9), per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste v_n in $\mathbb{V}$ tale che $|f(v_n)| > \frac{1}{2}$ e $\|v_n\|_{\mathbb{V}} = 1$. Vogliamo mostrare che $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ è denso in $\mathbb{V}$. Poniamo

$$W := \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\})};$$

per assurdo, supponiamo che esista v in $\mathbb{V} \setminus W$; in particolare, $v \neq 0$. Si verifica facilmente che W è convesso; allora, per la proposizione 1.1.31, esiste una separazione forte tra v e W, cioè esiste f in $\mathbb{V}'$ e α in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in W vale

$$f(x) < \alpha < f(v).$$

Essendo f lineare e W un sottospazio vettoriale, per ogni λ in $\mathbb{R}$ per ogni x in W vale che

$$\lambda f(x) < f(x_0).$$

Allora, deve valere $f(x) = 0$ per ogni x in W. A meno di dividere f per la sua norma operatoriale, si può assumere che $\|f\|_{\mathbb{V}'} = 1$. Per densità di $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nella sfera unitaria di $\mathbb{V}'$, esiste N in $\mathbb{N}$ tale che $\|f - f_N\|_{\mathbb{V}'} < \frac{1}{2}$. Allora, troviamo che

$$\begin{aligned}
|f(v_N)| &= |f(v_N) - f_N(v_N) + f_N(v_N)| \\
&\geq |f_N(v_N)| - |f(v_N) - f_N(v_N)| \\
&\geq |f_N(v_N)| - \|f - f_N\|_{\mathbb{V}'} \|v_N\|_{\mathbb{V}} \\
&> \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 > 0;
\end{aligned}$$

questo è assurdo perchè v_N è in W e f è nulla su W. □

1.1.6 Spazi riflessivi

Lemma 1.1.36. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato, $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico (vedi 1.1.13) e $\mathbb{V}''$ il duale topologico di $\mathbb{V}'$. Sia $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}''$ tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ J_v è il funzionale tra $\mathbb{V}'$ ed $\mathbb{R}$ che valuta ogni funzionale tra $\mathbb{V}$ ed $\mathbb{R}$ la valutazione di un funzionale in v. Precisamente, per ogni v in $\mathbb{V}$ per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che*

$$J_v(f) \coloneqq f(v).$$

L'applicazione J è ben definita ed è un'isometria lineare.

Dimostrazione. Fissiamo v in $\mathbb{V}$. Per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che

$$|J_v(f)| = |f(v)| \leq \|f\|_{\mathbb{V}'} \|v\|_{\mathbb{V}}.$$

Il funzionale J_v è chiaramente lineare ed è anche continuo, con costante di Lipschitz $\|v\|_{\mathbb{V}}$. Pertanto, la mappa J è ben definita. Ovviamente, J è lineare; mostriamo che è un'isometria. Per la definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9) e per la caratterizzazione duale della norma (vedi 1.1.15), per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|J_v\|_{\mathbb{V}''} &= \sup\{|J_v(f)| \mid f \in \mathbb{V}',\ \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\} \\
&= \sup\{|f(v)| \mid f \in \mathbb{V}',\ \|f\|_{\mathbb{V}'} \leq 1\} \\
&= \|v\|_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

□

Definizione 1.1.37 (Spazio riflessivo)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato, $\mathbb{V}'$ il suo duale topologico (vedi 1.1.13) e $\mathbb{V}''$ il duale topologico di $\mathbb{V}'$. Sia $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}''$ la mappa definita nel lemma 1.1.36. Si dice che $\mathbb{V}$ è uno spazio riflessivo se J è surgettiva, cioè se ogni funzionale lineare continuo tra $\mathbb{V}'$ ed $\mathbb{R}$ coincide con la valutazione in un certo vettore v di $\mathbb{V}$.

Teorema 1.1.38. *Sia $\mathbb{V}$ uno spazio di Banach riflessivo. Supponiamo che $\mathbb{V}'$ sia separabile. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{V}$. Allora esiste una sottosuccessione (non rinominata) e un vettore v_∞ in $\mathbb{V}$ tale che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{V}$ a v_∞.*

Dimostrazione. Sia $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}''$ la mappa definita in 1.1.36. Essendo J riflessivo, J è un'isometria lineare bigettiva (vedi 1.1.37 e 1.1.36). Osserviamo che $\{J_{v_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $\mathbb{V}''$; per il teorema di Banach-Alaouglu (vedi 1.1.22), esiste una sottosuccessione (non rinominata) ed un elemento L_∞ in $\mathbb{V}''$ tale che $\{J_{v_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L debole* in $\mathbb{V}''$. Essendo J bigettiva, esiste v_∞ in $\mathbb{V}$ tale che $L = J_{v_\infty}$. Dalla definizione di convergenza debole* in $\mathbb{V}''$ (vedi 1.1.18), segue che per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} J_{v_n}(f) = J_{v_\infty}(f);$$

in altri termini, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(v_\infty),$$

cioè $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole in $\mathbb{V}$ a v_∞ (vedi 1.1.18). □

Proposizione 1.1.39. *Sia $\mathbb{V}$ uno spazio di Banach riflessivo. Supponiamo che $\mathbb{V}'$ sia separabile. Data f in $\mathbb{V}'$ vale che*

$$\|f\|_{\mathbb{V}'} = \max\{|f(v)| \mid v \in \mathbb{V} \ \ \|v\|_{\mathbb{V}} \le 1\}.$$

Dimostrazione. Per la definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9), esiste una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{V}$ tale che $\|v_n\|_{\mathbb{V}} \le 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e che

$$\|f\|_{\mathbb{V}'} = \lim_{n\to+\infty} |f(v_n)|.$$

Per il teorema 1.1.38, esiste v_∞ in $\mathbb{V}$ tale che, a meno di sottosuccessioni (non rinominate), $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{V}$ a v_∞. Essendo la norma debolmente semicontinua inferiormente (vedi 1.1.21), $\|v_\infty\| \le 1$. Dalla definizione di convergenza debole (vedi 1.1.18), si conclude che

$$\|f\|_{\mathbb{V}'} = \lim_{n\to+\infty} |f(v_n)| = |f(v_\infty)|.$$

□

1.2 Operatori compatti

Definizione 1.2.1 (Operatore compatto)**.**
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio normato, $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ una funzione. Si dice che f è un operatore compatto se l'immagine di ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{X}$ è relativamente compatta in $\mathbb{Y}$. Equivalentemente, f è un operatore compatto se per ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{X}$, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente in $\mathbb{Y}$.

Osservazione 1.2.2. In generale, un operatore compatto non è continuo. Basta pensare ad funzione da uno spazio normato connesso ad uno spazio metrico che ha come immagine un insieme formato da due punti.

Proposizione 1.2.3. *Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi normati e $A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ un operatore lineare e compatto. Allora A è continuo, cioè se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione che converge ad x_∞ in $\mathbb{X}$, vale che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad Ax_∞ in $\mathbb{Y}$.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che converge ad x_∞ in $\mathbb{X}$. Dobbiamo mostrare che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad Ax_∞ in $\mathbb{Y}$. Per linearità, si può supporre che $x_\infty = 0$. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 0 definitivamente, la tesi è banale; allora, a meno di passare a sottosuccessioni, non rinominate, possiamo supporre che $x_n \neq 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Quindi, la successione $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_\mathbb{X}}\right\}$ è limitata. Essendo A un operatore compatto, la successione $\left\{A\frac{x_n}{\|x_n\|_\mathbb{X}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{Y}$ da una costante M. In altri termini, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\left\|A\frac{x_n}{\|x_n\|_\mathbb{X}}\right\|_\mathbb{Y} \leq M.$$

Riarrangiando i termini, si trova che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|Ax_n\|_\mathbb{Y} \leq M\,\|x_n\|_\mathbb{X}\,.$$

Siccome $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0 in $\mathbb{X}$, allora $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0 in $\mathbb{Y}$. □

1.2.1 Approssimazione di operatori compatti

Proposizione 1.2.4. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio normato, $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico completo, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di operatori compatti tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Sia $f_\infty : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tale che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f_∞ uniformemente in ogni insieme limitato di $\mathbb{X}$. Allora f_∞ è un operatore compatto.*

Dimostrazione. Sia A un insieme limitato in $\mathbb{X}$. Dobbiamo dimostrare che $f_\infty(A)$ è relativamente compatto in $\mathbb{Y}$, cioè che $\overline{f_\infty(A)}$ è compatto in $\mathbb{Y}$. Essendo $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico completo, è sufficiente mostrare che $\overline{f_\infty(A)}$ è totalmente limitato; tuttavia, questo è equivalente a richiedere che $f_\infty(A)$ sia totalmente limitato.

Sia dato un numero positivo r. Per le ipotesi di convergenza, esiste n in $\mathbb{N}$ tale che

$$\sup\{d_\mathbb{Y}(f_n(x); f_\infty(x)) \mid x \in A\} \leq \frac{r}{2}.$$

Essendo $f_n(A)$ relativamente compatto, allora è totalmente limitato. Esistono dei punti $\{y_1; \ldots; y_k\}$ in $\mathbb{Y}$ tali che

$$f_n(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}\left(y_i; \frac{r}{2}\right).$$

Per la disuguaglianza triangolare, possiamo concludere che

$$f_\infty(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}(y_i; r).$$

□

Lemma 1.2.5 (Proiezione non lineare)**.**
Siano $\mathbb{Y}$ uno spazio normato, C un insieme convesso in $\mathbb{Y}$, K un insieme compatto contenuto in C. Sia dato un numero positivo ε. Esistono un sottospazio $\mathbb{Y}_\varepsilon$ di $\mathbb{Y}$ avente dimensione finita, un insieme compatto convesso K_ε contenuto in $C \cap \mathbb{Y}_\varepsilon$ e un operatore continuo $P_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ tale che $\|P_\varepsilon(y) - y\| \leq \varepsilon$ per ogni y in K.

Dimostrazione. Sia dato un numero positivo ε. Essendo K totalmente limitato, esistono dei punti $\{y_1, \ldots ; y_k\}$ in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}(y_i; \varepsilon) := A_\varepsilon.$$

Definiamo $Y_\varepsilon := \mathrm{Span}\{y_1; \ldots ; y_k\}$. Per ogni i in $\{1; \ldots ; k\}$, definiamo la funzione "conetto" $c_i : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ tale che

$$c_i(y) := \max\{0; \varepsilon - \|y - y_i\|\}.$$

Si osserva facilmente che per ogni x in A_ε vale che

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(y) > 0.$$

Pertanto, per ogni i in $\{1; \ldots ; k\}$ possiamo definire $\lambda_i : A_\varepsilon \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lambda_i(y) := \frac{c_i(y)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j(y)}.$$

Ovviamente λ_i è ben definita in K e per ogni y in K vale che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) = 1.$$

Definiamo, infine, la combinazione convessa di $\{\lambda_1(y); \ldots ; \lambda_k(y)\}$ ovvero la funzione $P_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ tale che

$$P_\varepsilon(y) := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) y_i.$$

Osserviamo che P_ε assume valori in $\mathbb{Y}_\varepsilon$ ed in C (essendo un insieme convesso). L'immagine di P_ε è contenuta nell'inviluppo convesso di un numero finito di punti, cioè $\{y_1; \ldots ; y_k\}$, che è un insieme compatto convesso che denotiamo con K_ε. Inoltre, per ogni y in K valgono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
\|P_\varepsilon(y) - y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) y_i - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) \right) y \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y)(y_i - y) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) \|y_i - y\| \\
&\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(y) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Infine, osserviamo che la funzione P_ε è ovviamente continua perchè composizione di funzioni continue (le proiezioni finito dimensionali e le funzioni "conetto"). ☐

Teorema 1.2.6 (Approssimazione non lineare di operatori compatti).
Siano $\mathbb{Y}$ uno spazio normato, C un insieme convesso in $\mathbb{Y}$, K un insieme compatto contenuto in C e $f : C \to K$ un operatore. Esistono una successione di sottospazi $\{\mathbb{Y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di dimensione finita in $\mathbb{Y}$, una successione di insiemi compatti convessi $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che K_n è contenuto in $\mathbb{Y}_n \cap C$ per ogni n in $\mathbb{N}$, ed una successione di operatori $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $f_n : C \to K_n$ per ogni n in $\mathbb{N}$ che converge ad f uniformemente in C. Inoltre, se f è continua, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di operatori continui.

Dimostrazione. Per ogni n in $\mathbb{N}$, applichiamo il lemma 1.2.5 con $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Troviamo un sottospazio $\mathbb{Y}_n$ di dimensione finita, un insieme compatto convesso K_n contenuto in $C \cap \mathbb{Y}_n$ ed una mappa $P_n : K \to K_n$ tale che per ogni y in K vale

$$\|P_n(y) - y\| \leq \frac{1}{n}.$$

Definiamo $f_n := P_n \circ f$. Per costruzione l'immagine di f_n è contenuta in K_n. Inoltre, essendo f a valori in K, per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in C vale che

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|P_n(f(x)) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Per il lemma 1.2.5, la successione $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è formata da operatori continui; pertanto, se f è continuo, $\{P_n \circ f\}_{n\in\mathbb{N}}$ è continuo. □

Osservazione 1.2.7. Dal teorema 1.2.6 non possiamo concludere che se f è lineare anche le approssimanti sono lineari. Infatti, esistono operatori lineari che non possono essere approssimati uniformemente da operatori lineari con l'immagine contenuta in sottospazi di dimensione finita.

1.2.2 Teoremi del punto fisso

Ricordiamo il teorema di Brouwer.

Teorema 1.2.8 (Brouwer).
Siano d un intero positivo e $\mathcal{B}$ una palla centrata nell'origine in $\mathbb{R}^d$. Sia $f : \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$ un'applicazione continua. Allora f ammette almeno un punto fisso.

Corollario 1.2.9. *Sia d un intero positivo e C un insieme convesso e compatto in $\mathbb{R}^d$. Sia $f : C \to C$ un'applicazione continua. Allora f ammette almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $\overline{\mathcal{B}}$ una palla chiusa che contiene C. Sia $P : \mathcal{B} \to C$ la proiezione su un convesso chiuso. Poniamo $\hat{f} : \overline{\mathcal{B}} \to \overline{\mathcal{B}}$ tale che $\hat{f} := f \circ P$; per il teorema 1.2.8, $\hat{f}$ ammette almeno un punto fisso x in $\overline{\mathcal{B}}$. Poichè $x = f(P(x))$ e $\hat{f}$ ha immagine in C, vale che x è in C. Allora $P(x) = x$ e concludiamo che $x = f(x)$. □

Teorema 1.2.10 (Schauder).
Siano $\mathbb{Y}$ uno spazio normato, C un insieme convesso in $\mathbb{Y}$ e K un sottoinsieme di C compatto. Sia $f : C \to K$ un operatore continuo. Allora f ammette almeno un punto fisso.

Dimostrazione. Per il teorema di approssimazione non lineare (vedi 1.2.6), per ogni n in $\mathbb{N}$ esistono un sottospazio $\mathbb{Y}_n$ di dimensione finita, un insieme K_n compatto e convesso contenuto in $\mathbb{Y}_n \cap C$ e un operatore $f_n : C \to K_n$ tale che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

converge uniformemente ad f in C. Per ogni n in $\mathbb{N}$ denotiamo con $\hat{f}_n : K_n \to K_n$ la restrizione di f_n a K_n. Essendo K_n convesso e compatto in un sottospazio di dimensione finita, il corollario al toerema di Brouwer (vedi 1.2.9) garantisce che per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste x_n in K_n tale che $\hat{f}_n(x_n) = x_n$. La successione $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in K; per compattezza, a meno di sottosuccessioni, non rinominate, esiste y_∞ in K tale che $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y_∞. Proviamo che anche $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y_∞. Per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le seguenti stime:

$$\|x_n - y_\infty\| = \left\|\hat{f}_n(x_n) - y_\infty\right\| \le \|f_n(x_n) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - y_\infty\|.$$

Osserviamo che il primo addendo è infinitesimo perchè la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente in C; il secondo addendo è infinitesimo per definizione di y_∞. In conclusione, dalla continuità di f segue che

$$f(y_\infty) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y_\infty.$$

□

Possiamo dare un esempio di applicazione del teorema di Schauder.

Teorema 1.2.11 (Esistenza di soluzioni per equazioni differenziali ordinarie)**.**
Siano dato t_0 in $\mathbb{R}$, u_0 in $\mathbb{R}^k$ e due numeri positivi δ ed r. Poniamo

$$R \coloneqq [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{\mathcal{B}}(u_0; r).$$

Sia $f : R \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Poniamo

$$M \coloneqq \sup\{|f(t;u)| \mid (t;u) \in R\}.$$

Sia δ_0 un numero reale in $(0,\delta)$ tale che $M\delta_0 < r$. Esiste una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t;u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

definita in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ a valori in $\mathcal{B}(u_0; r)$.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{Y}$ lo spazio metrico delle funzioni continue tra $[t_0, t_0 + \delta_0]$ ed $\mathbb{R}^k$. Poniamo

$$C \coloneqq \{u \in \mathbb{Y} \mid u([t_0, t_0 + \delta_0]) \subseteq \overline{\mathcal{B}(u_0; r)}\}.$$

L'insieme C è ovviamente un convesso di $\mathbb{Y}$. Definiamo

$$K \coloneqq \{u \in C \mid u \text{ è lipschitziana con costante } L_u \le M\}.$$

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{Y}$. Definiamo l'operatore di Volterra $\Phi : C \to K$ associato al problema di Cauchy tale che per ogni u in C per ogni t in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ vale che

$$[\Phi(u)](t) \coloneqq u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s; u(s))\ ds.$$

Risolvere il problema di Cauchy equivale a mostrare che l'operatore Φ ha un punto fisso. Verifichiamo che Φ è ben definito. Se u è una funzione in C, per ogni t in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ vale che

$$|u_0 - [\Phi(u)](t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s; u(s))| \; ds \leq \delta_0 M \leq r,$$

come segue dalla definizione di M, r e δ_0. Inoltre, $\Phi(u)$ è una funzione di classe C^1 tale che

$$|[\Phi(u)]'(t)| = |f(t; u(t))| \leq M.$$

Pertanto, l'immagine di Φ è contenuta in K. Se mostriamo che Φ è un operatore continuo, l'esistenza di un punto fisso segue dal teorema di Schauder (vedi 1.2.10). Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in C che converge uniformemente ad una funzione u in C. Essendo f una funzione uniformemente continua in R, se definiamo $g_n : [t_0, t_0 + \delta_0] \to \mathbb{R}^k$ tale che $g_n(t) := f(t; u_n(t))$, la successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[t_0, t_0 + \delta_0]$ alla funzione $g : [t_0, t_0 + \delta_0] \to \mathbb{R}^k$ tale che $g(t) = f(t; u(t))$. Allora, è immediato concludere che anche la successione delle primitive di $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che valgono u_0 in t_0 convergono uniformemente alla primitiva di g che vale u_0 in t_0. □

Osservazione 1.2.12. Dalle ipotesi del teorema 1.2.11 non si può dedurre l'unicità della soluzione. Infatti, è possibile produrre facili controesempi. Osserviamo anche che, se la mappa f fosse lipschitziana con costante di Lipschitz minore di 1, potremmo dimostrare che l'operatore di Volterra è una contrazione e ottenere l'esistenza e l'unicità del punto fisso tramite il teorema delle contrazioni tra spazi metrici completi.

1.3 Teorema di Baire e conseguenze

1.3.1 Spazi di Baire

Definizione 1.3.1 (F_σ e G_δ)**.**
Sia $\mathbb{X}$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ si dice F_σ se è unione numerabile di chiusi, si dice G_δ se è intersezione numerabile di aperti.

Definizione 1.3.2 (Spazio di Baire)**.**
Si dice spazio di Baire uno spazio topologico in cui vale la proprietà seguente: sia $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di insiemi chiusi aventi ciascuno parte interna vuota; allora $\bigcup C_n$ ha parte interna vuota.

Osservazione 1.3.3. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio topologico; sono ovviamente fatti equivalenti:

- $\mathbb{X}$ è uno spazio di Baire nel senso della definizione 1.3.2;
- se $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di chiusi tali che $\bigcup C_n$ ha parte interna non vuota, allora esiste n_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{n_0} ha parte interna non vuota;
- se $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di aperti densi, allora $\bigcap A_n$ è denso in $\mathbb{X}$.

Teorema 1.3.4 (Baire)**.**
Gli spazi metrici completi e gli spazi topologici localmente compatti sono spazi di Baire.

Dimostrazione. Limitiamo la dimostrazione al caso in cui $\mathbb{X}$ è uno spazio metrico completo, quello che useremo in seguito; la stessa idea può essere adattata al caso in cui $\mathbb{X}$ è uno spazio topologico localmente compatto.

Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di aperti densi. Poniamo

$$A_\infty \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Vogliamo mostrare che A_∞ è denso; è sufficiente provare che se $\mathcal{B}(x_0; r_0)$ è una palla aperta, A_∞ la interseca. Vogliamo costruire una successione di punti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed una successione di raggi $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\overline{\mathcal{B}(x_{n+1}; r_{n+1})} \subseteq \mathcal{B}(x_n; r_n) \cap A_{n+1},$$

$$r_{n+1} \leq \frac{r_n}{n}$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Procediamo in maniera ricorsiva. Essendo A_1 un aperto denso in $\mathbb{X}$, esiste una palla $\mathcal{B}(x_1; r_1)$ tale che

$$\overline{\mathcal{B}(x_1; r_1)} \subseteq A_1 \cap \mathcal{B}(x_0; r_0).$$

Supponiamo di aver costruito $\{x_1; \ldots; x_n\}$ ed $\{r_1; \ldots; r_n\}$ con le proprietà suddette. Essendo A_{n+1} un aperto denso, esiste una palla $\mathcal{B}(x_{n+1}; r_{n+1})$ tale che

$$\overline{\mathcal{B}(x_{n+1}; r_{n+1})} \subseteq \mathcal{B}(x_n; r_n) \cap A_{n+1};$$

inoltre, possiamo assumere che

$$r_{n+1} \leq \frac{r_n}{n}.$$

Osserviamo che per ogni $n \geq k$, vale che x_n appartiene a $\mathcal{B}(x_k; r_k)$; ovviamente $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima, quindi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{X}$. Per la completezza di $\mathbb{X}$, esiste x_∞ in $\mathbb{X}$ tale che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_∞. Pertanto, x_∞ appartiene a $\overline{\mathcal{B}(x_k; r_k)}$ per ogni k in $\mathbb{N}$. Per costruzione, vale che

$$\overline{\mathcal{B}(x_{k+1}; r_{k+1})} \subseteq A_{k+1} \cap \mathcal{B}(x_k; r_k) \subseteq A_{k+1} \cap \mathcal{B}(x_0; r_0)$$

per ogni k in $\mathbb{N}$. Allora concludiamo che x_∞ appartiene ad $A_\infty \cap \mathcal{B}(x_0; r_0)$. □

Esempio 1.3.5. L'insieme $\mathbb{Q}$ dotato della topologia euclidea non è uno spazio di Baire.

Proposizione 1.3.6. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio di Baire e A un aperto in $\mathbb{X}$. Allora A è uno spazio di Baire con la topologia indotta da $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di aperti densi in A. Essendo A un aperto, allora A_n è aperto anche in $\mathbb{X}$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Definiamo

$$B_n \coloneqq A_n \cup (A^c)^\circ.$$

Ovviamente, $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di aperti in $\mathbb{X}$. Vogliamo mostrare che B_n è denso in $\mathbb{X}$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Sia B un aperto in $\mathbb{X}$; se $B \cap A \neq \emptyset$, allora $B \cap A$ è un aperto non vuoto in A che interseca A_n per ogni n in $\mathbb{N}$, essendo A_n denso in A; in particolare, B interseca B_n per ogni n in $\mathbb{N}$. Se $B \cap A = \emptyset$, allora B è un aperto contenuto in A^c; in particolare, è contenuto nella sua parte interna. Allora $B \cap B_n \neq \emptyset$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Poniamo

$$A_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

e mostriamo che è denso in A. Sia B un aperto in A; essendo A aperto, B è aperto anche in $\mathbb{X}$; pertanto, abbiamo che

$$\emptyset \neq B \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = ((A^c)^\circ \cap B) \cup \left(B \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right).$$

Essendo $B \cap (A^c)^\circ = \emptyset$, la conclusione segue banalmente. □

Osservazione 1.3.7. In generale non è vero che un chiuso in uno spazio di Baire è uno spazio di Baire. Basta considerare $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r; 0) \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$: si verifica facilmente che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Baire (pur non essendo uno spazio metrico completo nè uno spazio topologico localmente compatto). Allora l'insieme $C = \{(q; 0) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ è un chiuso a parte interna non vuota in $\mathbb{X}$ che è unione numerabile di punti, ciascuno dei quali ha parte interna vuota in $\mathbb{X}$.

Se $\mathbb{X}$ è uno spazio metrico completo o uno spazio topologico localmente compatto e C è un chiuso in $\mathbb{X}$, allora C è uno spazio di Baire. Infatti eredita la struttura di spazio metrico completo o di spazio topologico localmente compatto da $\mathbb{X}$ e si applica il teorema di Baire (vedi 1.3.4).

1.3.2 Esempi di applicazione del teorema di Baire

Il teorema di Baire è uno strumento essenziale per rendere quantitative informazioni di natura qualitativa. I prossimi esempi, di vario genere, chiariscono questa affermazione.

Sulla continuità e derivabilità di funzioni reali

Proposizione 1.3.8. *Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua; supponiamo che esista l in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in $(0, +\infty)$ vale*

$$\lim_{n \to +\infty} f(nx) = l.$$

Allora vale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per ogni k in $\mathbb{N}$, definiamo

$$C_k := \{x \in (0, +\infty) \mid |f(nx) - l| \leq \varepsilon \ \forall n \geq k\}.$$

Essendo f continua, C_k è un chiuso (infatti è intersezione di chiusi). Per ipotesi, si ha che

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = (0, +\infty).$$

Per la proposizione 1.3.6, $(0, +\infty)$ è uno spazio di Baire; pertanto, esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota. In altri termini, esistono $a < b$ in $(0, +\infty)$ tali che (a, b) è contenuto in C_{k_0}. Dunque, per ogni x in (a, b), per ogni $n \geq k_0$, vale che

$$|f(nx) - l| \leq \varepsilon.$$

Questo è equivalente a richiedere che per ogni x in $\bigcup_{n\geq k_0}(na,nb)$ vale che

$$|f(x)-l|\leq\varepsilon.$$

Per concludere, osserviamo che $\bigcup_{n\geq k_0}(na,nb)$ contiene una semiretta destra. Infatti, se n è abbastanza grande vale che

$$nb>(n+1)a.$$

□

Proposizione 1.3.9. *Siano $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ spazi metrici ed $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ una funzione qualsiasi. L'insieme dei punti di discontinuità di f è un insieme F_σ (vedi 1.3.1). In particolare, non esiste alcuna funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ il cui insieme dei punti di discontinuità coincide con $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon>0$ fissato. Poniamo

$$D_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{X}\mid\forall\delta>0\ \exists y,z\in\mathcal{B}(x;\delta)\text{ tali che }d_{\mathbb{Y}}(f(y);f(z))\geq\varepsilon.\}$$

Ovviamente x_0 è un punto di discontinuità per f se e solo se esiste $\varepsilon>0$ tale che x_0 appartiene a D_ε. Mostriamo che D_ε è un chiuso per ogni $\varepsilon>0$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in D_ε che converge ad un punto x_∞. Sia $\delta>0$; per ogni n in $\mathbb{N}$ esistono y_n,z_n in $\mathcal{B}(x_n;\delta)$ tali che $d_{\mathbb{Y}}(f(y_n);f(z_n))\geq\varepsilon$. Se n è abbastanza grande, y_n,z_n appartengono anche a $\mathcal{B}(x_\infty;\delta)$ e questo basta a concludere che D_ε è un chiuso.

Detto D l'insieme dei punti di f, vale che

$$D=\bigcup_{n\geq1}D_{\frac{1}{n}};$$

pertanto, D è un F_σ.

Sia $\mathbb{X}$ uno spazio di Baire in cui i punti sono chiusi a parte interna vuota. Il complementare di un insieme numerabile denso B non può essere un F_σ. Supponiamo che esistano $\{C_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ chiusi tali che

$$\mathbb{X}\setminus B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}C_n.$$

Allora ciascuno dei chiusi C_n ha parte interna vuota. In tal caso, potremmo scrivere $\mathbb{X}$ come unione numerabile di chiusi a parte interna vuota, contro l'assunzione che $\mathbb{X}$ sia uno spazio di Baire.

In conclusione, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ non è un F_σ; pertanto non può esistere alcuna funzione discontinua in tutti e soli i punti di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. □

Proposizione 1.3.10. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio topologico localmente compatto e $\mathbb{Y}$ uno spazio metrico. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue tra $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ che converge puntualmente ad una funzione $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$. Detto D l'insieme dei punti di discontinuità di f, D è un F_σ con parte interna vuota.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon>0$ poniamo

$$D_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{X}\mid\forall\mathcal{U}\text{ intorno di }x\ \exists y,z\in\mathcal{U}\text{ tali che }d_{\mathbb{Y}}(f(y);f(z))\geq\varepsilon.\}$$

Come mostrato in 1.3.9, vale che D_ε è un chiuso per ogni $\varepsilon > 0$ e inoltre

$$D = \bigcup_{n \geq 1} D_{\frac{1}{n}}.$$

In particolare D è un F_σ.

Mostriamo che D_ε ha parte interna vuota per ogni $\varepsilon > 0$. Supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che D_ε contiene un aperto non vuoto A. Per ogni k in $\mathbb{N}$ poniamo

$$C_k \coloneqq \left\{ x \in A \;\middle|\; d_{\mathbb{Y}}(f_n(x); f_m(x)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon \ \forall n, m \geq k \right\}.$$

Per le ipotesi di continuità e di convergenza puntuale, vale che C_k è un chiuso per ogni k in $\mathbb{N}$ (è intersezione di chiusi) e inoltre

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k.$$

Per 1.3.6, A è uno spazio di Baire con la topologia di sottospazio; pertanto, esiste k_1 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_1} ha parte interna non vuota. Sia A_0 un aperto non vuoto contenuto in C_{k_1}. Per continuità, esiste un aperto A_1 a chiusura compatta in A_0 tale che per ogni y, z in A_1 vale che

$$d_{\mathbb{Y}}(f_{k_1}(y); f_{k_1}(z)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Dati y, z in A_1, per la definizione di C_{k_1} si ha che

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{Y}}(f(y); f(z)) &\leq d_{\mathbb{Y}}(f(y); f_{k_1}(y)) + d_{\mathbb{Y}}(f_{k_1}(z); f_{k_1}(y)) + d_{\mathbb{Y}}(f(z); f_{k_1}(z)) \\ &= \lim_{n \to +\infty} [d_{\mathbb{Y}}(f_n(y); f_{k_1}(y)) + d_{\mathbb{Y}}(f_n(z); f_{k_1}(z))] + d_{\mathbb{Y}}(f_{k_1}(z); f_{k_1}(y)) \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tuttavia, A_1 è un aperto non vuoto contenuto in D_ε; pertanto, esiste una coppia di punti y, z in A_1 tali che $d_{\mathbb{Y}}(f(y), f(z)) > \varepsilon$; allora l'assurdo segue banalmente.

Per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), D ha parte interna vuota. □

Corollario 1.3.11. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ovunque. L'insieme D dei punti in cui f' è continua è un G_δ denso.*

Dimostrazione. Per ogni n in $\mathbb{N}$, poniamo

$$f_n(x) \coloneqq \frac{f(x + 2^{-n}) - f(x)}{2^{-n}};$$

per ipotesi, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad f'. Per la proposizione 1.3.10, l'insieme dei punti di discontinuità di f' è un F_σ con parte interna vuota; allora l'insieme dei punti in cui f' è continua è un G_δ denso. □

Proposizione 1.3.12. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione separatamente continua e nulla su un insieme denso. Allora f è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo; senza perdita di generalità, possiamo assumere che esista $(x_0; y_0)$ e $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0; y_0) \geq 4\delta > 0.$$

Per continuità rispetto alla variabile x, esiste $\rho > 0$ tale che

$$f(x; y_0) \geq 2\delta$$

per ogni x in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$. Per ogni $k \geq 1$ poniamo

$$C_k := \left\{ x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho] \;\middle|\; f(x; y) \geq \delta \ \forall y \in \left[y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k} \right] \right\}.$$

Mostriamo che C_k è chiuso per ogni $k \geq 1$. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in C_k che converge ad x_∞. Per continuità rispetto alla variabile x, per ogni y in $\left[y_0 - \frac{1}{k}, y_0 + \frac{1}{k}\right]$ vale che

$$\delta \leq \lim_{n \to +\infty} f(x_n; y) = f(x_\infty; y);$$

pertanto, x_∞ appartiene a C_k. Essendo f continua rispetto alla variabile y, si ha che

$$[x_0 - \rho, x_0 + \rho] = \bigcup_{k \geq 1} C_k;$$

per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), esiste $k_0 \geq 1$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota. Pertanto, esistono $a < b$ in $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ tali che (a, b) è contenuto in C_{k_0}. Allora, per ogni (x, y) in $(a, b) \times \left[y_0 - \frac{1}{k_0}, y_0 + \frac{1}{k_0}\right]$ vale che

$$f(x, y) \geq \delta > 0;$$

questo è assurdo, perchè il rettangolo $(a, b) \times \left[y_0 - \frac{1}{k_0}, y_0 + \frac{1}{k_0}\right]$ interseca in maniera non banale il denso in cui f si annulla. □

Proposizione 1.3.13. *Sia $\mathbb{X}$ l'insieme delle funzioni continue e limitate da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ dotato della norma del sup. Il sottoinsieme di $\mathbb{X}$ dato dalle funzioni continue limitate e non derivabili in alcun punto contiene un G_δ denso (vedi 1.3.1).*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Banach. Per ogni k in $\mathbb{N}$ definiamo

$$C_k := \left\{ f \in \mathbb{X} \;\middle|\; \exists x \in [-k, k] \text{ tale che } \forall h \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] \ |f(x+h) - f(x)| \leq k\,|h| \right\}.$$

Mostriamo che C_k è un chiuso in $\mathbb{X}$ per ogni k in $\mathbb{N}$. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in C_k che converge uniformemente in $\mathbb{R}$ a f_∞. Allora, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un punto x_n in $[-k, k]$ tale che per ogni h in $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ vale che

$$|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)| \leq k\,|h|.$$

A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga ad un punto x_∞ appartenente a $[-k, k]$. Allora, per l'ipotesi di convergenza uniforme su $\mathbb{R}$, si conclude che per ogni h in $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ vale che

$$|f_\infty(x_\infty + h) - f_\infty(x_\infty)| \leq k\,|h|;$$

dunque, f_∞ appartiene a C_k.

Vale che per ogni k in $\mathbb{N}$ l'insieme C_k ha parte interna vuota. Infatti, dati f in C_k ed $\varepsilon > 0$, è possibile trovare una funzione f_ε continua affine a tratti, con segmenti di pendenza maggiore di $2K$ tale che $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon$; in particolare, f_ε non appartiene a C_k.

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, per il teorema di Baire (vedi 1.3.4) vale che

$$C := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

è un F_σ con parte interna vuota.

Infine, è chiaro che se una funzione f è derivabile in un punto x_0, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni h in $[-\delta, +\delta]$ vale che

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq 2 \left| f'(x_0) \right| ;$$

pertanto, l'insieme delle funzioni continue derivabili almeno in un punto è contenuto in C. Concludiamo che l'insieme delle funzioni continue non derivabili in alcun punto contiene un G_δ denso. □

Sulla convergenza debole

Proposizione 1.3.14. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio normato, $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}$ e v_∞ un elemento in $\mathbb{V}$. Supponiamo che $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga debolmente a v_∞ (vedi 1.1.18). Allora $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{V}'$ il duale topologico di $\mathbb{V}$. Come mostrato in 1.1.14, $\mathbb{V}'$ è uno spazio di Banach; per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), $\mathbb{V}'$ è uno spazio di Baire. Dalla definizione di convergenza debole (vedi 1.1.18), per ogni f in $\mathbb{V}'$ vale che

$$\lim_{n \to +\infty} f(v_n) = f(v_\infty);$$

in particolare, $\{f(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata. Per ogni k in $\mathbb{N}$ definiamo

$$C_k := \{f \in \mathbb{V}' \mid |f(v_n)| \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ la valutazione in v_n è un funzionale continuo da $\mathbb{V}'$ in $\mathbb{R}$; allora, gli insiemi C_k sono intersezione di chiusi e quindi sono chiusi. Per ipotesi, vale che

$$\mathbb{V}' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k;$$

per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota. In altri termini, esiste una palla $\mathcal{B}_{\mathbb{V}'}(f_0; r_0)$ contenuta in C_{k_0}. Per definizione, per ogni g in $\mathcal{B}_{\mathbb{V}'}(0; 1)$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$|(f_0 + r_0 g)(v_n)| \leq k_0.$$

Mostriamo che esiste k_1 tale che C_{k_1} è intorno di 0 in $\mathbb{V}'$. Per ogni g in $\mathcal{B}_{\mathbb{V}'}(0;1)$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned} |g(v_n)| &= \frac{1}{r_0}\,|(f_0 + r_0 g - f_0)(v_n)| \\ &\leq \frac{1}{r_0}\,|f_0(v_n)| + \frac{1}{r_0}\,|(f_0 + r_0 g)(v_n)| \\ &\leq \frac{k_0}{r_0} + \frac{k_0}{r_0}. \end{aligned}$$

A meno di restringere r_0, si può assumere che $\frac{2k_0}{r_0}$ sia intero. Pertanto, per ogni g in $\mathcal{B}_{\mathbb{V}'}(0;2)$ per ogni n in $\mathbb{N}$ troviamo che

$$|g(v_n)| \leq \frac{4k_0}{r_0}.$$

Fissato n, per caratterizzazione duale della norma (vedi 1.1.15), troviamo che

$$\|v_n\| \leq \frac{4k_0}{r_0}.$$

□

Sulla cardinalità di una base algebrica

Proposizione 1.3.15. *Sia $\mathbb{V}$ uno spazio di Banach di dimensione infinita; allora $\mathbb{V}$ non ammette una base algebrica numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una base algebrica $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{V}$ numerabile. Per ogni k in $\mathbb{N}$, poniamo

$$C_k \coloneqq \mathrm{Span}(\{v_1; \dots; v_k\}).$$

Gli insiemi C_k hanno parte interna vuota. Altrimenti, esisterebbe v in C_k ed $\varepsilon > 0$ tale che $v + \varepsilon v_{k+1}$ appartiene a C_k; questo è chiaramente assurdo.

Mostriamo che gli insiemi C_k sono chiusi. Innanzitutto $\{v_1; \dots; v_k\}$ è una base algebrica di C_k; la mappa $[\cdot] : C_k \to \mathbb{R}^k$ tale che

$$[c_1 v_1 + \dots + c_k v_k] = (c_1; \dots; c_k)$$

è un isomorfismo lineare. Se definiamo

$$\|c_1 v_1 + \dots + c_k v_k\|' \coloneqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2},$$

introduciamo in C_k una norma che è equivalente alla restrizione della norma definita su $\mathbb{V}$ (tutte le norme in uno spazio vettoriale di dimensione finita sono equivalenti). In particolare, la mappa $[\cdot] : (C_k; \|\cdot\|') \to \mathbb{R}^k$ diventa un'isometria. Essendo $\mathbb{R}^k$ completo rispetto alla norma euclidea, C_k completo rispetto alla norma $\|\cdot\|'$; allora è completo rispetto alla restrizione della norma definita su $\mathbb{V}$; dunque, è chiuso in $\mathbb{V}$.

Per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), si ha che $\bigcup C_k$ ha parte interna vuota; pertanto, non coincide con $\mathbb{V}$. □

Esempio 1.3.16. Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali; ricordiamo che $\mathbb{R}[x]$ ha una base algebrica numerabile. Pertanto, per la proposizione 1.3.15, non è possibile dotare $\mathbb{R}[x]$ di una norma che lo renda uno spazio di Banach.

1.3.3 Teorema di Banach-Steinhaus

Teorema 1.3.17 (Banach-Steinhaus, o principio dell'uniforme limitatezza)**.**
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, $\mathbb{Y}$ uno spazio normato e $\{L_i\}_{i\in I}$ una famiglia di operatori continui tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

- *la famiglia $\{L_i\}_{i\in I}$ è puntualmente equilimitata, cioè per ogni x in $\mathbb{X}$ vale che*
$$\sup_{i\in I} \|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} < +\infty;$$
- *la famiglia $\{L_i\}_{i\in I}$ è limitata rispetto alla norma operatoriale in $\mathscr{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ (vedi 1.1.9), cioè esiste M in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in $\mathbb{X}$, per ogni i in I vale che*
$$\|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\,\|x\|_{\mathbb{X}}\,.$$

Dimostrazione. Ovviamente, la seconda condizione implica la prima; allora mostriamo che la prima implica la seconda. Per ogni k in $\mathbb{N}$, definiamo
$$C_k \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid \ \|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq k\ \forall i \in I\}.$$
Essendo le applicazioni L_i continue, gli insiemi C_k sono intersezione di chiusi; pertanto, sono chiusi. Inoltre, per ipotesi, vale che
$$\mathbb{X} \coloneqq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k.$$
Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, il teorema di Baire (vedi 1.3.4) garantisce che esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota; in particolare, esiste una palla $\mathcal{B}(x_0;r_0)$ contenuta in C_{k_0}. In altri termini, per ogni i in I per ogni x in $\mathcal{B}(0;1)$ vale che
$$\|L_i(x_0 + r_0x)\|_{\mathbb{Y}} \leq k_0.$$
Dato x in $\mathcal{B}(0,1)$ per ogni i in I vale che
$$\begin{aligned}\|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} &= \frac{1}{r_0}\,\|L_i(x_0 + r_0x - x_0)\|_{\mathbb{Y}}\\ &\leq \frac{1}{r_0}\,\|L_i(x_0 + r_0x)\|_{\mathbb{Y}} + \frac{1}{r_0}\,\|L_i(x_0)\|_{\mathbb{Y}}\\ &\leq \frac{k_0}{r_0} + \frac{k_0}{r_0}.\end{aligned}$$
Fissato i in I, facendo passando all'estremo superiore tra i vettori di $\mathbb{X}$ di norma minore o uguale ad 1, si trova che
$$\|L_i\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})} \leq \frac{2k_0}{r_0},$$
che è equivalente alla seconda condizione. □

Corollario 1.3.18. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, $\mathbb{Y}$ uno spazio normato e $\{L_i\}_{i\in I}$ una famiglia di operatori continui tra $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$. Sono alternativi i seguenti fatti:*

- *esiste M in $\mathbb{R}$ tale che per ogni x in $\mathbb{X}$ per ogni i in I vale che*
$$\|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq M\,\|x\|_{\mathbb{X}}\,;$$

- *esiste un insieme G_δ denso tale che per ogni x in tale insieme vale che*
$$\sup_{i\in I}\{\|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}}\} = +\infty.$$

Dimostrazione. Per ogni k in $\mathbb{N}$, definiamo
$$C_k := \{x \in \mathbb{X} \mid \|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq k \ \forall i \in I\}.$$
Se esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota, allora concludiamo come nella dimostrazione del teorema di Banach-Steinhaus (vedi 1.3.17) che vale la prima condizione. Se C_k ha parte interna vuota per ogni k in $\mathbb{N}$, vale che
$$D := \left(\bigcup C_k\right)^c = \bigcap C_k^c$$
è un insieme G_δ denso (è intersezione numerabile di aperti densi e $\mathbb{X}$ è uno spazio di Baire) e x appartiene a D se e solo se
$$\sup_{i\in I}\{\|L_i(x)\|_{\mathbb{Y}}\} = +\infty.$$
In tal caso, vale la seconda condizione. □

Sulla convergenza della serie di Fourier reale

Osservazione 1.3.19. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica, ricordiamo la definizione dei suoi coefficienti di Fourier reali. Per $n = 0$, si pone
$$b_0(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt;$$
per $n \geq 1$, si pone
$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\, dt,$$
$$b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt.$$
I coefficienti di Fourier reali sono ben definiti se f appartiene ad $L^2((0,2\pi))$. Per ogni n in $\mathbb{N}$, definiamo la successione delle somme parziali
$$S_N f(x) := b_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\sin(nx) + b_n(f)\cos(nx).$$
Se f è una funzione in $L^2((0,2\pi))$ la successione $\{S_N f\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge ad f in $L^2((0,2\pi))$. Osserviamo che per ogni N in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[0,2\pi]$ vale che
$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= b_0(f) + \sum_{k=1}^{N} a_k(f)\sin(kx) + b_k(f)\cos(kx)\\
&= b_0(f) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi} f(t)[\sin(kt)\sin(kx) + \cos(kt)\cos(kx)]\, dt\\
&= b_0(f) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(k(t-x))\, dt\\
&= b_0(f) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=1}^{N}\cos(k(t-x))\right) dt.
\end{aligned}$$

Per ogni N in $\mathbb{N}$ definiamo il nucleo di Dirichlet

$$D_N(t) := \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\cos(kt).$$

Allora, vale che

$$S_N f(x) = b_0(f) + \int_0^{2\pi} f(t) D_N(t-x)\ dt.$$

Scrivendo $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$, si mostra facilmente che per ogni N in $\mathbb{N}$ vale

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\pi\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Inoltre, è facile vedere che

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\ dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\ dt\\ &\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{\left|\frac{t}{2}\right|}\ dt\\ &= \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\pi n}\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi}\frac{|\sin(y)|}{y}\ dy.\end{aligned}$$

Prendendo il limite per N che tende a $+\infty$, si trova che

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{2\pi}|D_N(t)|\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{|\sin y|}{y}\ dy = +\infty.$$

Proposizione 1.3.20. *Sia $\mathbb{X}$ lo spazio delle funzioni tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}$ continue 2π-periodiche e a media nulla dotato della norma del sup. Esiste un insieme G_δ denso D tale che per ogni f in D esiste un insieme K_f che è G_δ denso in $[0,2\pi]$ e tale che la serie di Fourier di f non converge ad f per ogni x in K_f.*

Dimostrazione. Innanzitutto, osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Banach (il vincolo della media nulla passa ovviamente al limite per convergenza uniforme). Inoltre, per ogni f in $\mathbb{X}$ vale che $b_0(f) = 0$ (vedi 1.3.19).

Step 1: Sia x in $(0,2\pi)$ fissato. Osserviamo che la successione $\{D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ definisce una famiglia di operatori lineari tra $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{R}$. Per la precisione, per ogni N in $\mathbb{N}$, vale che

$$S_N f(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_N(t-x)\ dt;$$

gli operatori $S_N : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ sono ben definiti e continui, perchè dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che

$$|S_N f(x)| \leq \|f\|_{\mathbb{X}}\|D_N\|_{L^1((0,2\pi))}.$$

Questo argomento mostra anche che

$$\|S_N(x)\|_{\mathbb{X}'} \leq \|D_N\|_{L^1((0,2\pi))};$$

vogliamo mostrare che vale l'uguaglianza. Sia N in $\mathbb{N}$ fissato; sia $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue con le seguenti proprietà:

- $\{g_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\text{sgn}(D_N(t-x))$ per quasi ogni t in $[0,2\pi]$;
- per ogni k in $\mathbb{N}$ per ogni t in $[0,2\pi]$ vale che $|g_k(t)| \leq 1$;
- per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che $\|g_k\|_{\mathbb{X}} = 1$.

Allora, per la definizione di norma operatoriale (vedi 1.1.9) e per il teorema di convergenza dominata, vale che

$$\begin{aligned}\|S_N(x)\| &\geq \lim_{k\to+\infty} |S_N g_k(x)| \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sgn}(D_N(t-x)) D_N(t-x)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} |D_N(t-x)|\ dt \\ &= \|D_N\|_{L^1((0,2\pi))}.\end{aligned}$$

Avendo dimostrato che la famiglia di operatori $\{S_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ non è limitata nella norma di $\mathbb{X}'$ (vedi 1.3.19), possiamo applicare il corollario al teorema di Banach-Steinhaus (vedi 1.3.18) e concludere che esiste un sottoinsieme D_x di $\mathbb{X}$ che è un G_δ denso e tale che per ogni f in D_x vale che

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f(x)| = +\infty;$$

in particolare, per ogni f in D_x la serie di Fourier non converge in x.

Step 2: Abbiamo mostrato che per ogni q in $\mathbb{Q}\cap[0,2\pi]$ esiste un insieme D_q in $\mathbb{X}$ che è un G_δ denso tale che per ogni f in D_q la serie di Fourier di f è illimitata in q. Poniamo

$$D \coloneqq \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,2\pi]} D_q.$$

Essendo D_q intersezione numerabile di aperti densi per ogni q in $\mathbb{Q}\cap[0,2\pi]$, vale che D è ancora intersezione numerabile di aperti densi; poiché $\mathbb{X}$ è uno spazio di Baire (vedi 1.3.4), anche D è un G_δ denso in $\mathbb{X}$.

Step 3: Abbiamo mostrato che per ogni f in D per ogni x in $\mathbb{Q}\cap[0,2\pi]$ la serie di Fourier di f è illimitata in q. Fissato f in D, definiamo $S^*f : [0,2\pi] \to [0,+\infty]$ tale che

$$S^*f(x) \coloneqq \sup_{N\in\mathbb{N}} |S_N f(x)|.$$

Essendo sup di funzioni continue, S^*f è una funzione semicontinua inferiormente. Mostriamo che l'insieme dei punti in cui vale $+\infty$ è un G_δ denso in $[0,2\pi]$ che contiene $\mathbb{Q}\cap[0,2\pi]$. Infatti, se poniamo per ogni k in $\mathbb{N}$

$$A_k \coloneqq \{x \in [0,2\pi] \mid S_k f(x) > k\},$$

A_k è un aperto che contiene $\mathbb{Q}$; pertanto è un denso in $[0,2\pi]$. Concludiamo osservando che

$$\{x \in [0,2\pi] \mid S^*f(x) = +\infty\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k,$$

che è un G_δ denso per il teorema di Baire (vedi 1.3.4). $\square$

1.3.4 Teorema della mappa aperta

Proposizione 1.3.21. *Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi normati; sia $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un'applicazione lineare. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *f è aperta;*
2. *esiste $R > 0$ tale che*
$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1) \subseteq f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;R));$$
3. *esiste un solver quantitativo, cioè esiste $s : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ ed $M > 0$ tale che $f(s(y)) = y$ per ogni y in $\mathbb{Y}$ e $\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq M \|y\|_{\mathbb{Y}}$ per ogni y in $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)$.*

Dimostrazione. **1 ⇒ 2**: Essendo f aperta, esiste $r_0 > 0$ tale che
$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;r_0) \subseteq f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;1)).$$
Essendo f lineare, vale ovviamente che
$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1) \subseteq f\left(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\left(0;\frac{1}{r_0}\right)\right).$$

2 ⇒ 1. Sia A un aperto in $\mathbb{X}$; dobbiamo mostrare che $f(A)$ è aperto. Dato x_0 in A, è sufficiente mostrare che $f(A)$ è intorno di $f(x_0)$. Sia $r_0 > 0$ tale che
$$\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(x_0;r_0) \subseteq A.$$
Sia $R > 0$ tale che
$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1) \subseteq f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;R)).$$
Essendo f lineare, vale che
$$\begin{aligned} f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(x_0;r_0)) &= f(x_0) + r_0 f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;1)) \\ &= f(x_0) + \frac{r_0}{R} f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;R)) \\ &\subseteq f(x_0) + \frac{r_0}{R}\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1) \\ &= \mathcal{B}\left(f(x_0);\frac{r_0}{R}\right) \end{aligned}$$
che è un intorno aperto di $f(x_0)$ interamente contenuto in $f(A)$.

2 ⇒ 3: Per ipotesi, esiste $R > 0$ tale che per ogni y in $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)$ esiste x in $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;R)$ tale che $f(x) = y$. Usando l'assioma di scelta, possiamo definire una funzione
$$s : \left\{ y \in \mathbb{Y} \;\middle|\; \|y\|_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{2} \right\} \to \mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;R)$$
tale che $f(s(y)) = y$ e $\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq R$. Vogliamo estendere s a tutto $\mathbb{Y}$: se $y = 0$ poniamo $s(y) := 0$; se $y \neq 0$ poniamo
$$s(y) := s\left(\frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}\right) 2\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Dato y in $\mathbb{Y} \setminus \{0\}$ vale che

$$f(s(y)) = f\left(s\left(\frac{y}{2\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}}\right)2\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}\right) = 2\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}\frac{y}{2\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}} = y.$$

Inoltre, si ha che

$$\left\|s(y)\right\|_{\mathbb{X}} \leq 2R\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}.$$

3 $\Rightarrow$ 2: Ovvio prendendo $R = M$. □

Lemma 1.3.22. *Siano $\mathbb{Y}$ uno spazio normato e D un sottoinsieme denso di $\mathbb{Y}$. Per ogni y in $\mathbb{Y} \setminus \{0\}$ esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenuta in D tale che*

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

e inoltre vale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\|y_n\right\|_{\mathbb{Y}} \leq 3\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}.$$

Dimostrazione. Costruiamo la successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in maniera ricorsiva. Sia y_1 un punto in D tale che

$$\left\|y - y_1\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{2}\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}};$$

sia y_2 in D tale che

$$\left\|y - y_1 - y_2\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{4}\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}.$$

Supponiamo di aver definito $\{y_1; \dots; y_k\}$ tale che per ogni i in $\{1; \dots; k\}$ vale che

$$\left\|y - y_1 - \dots - y_i\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{2^i}\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}};$$

scegliamo y_{k+1} in D tale che

$$\left\|y - y_1 - \dots - y_k - y_{k+1}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1}{2^{k+1}}\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}.$$

Allora, è chiaro che

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i = y,$$

dove il limite è inteso rispetto alla norma di $\mathbb{Y}$. Inoltre, osserviamo che

$$\left\|y_1\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \left\|y - y_1\right\|_{\mathbb{Y}} + \left\|y\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}};$$

inoltre, per ogni $k > 1$ vale che

$$\begin{aligned}
\left\|y_k\right\|_{\mathbb{Y}} &\leq \left\|y - y_1 - \dots - y_{k-1} - y_k\right\|_{\mathbb{Y}} + \left\|y - y_1 - \dots - y_{k-1}\right\|_{\mathbb{Y}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}\right)\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}} \\
&= \frac{3}{2^k}\left\|y\right\|_{\mathbb{Y}}.
\end{aligned}$$

Da ciò si conclude che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \leq 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|y\|_{\mathbb{Y}} = 3\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

□

Proposizione 1.3.23. *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, $\mathbb{Y}$ uno spazio normato ed $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un'applicazione lineare e continua. Sono fatti equivalenti:*

1. *esiste un solver quantitativo, cioè esiste $s : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ ed esiste M in $\mathbb{R}$ tale che $f(s(y)) = y$ e $\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq M\|y\|_{\mathbb{X}}$ per ogni y in $\mathbb{Y}$;*

2. *se D è un insieme denso in $\mathbb{Y}$, esiste un solver quantitativo in D, cioè esiste $s : D \to \mathbb{X}$ ed esiste M in $\mathbb{R}$ tale che $f(s(y)) = y$ e $\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq M\|y\|_{\mathbb{X}}$ per ogni y in D.*

Dimostrazione. Ovviamente, la prima condizione è più forte della seconda; mostriamo che la seconda implica la prima. Dato y in $\mathbb{Y}$, per il lemma 1.3.22 esiste una successione $\{y_n\}$ in D tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i = y,$$

dove la convergenza è intesa rispetto alla norma di $\mathbb{Y}$, e inoltre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \leq 3\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Osserviamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|s(y_n)\|_{\mathbb{X}} \leq M\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \leq 3M\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, esiste x_∞ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} s(y_i) = x_\infty,$$

dove il limite è inteso rispetto alla norma di $\mathbb{X}$ (vedi 3.3.4). Poniamo $s(y) := x_\infty$. Osserviamo che $\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq 3M\|y\|_{\mathbb{Y}}$; inoltre, essendo f lineare e continua vale che

$$f(s(y)) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} s(y_i)\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(s(y_i)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i = y.$$

□

Teorema 1.3.24 (Teorema della mappa aperta)**.**
Siano $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi di Banach e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ un'applicazione lineare e continua. Sono fatti equivalenti:

1. *f è surgettiva;*

2. *f è aperta.*

Dimostrazione. La proposizione 1.3.21 garantisce che se f è lineare e aperta, allora è anche surgettiva. Mostriamo che vale l'implicazione contraria. Per ogni k in $\mathbb{N}$ poniamo

$$C_k := \overline{f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;k))};$$

essendo f surgettiva, $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione crescente di chiusi che invade $\mathbb{Y}$. Essendo $\mathbb{Y}$ uno spazio di Banach, per il teorema di Baire (vedi 1.3.4), esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che C_{k_0} ha parte interna non vuota; in altri termini, C_{k_0} contiene una palla $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(y_0;r_0)$. Mostriamo che esiste k_1 tale che C_{k_1} contiene $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)$. Infatti, se scriviamo

$$y = \frac{1}{r_0}(y_0 + yr_0) - \frac{1}{r_0}y_0,$$

troviamo che entrambi gli addendi appartengono a $\overline{f\left(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}\left(0;\frac{k_0}{r_0}\right)\right)}$. Ovviamente, non è restrittivo supporre che $\frac{k_0}{r_0} := k_1$ sia un numero intero (a meno di restringere r_0); allora, troviamo che

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1) \subseteq C_{2k_1} = \overline{f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1))}.$$

Denotiamo con

$$D := f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1)) \cap \mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1);$$

essendo $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)$ un aperto in $\mathbb{Y}$, D è denso in $\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)$; inoltre, essendo f lineare, se y appartiene a $D \setminus \{0\}$; allora $\frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}$ è ancora in D. Per definizione, esiste $s\left(\frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}\right)$ in $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1)$ tale che

$$f\left(s\left(\frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}\right)\right) = \frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}.$$

Abbiamo ben definito una funzione

$$s : \left\{ y \in D \;\middle|\; \|y\|_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{2} \right\} \to \mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1);$$

possiamo estenderla ad una funzione $s : D \to \mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1)$ tale che $s(0) := 0$ e per ogni y in $D \setminus \{0\}$ vale che

$$s(y) := s\left(\frac{y}{2\|y\|_{\mathbb{Y}}}\right) 2\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

L'estensione è tale che

$$\|s(y)\|_{\mathbb{X}} \leq 2k_1 \|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Sia y in C_{2k_1}; per il lemma 1.3.22, esiste una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in D tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} y_n = y,$$

dove la convergenza è rispetto alla norma di $\mathbb{Y}$, e inoltre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_{\mathbb{Y}} \leq 3\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$, sia $x_n := s(y_n)$. Osserviamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\mathbb{X}} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2k_1\|y_n\| \leq 6k_1\|y\|_{\mathbb{Y}}.$$

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio di Banach, esiste x in $\mathbb{X}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i = x,$$

dove la convergenza è rispetto alla norma di $\mathbb{X}$. Per continuità e linearità di f, si ha che $f(x)=y$. Inoltre, x appartiene a $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1)}$. Questo mostra che valgono le inclusioni

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Y}}(0;1)\subseteq \overline{f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1))}\subseteq f(\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;2k_1)})\subseteq f(\mathcal{B}_{\mathbb{X}}(0;4k_1)).$$

Come mostrato nella proposizione 1.3.21, si conclude che f è aperta. □

Corollario 1.3.25. *Siano $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ spazi di Banach e sia $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ un'applicazione lineare continua. Sono fatti equivalenti:*

1. *f è bigettiva;*
2. *f è bigettiva e l'inversa è lineare e continua.*

Dimostrazione. Se f è bigettiva, per il teorema della mappa aperta (vedi 1.3.24), f è anche aperta. Allora f^{-1} è continua; inoltre, f^{-1} è ovviamente lineare. □

Corollario 1.3.26. *Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ due norme su $\mathbb{V}$. Supponiamo che $\mathbb{V}$ sia completo rispetto ad entrambe le norme e che esiste $M>0$ tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che*

$$\|v\|_1 \leq M\|v\|_2 .$$

Allora esiste $m>0$ tale che per ogni $v\in\mathbb{V}$ vale che

$$m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 .$$

Dimostrazione. Consideriamo la mappa identità

$$id:(\mathbb{V};\|\cdot\|_2)\to(\mathbb{V};\|\cdot\|_1).$$

Per le ipotesi, è lineare continua e bigettiva; per il corollario 1.3.25, anche l'inversa

$$id^{-1}:(\mathbb{V};\|\cdot\|_1)\to(\mathbb{V};\|\cdot\|_2)$$

è continua; pertanto esiste $m>0$ tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\|v\|_2 \leq m\|v\|_1 .$$

□

Corollario 1.3.27 (Teorema del grafico chiuso)**.**
Siano $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ spazi di Banach e sia $f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ un'applicazione lineare. Sono fatti equivalenti:

1. *f è continua;*
2. *il grafico di f è chiuso nel prodotto, cioè se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{X}$ che converge a x_∞ e $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{Y}$ che converge a y_∞, allora $f(x_\infty)=y_\infty$.*

Dimostrazione. Ovviamente la prima condizione implica la seconda. Mostriamo che vale anche il viceversa. Consideriamo in $\mathbb{X}$ le norme seguenti:

$$\|x\|_1 \coloneqq \|x\|_{\mathbb{X}}\,,$$

$$\|x\|_2 \coloneqq \|x\|_{\mathbb{X}} + \|f(x)\|_{\mathbb{Y}}\,.$$

Si mostra facilmente che sono norme e, inoltre, vale che $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ per ogni x in $\mathbb{X}$. Mostriamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{X}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$: allora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{X}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ e $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{Y}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$. Per ipotesi, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ sono completi rispetto a queste norme, quindi esiste x_∞ in $\mathbb{X}$ tale che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_∞ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ ed esiste y_∞ in $\mathbb{Y}$ tale che $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y_∞ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$. Per l'ipotesi di grafico chiuso, vale che $y_\infty = f(x_\infty)$. Abbiamo provato che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_∞ rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$.

Per il corollario 1.3.26, esiste $m > 0$ tale che per ogni x in $\mathbb{X}$ vale che

$$m\,\|x\|_{\mathbb{X}} + m\,\|f(x)\|_{\mathbb{Y}} = m\,\|x\|_2 \leq \|x\|_{\mathbb{X}}\,.$$

Riarrangiando i termini, si trova che

$$\|f(x)\|_{\mathbb{Y}} \leq \frac{1-m}{m}\,\|x\|_{\mathbb{X}}$$

che è equivalente alla continuità. □

Capitolo 2

Spazi L^p

2.1 Richiami su misura e integrazione

Sia $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura μ.

Teorema 2.1.1 (Beppo Levi, o convergenza monotona)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili con le seguenti proprietà:*

- *$f_n(x)$ è in $[0, +\infty]$ per ogni x in $\mathbb{X}$ per ogni n in $\mathbb{N}$;*
- *$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ per ogni x in $\mathbb{X}$ per ogni n in $\mathbb{N}$.*

Allora vale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu \right\} = \int_{\mathbb{X}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \right) \, d\mu.$$

Lemma 2.1.2 (Fatou)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili tale che $f_n(x)$ è in $[0, +\infty]$ per ogni x in $\mathbb{X}$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Allora vale che*

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\liminf_{n\to+\infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu.$$

Teorema 2.1.3 (Convergenza dominata)**.** *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili che converge puntualmente ad una funzione f_∞. Supponiamo che esista una funzione misurabile g tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $\mathbb{X}$ vale che*

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Allora vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} f_\infty \, d\mu.$$

Definizione 2.1.4 (L^p)**.**
Sia $f : \mathbb{X} \to [-\infty, +\infty]$ funzione misurabile. Se p è in $[1, +\infty)$ definiamo

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{X}} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}};$$

se $p = +\infty$ definiamo

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \coloneqq \inf\{M \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{X}\}.$$

Per ogni p in $[1,+\infty]$ definiamo

$$L^p(\mathbb{X}) := \left\{ f : \mathbb{X} \to [-\infty,+\infty] \mid \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} < +\infty \right\}_{/\sim},$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica le funzioni che coincidono quasi ovunque.

Definizione 2.1.5 (Esponente coniugato)**.**
Sia p in $[1,+\infty]$; definiamo il suo esponente coniugato p' in $[1,+\infty]$ tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lemma 2.1.6 (Disuguaglianza di Hölder)**.**
Siano p in $[1,+\infty]$ e p' l'esponente coniugato. Siano $f, g : \mathbb{X} \to [-\infty,+\infty]$ funzioni misurabili. Vale che

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})}.$$

Lemma 2.1.7 (Disuguaglianza di Minkowski)**.**
Siano p in $[1,+\infty]$ e $f, g : \mathbb{X} \to [-\infty,+\infty]$ funzioni misurabili. Vale che

$$\|f+g\|_{L^p(\mathbb{X})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{X})}.$$

In particolare, $L^p(\mathbb{X})$ è uno spazio vettoriale; la funzione $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to [0,+\infty)$ è ben definita sulle classi di equivalenza ed è una norma in $L^p(\mathbb{X})$.

Teorema 2.1.8. *Lo spazio $L^p(\mathbb{X})$ dotato della norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{X})}$ è uno spazio metrico completo.*

Proposizione 2.1.9. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili che converge in L^p ad una funzione f_∞, per quasi ogni x in $\mathbb{X}$ vale che $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f_\infty(x)$.*

Osservazione 2.1.10. Il sottospazio generato dalle funzioni caratteristiche è denso in $L^p(\mathbb{X})$. Inoltre, se $\mathbb{X}$ è un aperto di $\mathbb{R}^d$ e μ è la misura di Lebesgue, $L^p(\mathbb{X})$ è separabile se e solo se p è in $[1,+\infty)$.

Osservazione 2.1.11. Nel caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^d$, utilizzeremo la seguente notazione:

- dato x in $\mathbb{R}^d$, se p è in $[1,+\infty)$ denoteremo la norma p- esima del vettore x come

  $$|x|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

  omettendo il pedice nel caso più comune in cui $p=2$; se $p=+\infty$, invece

  $$|x|_\infty := \max_{1;\ldots;d}\{|x_i|\};$$

- se p è in $[1,+\infty)$ denoteremo la norma p-esima di una funzione $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^d$ come

  $$\|f\|_{L^p(\mathbb{X})} := \left\| |f|_p \right\|_{L^p(\mathbb{X})} = \left(\int_{\mathbb{X}} \sum_{i=1}^{d} |f_i|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}};$$

  se $p=+\infty$, invece, porremo

  $$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{X})} := \| |f|_\infty \|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

2.2 Prodotto di convoluzione

Definizione 2.2.1 (Mollificatore)**.**
Sia ρ una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\rho(x)$ appartiene a $[0,1]$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$;
- $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\ dx = \int_{\mathcal{B}(0;1)} \rho(x)\ dx = 1.$

La funzione ρ è detta mollificatore.

Definizione 2.2.2 (Prodotto di convoluzione)**.**
Sia $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un mollificatore come nella definizione 2.2.1. Per ogni $\varepsilon > 0$, indichiamo con ρ_ε la funzione tale che

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Data una funzione u in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo

$$u_\varepsilon(y) = u * \rho_\varepsilon(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)u(y-x)\ dx.$$

La funzione u_ε è il prodotto di convoluzione tra u e ρ_ε. Se u è definita su un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^d$, la convoluzione è definita in modo analogo estendendo u a 0 fuori da Ω.

Osservazione 2.2.3. Ricordiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ valgono le seguenti proprietà:

- u_ε è ben definita a valori in $\mathbb{R}$ ed è misurabile;
- se A è il supporto di u, allora il supporto di $u * \rho_\varepsilon$ è contenuto in $A + \mathcal{B}(0;\varepsilon)$;
- u_ε è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha\rho_\varepsilon(x)u(y-x)\ dx = u * D^\alpha\rho_\varepsilon(x);$$

- se u appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^d)$ per un certo p in $[1,+\infty]$, vale che

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)};$$

- se u appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^d)$ per un certo p in $[1,+\infty)$ ($+\infty$ è escluso), allora la successione $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corollario 2.2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia D l'insieme delle funzioni limitate a supporto compatto è denso in $L^p(\Omega)$. Il sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in D; dunque $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

2.3 Criterio di compattezza in L^p

Definizione 2.3.1 (Traslazione)**.**
Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi e h in $\mathbb{R}^d$. Poniamo

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Definiamo $\tau_h \hat{u}(x) := u(x+h)$.

Nel seguito identificheremo u con $\hat{u}$, assumendo automaticamente che sia stata estesa a 0 fuori da Ω, e $\tau_h \hat{u}$ con $\tau_h u$.

Ricordiamo il seguente criterio di relativa compattezza in spazi di Banach.

Lemma 2.3.2. *Siano* $(\mathbb{X}; d)$ *uno spazio di Banach e* S *un sottoinsieme in* $\mathbb{X}$*. Sono fatti equivalenti:*

1. $\overline{S}$ *è compatto in* $\mathbb{X}$*;*
2. *ogni successione in* S *ammette una sottosuccessione convergente ad un punto in* $\overline{S}$*;*
3. *per ogni* $r > 0$ *esiste un insieme* K_r *totalmente limitato in* $\mathbb{X}$ *tale che*
$$S \subseteq \bigcup_{x \in K_r} \mathcal{B}(x; r).$$

Teorema 2.3.3 (Criterio di compattezza in L^p)**.**
Siano Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$, p *in* $[1, +\infty)$ *(*$+\infty$ *è escluso) e* $\mathcal{F}$ *una famiglia in* $L^p(\Omega)$*. Assumiamo le seguenti ipotesi:*

- Ω *è limitato;*
- $\mathcal{F}$ *è limitata in* $L^p(\Omega)$*, cioè esiste* M *in* $\mathbb{R}$ *tale che per ogni* f *in* $\mathcal{F}$ *vale*
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq M;$$
- $\mathcal{F}$ *è una famiglia equicontinua in* L^p*, cioè per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* f *in* $\mathcal{F}$ *per ogni* h *in* $\mathbb{R}^d$ *tale che* $|h| \leq \delta$ *vale che*
$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Allora $\mathcal{F}$ *è relativamente compatta in* $L^p(\Omega)$*.*

Dimostrazione. **Step 1**: Assumiamo che ogni funzione in $L^p(\Omega)$ sia definita su tutto $\mathbb{R}^d$ e valga 0 in Ω^c. Per il lemma 2.3.2, basta mostrare che per ogni $r > 0$ esiste un insieme $\mathcal{F}_r$ compatto in L^p tale che per ogni f in $\mathcal{F}$ esiste g in $\mathcal{F}_r$ tale che

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq r.$$

Sia dato $r > 0$; scegliamo $\delta > 0$ corrispondente ad r nella terza ipotesi dell'enunciato. Sia ρ un mollificatore come in 2.2.1; poniamo

$$\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Definiamo
$$\mathcal{F}_r := \{f * \rho_\delta \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Step 2: Verifichiamo che
$$\|f - f * \rho_\delta\|_{L^p(\Omega)} \leq r.$$

Supponiamo che p sia in $(1, +\infty)$. Sia p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). Per le proprietà di ρ (vedi 2.2.1), per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\begin{aligned}
|f * \rho_\delta(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x + \delta y)\rho(y)\ dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\rho(y)\ dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y) - f(x)|\, \rho(y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f(x + \delta y) - f(x)|\, \rho(y)^{\frac{1}{p}} \right) \rho(y)^{\frac{1}{p'}}\ dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y) - f(x)|^p\, \rho(y)\ dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\ dy \right]^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y) - f(x)|^p\, \rho(y)\ dy \right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pertanto, ricordando la scelta di δ, vale che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f * \rho_\delta(x) - f(x)|^p\ dx &\leq \int_\Omega dx \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y) - f(x)|^p\, \rho(y)\ dy \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) \left[\int_\Omega |f(x + \delta y) - f(x)|^p\ dx \right] dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y) r^p\ dy \\
&= r^p.
\end{aligned}$$

Se $p = 1$, la dimostrazione data si adatta facilmente.

Step 3: Mostriamo che gli elementi di $\mathcal{F}$ sono equilimitati. Supponiamo p in $(1, +\infty)$; sia p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). Per ogni x in Ω vale che

$$\begin{aligned}
|f * \rho_\delta(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y)|\, \rho(y)\ dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x + \delta y)|^p\ dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)^{\frac{1}{p'}}\ dy \right]^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left[\frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(w)|^p\ dw \right]^{\frac{1}{p}} \|\rho\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \\
&= c(\delta; d; p)\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq c(\delta; d; p) M,
\end{aligned}$$

per una opportuna costante $c(\delta; d; p)$ che dipende soltanto da δ, d e p. La dimostrazione data si adatta facilmente per $p = 1$.

Step 4: Mostriamo che gli elementi di $\mathcal{F}_r$ sono equi-lipschitziani, cioè che esiste una costante M' tale che per ogni f in $\mathcal{F}$ vale che

$$\|\nabla f * \rho_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq M'.$$

Supponiamo p in $(1,+\infty)$ e sia p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). Allora per ogni x in $\mathbb{R}^d$ valgono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f*\rho_\delta)(x)\|_\infty &= \left\| \int_{\mathbb{R}^d} f(w)\nabla\rho\left(\frac{w-x}{\delta}\right)\frac{1}{\delta^d}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\, dw \right\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(w)| \left|\nabla\rho\left(\frac{w-x}{\delta}\right)\right|_\infty \, dw \\
&\leq \frac{1}{\delta^{d+1}} \|f\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla\rho\left(\frac{w-x}{\delta}\right)\right|_\infty^{p'} \, dw \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= c_2(\delta; d; p) M,
\end{aligned}$$

per una certa costante $c_2(\delta; d; p)$ dipendente solo da δ, d e p. Questo basta a garantire che $\mathcal{F}_r$ è una famiglia equi-lipschitziana. Nel caso $p = 1$, la dimostrazione data si adatta facilmente.

Step 5: La famiglia $\mathcal{F}_r$ è puntualmente equilimitata ed equicontinua; essendo Ω limitato, per il teorema di Ascoli-Arzelà, ogni successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}_r$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente a f_∞ in $\overline{\Omega}$. In particolare, la convergenza è anche in $L^p(\Omega)$. □

2.4 Duale di L^p

2.4.1 Duale degli spazi di successioni

Definizione 2.4.1 (ℓ^p).
Sia p un numero reale in $[1,+\infty)$. Definiamo

$$\ell^p := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

$$\|\{x_n\}\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Per $p = +\infty$, si pone

$$\ell^\infty := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\},$$

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Proposizione 2.4.2. *Per ogni p in $[1,+\infty]$, la funzione $\|\cdot\|_p$ è una norma su ℓ^p e ℓ^p è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{N}$ è dotato della misura che conta i punti, basta osservare che per ogni p in $[1,+\infty]$ lo spazio ℓ^p è per definizione $L^p(\mathbb{N})$ e la norma p su ℓ^p coincide con la norma p su $L^p(\mathbb{N})$. Tale spazio è completo rispetto alla norma p. $\square$

Proposizione 2.4.3 (Duale di ℓ^p)**.**
Siano p in $[1,+\infty)$ e p' il suo esponente coniugato in $(1,+\infty]$. Sia $(\ell^p)'$ il duale topologico di ℓ^p (vedi 1.1.13). Introduciamo la mappa $J:\ell^{p'}\to(\ell^p)'$ tale che per ogni y in $\ell^{p'}$ per ogni x in ℓ^p vale che

$$J_y(x) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n.$$

La mappa J è ben definita ed è un'isometria lineare e bigettiva.

Dimostrazione. **Step 1**: Fissiamo p in $[1,+\infty)$. Per ogni y in $\ell^{p'}$ mostriamo che J_y è un funzionale lineare continuo tra l^p e $\mathbb{R}$. Per ogni x in ℓ^p, dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$|J_y(x)| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\,|y_n| \le \|y\|_{p'}\,\|x\|_p\,.$$

In particolare, J_y è un'applicazione lineare e continua. Dunque, abbiamo provato la buona positura della mappa J.

Step 2: Abbiamo anche mostrato che vale la seguente stima sulla norma operatoriale di J_y:

$$\|J_y\|_{(\ell^p)'} \le \|y\|_{p'}\,.$$

Per concludere che J è un'isometria, bisogna mostrare che per ogni y in $\ell^{p'}$ vale la disuguaglianza opposta. Supponiamo $p=1$; sia $\varepsilon>0$ fissato. Osserviamo che esiste i in $\mathbb{N}$ tale che $|y_i|\ge\|y\|_\infty-\varepsilon$. Definiamo la successione x tale che $x_i\coloneqq\operatorname{sign}\{y_i\}$ e $x_n\coloneqq 0$ se $n\ne i$. Siccome $\|x\|_1=1$, si ha che

$$\|J_y\|_{(\ell^1)'} \ge |J_y(x)| = y_i\operatorname{sign}\{y_i\} = |y_i| \ge \|y\|_\infty-\varepsilon.$$

Allora, possiamo concludere che

$$\|J_y\|_{(\ell^1)'} \ge \|y\|_\infty\,.$$

Se p appartiene a $(1,+\infty)$, data y in ℓ^p, definiamo x tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$x_n \coloneqq |y_n|^{p'-1}\operatorname{sign}\{y_n\}\,.$$

Essendo $p(p'-1)=p'$, si trova che

$$\|x\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^{p'} = \|y\|_{p'}^{p'}\,.$$

In particolare, x è in ℓ^p. Inoltre, valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\|y\|_{p'}^{p'} &= \sum_{n\in N} |y_n|^{p'} \\
&= \left|\sum_{n\in N} y_n\,|y_n|^{p'-1}\operatorname{sign}\{y_n\}\right| \\
&= |J_y(x)| \le \|J_y\|_{(\ell^p)'}\,\|x\|_p \\
&= \|J_y\|_{(\ell^p)'}\,\|y\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}\,.
\end{aligned}$$

Riordinando i termini, si trova che

$$\|y\|_{p'} = \|y\|_{p'}^{p'-\frac{p'}{p}} \leq \|J_y\|_{(\ell^p)'} .$$

Step 3: Essendo J un'isometria, è in particolare una mappa iniettiva. Per concludere, bisogna provare che è surgettiva, cioè dobbiamo mostrare un risultato di rappresentazione dello spazio duale. Sia $L : \ell^p \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare continua. Per ogni n in $\mathbb{N}$, sia e_n la successione che vale 1 al posto n e 0 altrove. Definiamo la successione y in modo che $y_n := L(e_n)$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Dobbiamo mostrare che y è in $\ell^{p'}$. Come in precedenza, definiamo x tale che per ogni i in $\mathbb{N}$ vale che

$$x_i := |y_n|^{p'-1} \operatorname{sign}\{y_n\} .$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i L(e_i) \\
&= L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\
&\leq \|L\|_{(\ell^p)'} \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|_p \\
&=\leq \|L\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&=\leq \|L\|_{(\ell^p)'} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Riordinando i termini, si trova che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|L\|_{(\ell^p)'} .$$

Essendo n arbitrario, possiamo concludere che

$$\|y\|_{p'} \leq \|L\|_{(\ell^p)'} .$$

Consideriamo il funzionale lineare continuo J_y. Osserviamo che coincide con L sul sottospazione $\operatorname{Span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ che è denso in ℓ^p. Per continuità, le due applicazioni coincidono in ℓ^p, pertanto $L = J_y$. $\square$

Osservazione 2.4.4. Se p è in $[1, +\infty)$, diremo che $\ell^{p'}$ è il duale di ℓ^p, identificando le successioni in $\ell^{p'}$ con funzionali lineari continui tra ℓ^p ed $\mathbb{R}$. In altri termini, gli elementi di $\ell^{p'}$ definiscono misure su $\mathbb{N}$ assolutamente continue rispetto a quella che conta i punti (le successione in $\ell^{p'}$ sono le densità rispetto alla misura che conta i punti); tali misure agiscono sugli elementi di ℓ^p per integrazione.

Definizione 2.4.5. Definiamo i seguenti spazi di successioni:

$$c_0 := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \right\};$$

$$c_\infty := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid x_n = 0 \text{ definitivamente}\};$$

$$c := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ esiste ed è reale} \right\}.$$

Osservazione 2.4.6. Si mostra facilmente che c_0 e c sono sottospazi chiusi di ℓ^∞. Pertanto sono spazi di Banach rispetto alla norma di ℓ^∞. Invece, c_∞ non è un sottospazio chiuso di ℓ^∞ e la sua chiusura rispetto alla norma di ℓ^∞ è lo spazio c_0.

Osservazione 2.4.7. La dimostrazione data della proposizione 2.4.3 non funziona se $p = +\infty$. In tal caso, infatti, non è vero che $\mathrm{Span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ è denso in l^∞. Non c'è un buon teorema di rappresentazione del duale di ℓ^∞. In altri termini, l'applicazione $J : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ è ben definita, è lineare ed è un'isometria iniettiva. Tuttavia, non è surgettiva sul duale di ℓ^∞. Sia $L : c \to \mathbb{R}$ l'applicazione tale che per ogni x in c vale che

$$L(x) := \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

L'applicazione L è ovviamente lineare ed è anche continua rispetto alla norma di ℓ^∞. Per il teorema di Hahn-Banach (vedi 1.1.5), si estende ad un'applicazione lineare e continua definita su tutto ℓ^∞, che denotiamo ancora con L. Mostriamo che non esiste alcuna successione y in ℓ^1 tale che per ogni x in c vale che

$$L(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

Supponiamo che esista y in ℓ^1 con le proprietà richieste. Per ogni n in $\mathbb{N}$ denotiamo con e^n la successione tale che $e^n_m = 0$ se $n \neq m$ e $e^n_n = 1$; otteniamo che

$$0 = \lim_{m\to+\infty} e^n_m = L(e_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} e^n_m y_m = y_n.$$

Dunque y è identicamente nulla; tuttavia, è ovvio che L non è il funzionale nullo su c.

Proposizione 2.4.8 (Duale di c_0)**.**
La mappa $J : \ell^1 \to (c_0)'$ tale che per ogni y in ℓ^1 per ogni x in c_0 vale che

$$J_y(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$$

è ben definita ed è un'isometria lineare e bigettiva.

Dimostrazione. Date y in ℓ^1 e x in c_0, vale la stima

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty;$$

pertanto, l'applicazione J è ben definita. Inoltre, vale la seguente stima per la norma operatoriale:

$$\|J_y\|_{(c_0)'} \leq \|y\|_1.$$

Per la disuguaglianza opposta, per ogni n in $\mathbb{N}$, definiamo la successione x in ℓ^∞ tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ si ha che $x_n \coloneqq \operatorname{sign}\{y_n\}$. Per ogni m in $\mathbb{N}$ definiamo la successione x^m in c_∞ tale che $x_n^m \coloneqq x_n$ se $n \leq m$ e $x_n^m \coloneqq 0$ se $n > m$. Allora, si ha che

$$\|J_y\|_{(c_0)'} \geq |J_y(x^m)| = \sum_{i=1}^{m} |y_i| .$$

Passando all'estremo superiore in m, si trova che

$$\|J_y\|_{(c_0)'} \geq \|y\|_1 ;$$

dunque J è una isometria. In particolare, è una mappa iniettiva. Bisogna mostrare che è surgettiva, cioè dobbiamo provare un risultato di rappresentazione del duale di c_0. Sia $L : c_0 \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare continuo. Per ogni n in $\mathbb{N}$ sia e_n la successione che vale 1 al posto n e 0 altrimenti. Per ogni i in $\mathbb{N}$ definiamo $y_i \coloneqq L(e_i)$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |y_i| &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}\{y_i\} \; y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}\{y_i\} \; L(e_i) \\
&= L\left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}\{y_i\}\, e_i\right) \\
&\leq \|L\|_{(c_0)'} \left\| \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}\{y_i\} \; e_i \right\|_\infty \\
&= \|L\|_{(c_0)'} .
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore in n, troviamo che y appartiene ad ℓ^1. Inoltre, J_y ed L sono applicazioni lineari continue che coincidono su $\operatorname{Span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, che coincide con c_∞. Pertanto, coincidono sulla sua chiusura rispetto alla norma di ℓ^∞ che è proprio lo spazio c_0. Questo dimostra che l'applicazione J è surgettiva su $(c_0)'$. □

Osservazione 2.4.9. La proposizione 2.4.8 mostra anche che l'applicazione J è surgettiva sul duale di c_∞. Pertanto, $(c_0)'$ coincide con $(c_\infty)'$.

Proposizione 2.4.10 (Duale di c).
Rappresentiamo ogni successione y in ℓ^1 come $(y_\infty; y_1; y_2; \ldots; y_n; \ldots)$. Per ogni x in c, poniamo

$$x_\infty \coloneqq \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

La mappa $J : \ell^1 \to c'$ tale che per ogni y in ℓ^1 per ogni x in c vale che

$$J_y(x) \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n + y_\infty x_\infty$$

è ben definita ed è un'isometria lineare e bigettiva.

Dimostrazione. Date y in ℓ^1 e x in c, vale la stima

$$|J_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty ;$$

pertanto, l'applicazione J è ben definita. Inoltre, vale la seguente stima per la norma operatoriale:

$$\|J_y\|_{c'} \leq \|y\|_1 .$$

Dobbiamo mostrare la disuguaglianza opposta. Per ogni n in $\mathbb{N}$, definiamo $x_n \coloneqq \operatorname{sign}\{y_n\}$ e $x_\infty \coloneqq \operatorname{sign}\{y_\infty\}$. Per ogni m in $\mathbb{N}$ definiamo la successione x^m tale che $x^m_n \coloneqq x_n$ se $n \leq m$ e $x^m_n \coloneqq x_\infty$ se $n > m$. Per ogni m in $\mathbb{N}$ troviamo che

$$\begin{aligned}
\|J_y\|_{c'} &\geq |J_y(x^m)| \\
&\geq \left| \sum_{i=1}^m x_i y_i + x_\infty y_\infty \right| - \sum_{i>m} |x_i y_i| \\
&= \sum_{i=1}^m |y_i| + |y_\infty| - \sum_{i>m} |y_i| .
\end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore in m, siccome y è una successione in ℓ^1, si trova che

$$\|J_y\|_{c'} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| + |y_\infty| = \|y\|_1 .$$

Dunque J è un'isometria e, in particolare, è iniettiva. Per concludere, dobbiamo provare che è surgettiva, cioè mostrare un risultato di rappresentazione del duale di c. Per ogni n in $\mathbb{N}$ definiamo e_n come la successione che vale 1 al posto n e 0 altrimenti. Inoltre, poniamo e_∞ come la successione che vale costantemente 1. Sia L un'applicazione lineare continua tra c ed $\mathbb{R}$. Per ogni n in $\mathbb{N}$, poniamo $y_n \coloneqq L(e_n)$; in maniera del tutto analoga alla proposizione 2.4.8 si mostra che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < +\infty.$$

Pertanto, possiamo porre

$$y_\infty \coloneqq L(e_\infty) - \sum_{n\in\mathbb{N}} L(e_n).$$

La successione y così definita appartiene ad ℓ^1; inoltre, si ha che J_y ed L coincidono sull'insieme $\operatorname{Span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$; per continuità, coincidono anche sulla sua chiusura rispetto alla norma ℓ^∞, che è esattamente lo spazio c. $\square$

2.4.2 Duale degli spazi L^p

Ricordiamo il seguente teorema di teoria della misura.

Teorema 2.4.11 (Radon-Nikodym).
Siano $\mathbb{X}$ un insieme, $\mathcal{M}$ una σ-algebra su $\mathbb{X}$, $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ una misura con segno, $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ una misura non negativa. Supponiamo che ν sia assolutamente continua rispetto a μ, cioè $\nu(A) = 0$ per ogni A in $\mathcal{M}$ tale che $\mu(A) = 0$. Allora esiste una funzione misurabile g tale che per ogni A in $\mathcal{M}$ vale che

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu.$$

Inoltre g appartiene a $L^1(\mathbb{X}, \mu)$.

Proposizione 2.4.12 (Duale di L^p - misura finita)**.**
Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu)$ *uno spazio misurabile dotato di una misura* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$*,* p *in* $[1, +\infty)$ *(*$+\infty$ *è escluso),* p' *l'esponente coniugato di* p *(vedi 2.1.5). Per ogni* g *in* $L^{p'}(\mathbb{X})$*, l'operatore* $J_g : L^p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$J_g(f) := \int_{\mathbb{X}} gf \ d\mu$$

è ben definito; inoltre è lineare e continuo. La mappa $J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ *che associa ad ogni funzione* g *in* $L^{p'}(\mathbb{X})$ *l'operatore* J_g *in* $(L^p(\Omega))'$ *è un'isometria lineare e bigettiva.*

Dimostrazione. **Step 1**: Sia g in $L^{p'}(\mathbb{X})$. Per la disuguaglianza di Hölder, per ogni f in $L^p(\mathbb{X})$ vale che

$$|J_g(f)| = \left| \int_{\mathbb{X}} fg \ d\mu \right| \leq \|g\|_{p'} \|f\|_p .$$

Questo dimostra che l'operatore J_g è continuo e vale anche che

$$\|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \leq \|g\|_{p'} .$$

Pertanto, la mappa J è ben definita; inoltre è banalmente lineare. Dobbiamo mostrare che è un'isometria, cioè che per ogni g in $L^{p'}(\mathbb{X})$ vale che

$$\|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \geq \|g\|_{p'} .$$

Supponiamo $p = 1$. Se $g \equiv 0$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme A_ε di misura positiva e finita tale che per ogni x in A_ε vale

$$|g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon \geq 0.$$

Sia $h(x) := \mathbb{1}_{A_\varepsilon}(x)$; nelle nostre ipotesi, h è in $L^1(\mathbb{X})$. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
(\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon) &\leq \int_{A_\varepsilon} |g| \ d\mu \\
&= \int_{\mathbb{X}} g \ \operatorname{sgn}(g)\mathbb{1}_{A_\varepsilon} \ d\mu \\
&\leq \|J_g\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \|\operatorname{sgn}(g)\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\|_1 \\
&= \|J_g\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \mu(A_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Segue che per ogni $\varepsilon > 0$ vale

$$\|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|J_g\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} ,$$

da cui si conclude per l'arbitrarietà di ε.

Sia p in $(1, +\infty)$. Poniamo

$$h(x) := |g(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn}(g(x)).$$

Essendo $p(p'-1) = p'$, vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |h|^p \ d\mu = \int_{\mathbb{X}} |g|^{p'} \ d\mu.$$

Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} |g|^{p'} \ d\mu &= \int_{\mathbb{X}} g \ \operatorname{sgn}(g) \, |g|^{p'-1} \ d\mu \\ &\leq \|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \|f\|_p \\ &= \|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \|g\|_{p'}^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Riordinando i termini, si trova che

$$\|g\|_{p'} \leq \|J_g\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}.$$

Pertanto, la mappa J è ben definita ed è un'isometria lineare; in particolare, è iniettiva.

Step 2: Dobbiamo mostrare che la mappa J è surgettiva. Sia L un funzionale lineare continuo in $(L^p(\mathbb{X}))'$. Per ogni A in $\mathcal{M}$ definiamo

$$\nu(A) \coloneqq L(\mathbb{1}_A).$$

La funzione d'insieme $\nu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ è una misura con segno assolutamente continua rispetto a μ. Dalla definizione segue banalmente che $\nu(\emptyset) = 0$. Se $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di insiemi misurabili a due a due disgiunti, dobbiamo provare che

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$ poniamo

$$B_n \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} A_i;$$

denotiamo con

$$A \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Essendo p in $[1, +\infty)$ (è essenziale che $p \neq +\infty$), per il teorema di Beppo Levi, si ha che $\{\mathbb{1}_{B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbb{1}_A$ in L^p. Allora, dalla continuità di L si deduce che

$$\begin{aligned}\nu(A) = L(\mathbb{1}_A) &= \lim_{n\to+\infty} L(\mathbb{1}_{B_n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} L\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} L(\mathbb{1}_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).\end{aligned}$$

L'assoluta continuità segue dal fatto che se $\mu(A) = 0$ allora $\mathbb{1}_A$ è 0 quasi ovunque, pertanto $\nu(A) = L(\mathbb{1}_A) = 0$.

Step 3: Per il teorema di Radon-Nikodym (vedi 2.4.11), esiste una funzione misurabile g in $L^1(\mathbb{X})$ tale che per ogni A in $\mathcal{M}$ vale che

$$\nu(A) = \int_A g \ d\mu.$$

Vogliamo provare che g è una funzione in $L^{p'}(\mathbb{X})$, che

$$\|g\|_{p'} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'}$$

e che $L = J_g$. Supponiamo $p = 1$. Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$A_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{X} \mid g(x) \geq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} + \varepsilon \right\}$$

ha misura μ nulla. Infatti, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon) \left(\|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} + \varepsilon \right) &\leq \int_{A_\varepsilon} g \, d\mu \\
&= \int_{A_\varepsilon} g \, \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \, d\mu \\
&= \nu(A_\varepsilon) = L(\mathbb{1}_{A_\varepsilon}) \\
&\leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \|\mathbb{1}_{A_\varepsilon}\|_1 \\
&= \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} \mu(A_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Questo è possibile solo se $\mu(A_\varepsilon) = 0$. Analogamente, si mostra che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme

$$B_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{X} \mid g(x) \leq - \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} - \varepsilon \right\}$$

ha misura μ nulla. Sappiamo che per ogni insieme A in $\mathcal{M}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} g \, \mathbb{1}_A \, d\mu = \nu(A) = L(\mathbb{1}_A).$$

Essendo l'insieme delle funzioni semplici denso in $L^1(\mathbb{X})$ ed f un funzionale continuo, per ogni f in $L^1(\mathbb{X})$ vale

$$\int_{\mathbb{X}} f \, g \, d\mu = L(f).$$

Quindi $L = J_g$, cioè J è un'applicazione surgettiva.

Supponiamo p in $(1, +\infty)$. Sappiamo che per ogni funzione semplice θ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} g \, \theta \, d\mu = L(\theta).$$

Se f è una funzione in $L^\infty(\mathbb{X})$, sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni semplici che converge ad f in L^p tale che $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Utilizzando il teorema di convergenza dominata (è essenziale che $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$) e la continuità di L, troviamo che

$$\int_{\mathbb{X}} g \, f \, d\mu = L(f).$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$, definiamo g_n come il troncamento di g in $[-n, n]$. Poniamo

$$f_n(x) := |g_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn}(g(x)).$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{X}} |g_n|^{p'} \ d\mu &= \int_{\mathbb{X}} |g_n|^{p'-1} \ \operatorname{sgn}(g) \ g_n \ d\mu \\ &= \int_{\mathbb{X}} f_n \ g_n \ d\mu = L(f_n) \\ &\leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \|f_n\|_p \\ &= \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \left(\int_{\mathbb{X}} |g_n|^{p(p'-1)} \ d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .\end{aligned}$$

Riordinando i termini, si trova che

$$\|g_n\|_{p'} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} .$$

Osserviamo che la successione $\{|g_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $|g|$ in maniera monotona. Per il teorema di Beppo Levi vale che

$$\|g\|_{p'} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} .$$

Infine, osserviamo che se f è una funzione in $L^p(\mathbb{X})$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni semplici che converge ad f in L^p, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}} f_n \ g \ d\mu = L(f_n);$$

passando al limite in n, si osserva facilmente che

$$\int_{\mathbb{X}} f \ g \ d\mu = L(f).$$

Pertanto, $L = J_g$. □

Corollario 2.4.13 (Duale di L^p - misura σ-finita)**.**
Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu)$ *uno spazio misurabile dotato di una misura* $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *non negativa e* σ*-finita,* p *in* $[1, +\infty)$ *(*$+\infty$ *è escluso),* p' *l'esponente coniugato di* p *(vedi 2.1.5). Per ogni* g *in* $L^{p'}(\mathbb{X})$*, l'operatore* $J_g : L^p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$J_g(f) := \int_{\mathbb{X}} gf \ d\mu$$

è ben definito; inoltre è lineare e continuo. La mappa $J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ *che associa ad ogni funzione* g *in* $L^{p'}(\mathbb{X})$ *l'operatore* J_g *in* $(L^p(\Omega))'$ *è un'isometria lineare e bigettiva.*

Dimostrazione. Per definizione, esiste una successione $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi misurabili in $\mathbb{X}$ aventi misura finita la cui unione copre $\mathbb{X}$. Inoltre, non è restrittivo supporre che $\mathbb{X}_n$ sia contenuto in $\mathbb{X}_{n+1}$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Sia $L : L^p(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare e continua. Per ogni n in $\mathbb{N}$, L induce per restrizione un'applicazione lineare e continua $L_n : L^p(\mathbb{X}_n) \to \mathbb{R}$; inoltre, vale banalmente che

$$\|L_n\|_{(L^p(\mathbb{X}_n))'} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} .$$

Detto p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5), per la proposizione 2.4.12, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un'applicazione g_n in $L^{p'}(\mathbb{X}_n)$ tale che per ogni f in $L^p(\mathbb{X}_n)$ vale che

$$L_n(f) = \int_{\mathbb{X}_n} f g_n \, d\mu.$$

Inoltre, abbiamo anche mostrato che

$$\|g_n\|_{L^{p'}(\mathbb{X}_n)} = \|L_n\|_{(L^p(\mathbb{X}_n))'} .$$

Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $g_n(x) = g_{n+1}(x)$ per quasi ogni x in $\mathbb{X}_n$. Infatti, per ogni f in $L^p(\mathbb{X}_n)$ vale che

$$\int_{\mathbb{X}_n} g_n f \, d\mu = \int_{\mathbb{X}_{n+1}} g_{n+1} f \, d\mu = \int_{\mathbb{X}_n} g_{n+1} f \, d\mu.$$

Questo è sufficiente ad affermare che possiamo ben definire una funzione misurabile $g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) \coloneqq g_n(x)$ se x è in $\mathbb{X}_n$. Se $p' \neq +\infty$, per il teorema di Beppo Levi vale che

$$\int_{\mathbb{X}} |g|^{p'} \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}_n} |g_n|^{p'} \, d\mu \leq \|L\|^{p'}_{(L^p(\mathbb{X}))'} .$$

Del resto, anche nel caso in cui $p' = +\infty$ si deduce analogamente che

$$\|g\|_{L^\infty(\mathbb{X})} \leq \|L\|_{(L^1(\mathbb{X}))'} .$$

Dunque g è in $L^{p'}(\mathbb{X})$. Data f in $L^p(\mathbb{X})$, denotiamo con $f_n \coloneqq f \mathbb{1}_{\mathbb{X}_n}$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Ovviamente $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in L^p; per continuità di L, possiamo scrivere che

$$L(f) = \lim_{n\to+\infty} L(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}_n} g_n f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{X}} g f \mathbb{1}_{\mathbb{X}_n} \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} f g \; \mu,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema di convergenza dominata (infatti, per la disuguaglianza di Hölder, $|fg|$ è una dominazione ammissibile in $L^1(\mathbb{X})$).

Abbiamo mostrato che per ogni L in $(L^p(\mathbb{X}))'$ esiste g in $L^{p'}(\mathbb{X})$ tale che per ogni f in $L^p(\mathbb{X})$ vale che

$$L(f) = \int_{\mathbb{X}} f g \, d\mu$$

e inoltre vale

$$\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} \leq \|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} .$$

Del resto, dalla disuguaglianza di Hölder deduce che

$$|L(f)| \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{X})} \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} ,$$

da cui segue banalmente che

$$\|L\|_{(L^p(\mathbb{X}))'} \leq \|g\|_{L^{p'}(\mathbb{X})} .$$

In conclusione, abbiamo mostrato che l'applicazione $J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ è un'isometria lineare e bigettiva. $\square$

Osservazione 2.4.14. Se $(\mathbb{X};\mathcal{M};\mu)$ è uno spazio misurabile dotato di una misura μ non negativa e σ-finita, abbiamo dimostrato che il duale di $L^1(\mathbb{X})$ è isometrico a $L^\infty(\mathbb{X})$. A meno di casi molto banali, L^1 è separabile, mentre L^∞ non è separabile. Questo mostra che il viceversa della proposizione 1.1.35 è generalmente falso. Sia $\Omega = (-1,1)$ con la misura di Lebesgue; possiamo definire il funzionale $L : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che $L(f) := f(0)$. Ovviamente L è lineare e continuo rispetto alla norma di L^∞. Per il teorema di Hahn-Banach (vedi 1.1.5), esiste un'estensione lineare e continua a tutto $L^\infty(\Omega)$, che denotiamo ancora con L. Vogliamo mostrare che non esiste alcuna funzione g in $L^1(\Omega)$ tale che per ogni f in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega f(x)g(x)\ dx = L(f) = f(0).$$

Se così non fosse, potremmo scegliere una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- $f_n(0) = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$;
- $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in Ω;
- $f_n(x) = 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x tale che $|x| \geq 2^{-1}$.

Per il teorema di convergenza dominata si ha che

$$1 = \lim_{n\to+\infty} L(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\ dx = 0,$$

che è chiaramente assurdo. Si dimostra che se $(\mathbb{X},\mathcal{M},\mu)$ è uno spazio di misura allora il duale di $L^\infty(\mathbb{X})$ è isomorfo allo spazio di tutte le misure finitamente additive e assolutamente continue rispetto a μ che agiscono per integrazione.

Osservazione 2.4.15. Siano K uno spazio metrico compatto e $C^0(K)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali dotato della norma del sup. Si può dimostrare che per ogni $L : C^0(K) \to \mathbb{R}$ lineare e continua esiste una misura μ con segno regolare e limitata tale che

$$L(f) = \int_K f\ d\mu.$$

2.4.3 Debole e debole* compattezza in L^p

I teoremi di rappresentazione del duale consentono di riformulare la convergenza debole e debole* in L^p in maniera più concreta.

Proposizione 2.4.16. *Siano $(\Omega;\mathbb{M};\mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura σ-finita μ, p in $[1,+\infty)$, p' l'esponente coniugato (vedi 2.1.5) e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^p(\Omega)$. Sono fatti equivalenti:*

- *$\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in a v_∞ in L^p;*
- *per ogni w in $L^{p'}(\Omega)$ vale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n w\ d\mu = \int_\Omega v_\infty w\ d\mu.$$

Dimostrazione. Sia p in $[1,+\infty)$. Per definizione di convergenza debole, per ogni f in $(L^p(\Omega))'$ vale che
$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(v_\infty).$$
Per il teorema di rappresentazione del duale di L^p (vedi 2.4.13), deduciamo immediatamente che per ogni w in $L^{p'}(\Omega)$ vale che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega v_n w\ d\mu = \int_\Omega v_\infty w\ d\mu.$$
L'altra implicazione è ovvia. □

Osservazione 2.4.17. Supponiamo che $(\Omega;\mathcal{M};\mu)$ sia uno spazio misurabile dotato di una misura finita. Siano p_1, p_2 in $[1,+\infty)$, p_1' e p_2' i corrispondenti esponenti coniugati (vedi 2.1.5). Supponiamo $p_1 \geq p_2$; allora $p_1' \leq p_2'$. Essendo $\mu(\Omega)$ finito, vale il contenimento
$$L^{p_2'}(\Omega) \subseteq L^{p_1'}(\Omega).$$
Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^{p^1}(\Omega)\cap L^{p^2}(\Omega)$ che converge debolmente ad una funzione u_∞ in L^{p_1}. Per la proposizione precedente, questo è equivalente a richiedere che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n w\ d\mu = \int_\Omega u_\infty w\ d\mu,$$
per ogni w in $L^{p_1'}(\Omega)$. In particolare u_∞ appartiene a $L^{p^2}(\Omega)$ e vale che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n w\ d\mu = \int_\Omega u_\infty w\ d\mu,$$
per ogni w in $L^{p_2'}(\Omega)$, per il contenimento tra $L^{p_2'}$ e $L^{p_1'}$. Per la proposizione 2.4.16, questo è equivalente a richiedere che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ debolmente in L^{p_2}. In altri termini, la convergenza più debole di tutte è quella debole in $L^1(\Omega)$.

Osservazione 2.4.18. In analogia all'enunciato della proposizione 2.4.16, diciamo che se $p=+\infty$, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* a v_∞ se la successione di funzionali $L_n : L^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ tali che
$$L_n(w) := \int_\Omega v_n w\ d\mu$$
converge debole* (vedi 1.1.18) al funzionale $L_\infty : L^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ tale che
$$L_\infty(w) := \int_\Omega v_\infty w\ d\mu.$$
Questo è equivalente a dire che per ogni w in $L^1(\Omega)$ vale che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega v_n w\ d\mu = \int_\Omega v_\infty w\ d\mu.$$

Osservazione 2.4.19. I teoremi di rappresentazione del duale di L^p possono essere interpretati in termini di riflessività (vedi 1.1.37).

Siano $(\mathbb{X},\mathcal{M},\mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura σ-finita μ, p in $(1,+\infty)$ e p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). Allora $L^p(\mathbb{X})$ è uno spazio riflessivo. Innanzitutto, osserviamo che p' è in $(1,+\infty)$. Per la proposizione 2.4.13, $L^{p'}(\mathbb{X})$ è isometrico a $(L^p(\mathbb{X}))'$ e $L^p(\mathbb{X})$ è isometrico a $(L^{p'}(\mathbb{X}))'$. Sia $\Psi : (L^p(\mathbb{X}))' \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Abbiamo mostrato in 2.4.13 che la mappa $J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ tale che per ogni f in $L^{p'}(\mathbb{X})$ per ogni g in $L^p(\mathbb{X})$ vale che

$$J_f(g) = \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu$$

è un'isometria lineare e bigettiva. Dato L in $(L^p(\mathbb{X}))'$ denotiamo con f_L l'elemento di $L^{p'}(\mathbb{X})$ che lo rappresenta. Osserviamo che, per composizione, $\Theta := \Psi \circ J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare e continuo; pertanto, esiste g in $L^p(\mathbb{X})$ tale che per ogni f in $L^{p'}(\mathbb{X})$ vale che

$$\Theta(f) = \int_{\mathbb{X}} fg \, d\mu.$$

In altri termini, per ogni L in $(L^p(\mathbb{X}))'$ vale che

$$\Psi(L) = \Theta(f_L) = \int_{\mathbb{X}} f_L g \, d\mu = L(g).$$

Questo è sufficiente a concludere.

Proposizione 2.4.20. *Siano $(\Omega; \mathcal{M}; \mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura σ-finita μ, p in $[1, +\infty]$, p' l'esponente coniugato (vedi 2.1.5), D un sottospazio denso in $L^{p'}(\Omega)$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $L^p(\Omega)$. Supponiamo che esista v_∞ in $L^p(\Omega)$ tale che per ogni w in D vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n w \, d\mu = \int_\Omega v_\infty w \, d\mu.$$

Allora $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v_∞ debolmente in L^p se p è finito, debole se $p = +\infty$.*

Dimostrazione. Per quanto osservato in 2.4.16 e 2.4.18, basta mostrare che per ogni w in $L^{p'}(\Omega)$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n w \, d\mu = \int_\Omega v_\infty w \, d\mu.$$

Sia data w in $L^{p'}(\Omega)$. Sia M una costante che limita in norma la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e v_∞. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Scegliamo w_ε in D tale che

$$\|w - w_\varepsilon\|_{p'} \le \varepsilon.$$

Scegliamo n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge n_0$ vale che

$$\left| \int_\Omega v_n w_\varepsilon \, d\mu - \int_\Omega v_\infty w_\varepsilon \, d\mu \right| \le \varepsilon.$$

Allora, per ogni $n \ge n_0$ vale che

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega v_n w \, d\mu - \int_\Omega v_\infty w \, d\mu \right| &\le \left| \int_\Omega v_n w \, d\mu - \int_\Omega v_n w_\varepsilon \, d\mu \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega v_n w_\varepsilon \, d\mu - \int_\Omega v_\infty w_\varepsilon \, d\mu \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega v_\infty w_\varepsilon \, d\mu - \int_\Omega v_\infty w \, d\mu \right| \\
&\le \|v_n\|_p \|w - w_\varepsilon\|_{p'} + \varepsilon + \|v_\infty\|_p \|w - w_\varepsilon\|_{p'} \\
&\le \varepsilon(2M + 1).
\end{aligned}$$

La tesi segue banalmente. □

Proposizione 2.4.21. *Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $(1, +\infty]$ (1 escluso), p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5) e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $L^p(\Omega)$. Allora esiste una sottosuccessione, non rinominata, e una funzione v_∞ in $L^p(\Omega)$ tale che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v_∞ debolmente in $L^p(\Omega)$ se p è finito, debole* in $L^p(\Omega)$ se $p = +\infty$. In altri termini, per ogni u in $L^{p'}(\Omega)$ si ha che*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n u \, dx = \int_\Omega v_\infty u \, dx.$$

Dimostrazione. Per ogni n in $\mathbb{N}$ definiamo $L_n : L^{p'}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

$$L_n(u) := \int_\Omega v_n u \, dx.$$

Come provato in 2.4.13, osserviamo che $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione ben definita di funzionali in $(L^{p'}(\Omega))'$ e per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|L_n\|_{(L^{p'}(\Omega))'} = \|v_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pertanto, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $(L^{p'}(\Omega))'$. Ricordiamo che se p è in $(1, +\infty]$, allora p' è in $[1, +\infty)$; in particolare, $L^{p'}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile. Per il teorema di Banach-Alaoglu (vedi 1.1.22), esiste una sottosuccessione (non rinominata) ed un funzionale L_∞ in $(L^{p'}(\Omega))'$ tale che $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* a L_∞. Essendo p' in $[1, +\infty)$, per il teorema di rappresentazione del duale di $L^{p'}(\Omega)$ (vedi 2.4.13), esiste una funzione v_∞ in $L^p(\Omega)$ tale che per ogni u in $L^{p'}(\Omega)$ vale che

$$L_\infty(u) = \int_\Omega v_\infty u \, dx.$$

Poiché $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debole* a L_∞ (vedi 1.1.18), per ogni u in $L^{p'}(\Omega)$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u v_n \, dx = \int_\Omega u v_\infty \, dx.$$

□

Esempio 2.4.22. Un enunciato come quello della proposizione 2.4.21 non può essere vero se $p = 1$, nel senso che se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $L^1(\Omega)$ non è detto che esista una sottosuccessione (non rinominata) e una funzione v_∞ in $L^1(\Omega)$ tale che per ogni u in $L^\infty(\Omega)$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega v_n u \, dx = \int_\Omega v_\infty u \, dx. \tag{2.1}$$

Infatti, sia $\Omega = (-1, 1)$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$v_n := n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}.$$

Sia v_∞ in $L^1((-1, 1))$ tale che (2.1) vale per ogni u in L^∞. Se u è in $C_c^\infty((-1, 1))$, per il teorema della media integrale, vale che

$$\int_{-1}^1 \varphi v_\infty \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^1 \varphi v_n \, dx = \lim_{n\to+\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi \, dx = \varphi(0). \tag{2.2}$$

Sia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $C_c^\infty((-1, 1))$ tale che

- $\varphi_n(x)$ è in $[0, 1]$ per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[-1, 1]$;
- $\varphi_n(0) = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$;
- $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a 0 per ogni x in $(-1, 1) \setminus \{0\}$.

Da (2.2), applicando il teorema di convergenza dominata, si trova che

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \varphi_n v_\infty \, dx = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = 1.$$

A completamento di questi esempi, enunciamo il seguente teorema, di cui non presentiamo la dimostrazione.

Teorema 2.4.23. *Sia $\psi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione boreliana a crescita superlineare, cioè tale che*

$$\lim_{|p|\to+\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} = +\infty.$$

Siano $(\Omega; \mathbb{M}; \mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura finita. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $L^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \psi(v_n) d\mu \leq M$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Allora esiste una sottosuccessione, non rinominata, ed una funzione v_∞ in $L^1(\Omega)$ tale che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v_∞ in $L^1(\Omega)$.

Capitolo 3

Spazi di Hilbert

3.1 Spazi vettoriali dotati di un prodotto scalare

Definizione 3.1.1 (Prodotto scalare)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale reale; si dice che $< \cdot, \cdot >: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{V}$ se è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva.

Lemma 3.1.2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale reale e $< \cdot, \cdot >$ un prodotto scalare su $\mathbb{V}$. Allora per ogni v, w in $\mathbb{V}$ vale

$$|< v, w >| \leq \sqrt{< v, v >}\sqrt{< w, w >}.$$

Dimostrazione. Per ogni t in $\mathbb{R}$, osserviamo che

$$0 \leq < v + tw, v + tw > = < v, v > + 2t < v, w > + t^2 < w, w > .$$

Essendo un'equazione di secondo grado in t, la condizione data implica che

$$< v, w >^2 - < v, v >< w, w > \leq 0,$$

che è equivalente alla tesi. □

Definizione 3.1.3 (Norma indotta da un prodotto scalare)**.**
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale e $< \cdot, \cdot >$ un prodotto scalare su $\mathbb{V}$. Definiamo $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tale che $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$. $\|\cdot\|$ è detta norma indotta dal prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$.

Osservazione 3.1.4. La funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definita in 3.1.3 è una norma:

- $\|v\|$ è ben definita e vale 0 se e solo se $v = 0$ perchè il prodotto scalare è definito positivo;
- $\|\cdot\|$ è ovviamente omogenea;
- $\|\cdot\|$ soddisfa la disuguaglianza triangolare. Infatti, dati v, w in $\mathbb{V}$, si ha che

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= < v + w, v + w > \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 < v, w > \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \|v\| \|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

  come segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (vedi 3.1.2).

Pertanto, $\mathbb{V}$ acquisisce naturalmente una struttura di spazio normato.

Osservazione 3.1.5. Sia $\mathbb{V}$ uno spazi vettoriale dotato di un prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$. Per la definizione di norma indotta (vedi 3.1.3) vale l'identità del parallelogramma:

$$2\left\|x\right\|^2 + 2\left\|y\right\|^2 = \left\|x+y\right\|^2 + \left\|x-y\right\|^2$$

per ogni x, y in $\mathbb{V}$.

Teorema 3.1.6 (Frechet-Jordan-Von Neumann)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio normato tale che la norma soddisfa l'identità del parallelogramma (vedi 3.1.5). Allora esiste un prodotto scalare $p(\cdot;\cdot)$ che induce la norma su $\mathbb{V}$. In tal caso per ogni x, y in $\mathbb{V}$ vale l'identità di polarizzazione

$$p(x;y) = \frac{1}{4}\left(\left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2\right).$$

Dimostrazione. Per ogni x, y in $\mathbb{V}$ definiamo

$$p(x;y) \coloneqq \frac{1}{4}\left(\left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2\right)$$

e mostriamo che p è un prodotto scalare che induce la norma di $\mathbb{V}$. Ovviamente p è simmetrico e vale $p(x;x) = \left\|x\right\|^2$ per ogni x in $\mathbb{V}$. Pertanto, basta mostrare la linearità nel primo fattore.

Siano x, y, z in $\mathbb{V}$. Mostriamo che

$$p(x+y;2z) = 2p(x;z) + 2p(y;z).$$

Per l'identità del parallelogramma, vale che

$$2\left\|x+z\right\|^2 + 2\left\|y+z\right\|^2 = \left\|x+y+2z\right\|^2 + \left\|x-y\right\|^2,$$

$$2\left\|x-z\right\|^2 + 2\left\|y-z\right\|^2 = \left\|x+y-2z\right\|^2 + \left\|x-y\right\|^2.$$

Sottraendo, otteniamo che

$$\begin{aligned} p(x+y;2z) &= \frac{1}{4}\left(\left\|x+y+2z\right\|^2 - \left\|x+y-2z\right\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\left\|x+z\right\|^2 - 2\left\|x-z\right\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(2\left\|y+z\right\|^2 - 2\left\|y-z\right\|^2\right) \\ &= 2p(x;z) + 2p(y;z). \end{aligned}$$

Mostriamo che

$$p(x+y;z) = p(x;z) + p(y;z).$$

Per quanto mostrato, vale che

$$p(x+y;2z) = 2p(x+y;z) + 2p(0;z) = 2p(x+y;z).$$

Pertanto, si ha che

$$2p(x+y;z) = p(x+y;2z) = 2p(x;z) + 2p(y;z);$$

allora, basta dividere per 2.

Rimane da mostrare l'omogeneità nel primo fattore, cioè che per ogni x, y in $\mathbb{V}$ per ogni λ in $\mathbb{R}$ vale che

$$p(\lambda x; y) = \lambda p(x; y).$$

Per quanto provato, l'identità vale se $\lambda = 2$; pertanto, si estende per induzione a tutti i naturali. Osservando che $p(-x; y) = -p(x; y)$, l'identità si estende a tutti i numeri interi. Se $\lambda = \frac{a}{b}$ è un numero razionale (a, b in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$), vale che

$$bp(\frac{a}{b}x; y) = p(ax; y) = ap(x; y);$$

pertanto, l'identità cercata segue riordinando i termini. Per l'espressione di p, fissati x, y in $\mathbb{V}$, la funzione $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$p_1(\lambda) := p(x; \lambda y)$$

è continua; poichè coincide con $\lambda p(x; y)$ su $\mathbb{Q}$, si conclude che le due espressioni coincidono ovunque in $\mathbb{R}$. □

Lemma 3.1.7 (Continuità del prodotto scalare).
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare $< \cdot, \cdot >$; siano $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{V}$ convergenti a v e w rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare. Allora, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w_n >=< v, w > .$$

Dimostrazione. Per ogni n in $\mathbb{N}$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si trova che

$$\begin{aligned} |< v_n, w_n > - < v, w >| &\leq |< v_n, w_n > - < v_n, w >| + |< v_n, w > - < v, w >| \\ &= |< v_n, w_n - w >| + |< v_n - v, w >| \\ &\leq \|v_n\| \|w_n - w\| + \|w\| \|v_n - v\| . \end{aligned}$$

La tesi segue osservando che $\{\|v_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\|v\|$, pertanto è una successione limitata. □

Definizione 3.1.8 (Ortogonale).
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e K un sottoinsieme di $\mathbb{V}$. Definiamo il sottoinsieme ortogonale a K come

$$K^\perp := \{v \in \mathbb{V} \mid\ < v, x >= 0\ \forall x \in K\}.$$

Osservazione 3.1.9. Se K è un qualsiasi sottoinsieme di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ dotato di un prodotto scalare, allora $K^\perp$ è ovviamente un sottospazio vettoriale. Inoltre, per la continuità del prodotto scalare rispetto alla norma indotta, $K^\perp$ è anche un sottospazio chiuso.

Definizione 3.1.10 (Sistema ortonormale).
Siano $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e $\{v_i \mid i \in I\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{V}$. Diciamo che $\{v_i \mid i \in I\}$ è un sistema ortonormale se per ogni i, j in I vale che

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Diciamo che $\{v_i \mid i \in I\}$ è un sistema ortonormale massimale non esiste alcun sistema ortonormale che contiene strettamente K. Diciamo che $\{v_i \mid i \in I\}$ è un sistema ortonormale completo se $\mathrm{Span}(\{v_i \mid i \in I\})$ è denso in $\mathbb{V}$.

Osservazione 3.1.11. Se $\{v_i \mid i \in I\}$ è un sistema ortonormale completo, allora è massimale. Infatti, supponiamo che non sia massimale: esiste v in $\mathbb{V}$ tale che $\|v\| = 1$ e $< v, v_1 >= 0$ per ogni i in I. In particolare, v appartiene a $\mathrm{Span}(\{v_i \mid i \in I\})^{\perp}$. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathrm{Span}(\{v_i \mid i \in I\})^{\perp}$ che converge a v rispetto alla norma di x, per la continuità del prodotto scalare, si ha che

$$0 = \lim_{n\to+\infty} < x_n, v >=< v, v >= 1,$$

che è chiaramente assurdo.

Osservazione 3.1.12. Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale; per il lemma di Zorn è possibile completare qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{V}$ ad una base algebrica di $\mathbb{V}$.

Se $\mathbb{V}$ è dotato di un prodotto scalare e $\{v_1; \dots; v_n\}$ è un qualsiasi sistema di vettori linearmente indipendenti, possiamo ortonormalizzarli tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt. Inoltre, sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei sistemi ortonormali in $\mathbb{V}$ che contengono $\{v_1; \dots; v_n\}$ (dopo averli ortonormalizzati) parzialmente ordinato per inclusione. Dato J un sottoinsieme di $\mathcal{F}$ totalmente ordinato, è ovvio che l'unione di J è un sistema ortonormale che contiene $\{v_1; \dots; v_n\}$ e che limita J dall'alto. Pertanto, il lemma di Zorn garantisce l'esistenza di un elemento massimale in $\mathcal{F}$, che è proprio un sistema ortonormale massimale che contiene $\{v_1; \dots; v_n\}$.

3.2 Spazi di Hilbert

Definizione 3.2.1 (Spazio di Hilbert)**.**
Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Si dice che $\mathbb{V}$ è uno spazio di Hilbert se è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (vedi 3.1.3).

3.2.1 Proiezione su un convesso chiuso

Teorema 3.2.2 (Proiezione su un convesso chiuso)**.**
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e K un sottoinsieme di $\mathbb{H}$ convesso, chiuso e non vuoto. Sia x_0 in $\mathbb{H}$ un punto qualsiasi. Esiste

$$\min\{\|x_0 - y\| \ \mid y \in K\}$$

ed è realizzato da un unico punto che denotiamo con $P_K(x_0)$. Allora, è ben definita l'applicazione $P_K : \mathbb{H} \to K$ ed è 1-lipschitziana. Inoltre, $P_K(x_0)$ è l'unico punto di K tale che

$$< x_0 - P_K(x_0), y - P_K(x_0) >\leq 0$$

per ogni y in K.

Dimostrazione. **Esistenza**: Sia x_0 in $\mathbb{H}$ fissato. Poniamo

$$D^2 := \inf\{\|y - x_0\| \ \mid y \in K\}.$$

Sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in K tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_n - x_0\|^2 = D^2.$$

Mostriamo che $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy. Sia $\varepsilon > 0$; scegliamo n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $m \geq n_0$ vale che

$$\|y_n - x_0\| \leq D^2 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Osserviamo che, essendo K un convesso, per ogni n, m in $\mathbb{N}$ vale che $\frac{y_n+y_m}{2}$ è ancora un punto in K. Per la definizione di D^2, si ha che

$$\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x_0\right\|^2 \geq D^2.$$

Applicando l'identità del parallelogramma (vedi 3.1.5), se $n, m \geq n_0$, si trova che

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x_0\right\|^2 \\ &\leq 2D^2 + \frac{\varepsilon}{2} + 2D^2 + \frac{\varepsilon}{2} - 4D^2 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy; per la completezza di $\mathbb{H}$, esiste y_∞ in $\mathbb{H}$ tale che $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y_∞ rispetto alla norma di $\mathbb{H}$. Essendo K chiuso, si trova che y_∞ appartiene a K. Per continuità della norma, vale che

$$\|y_\infty - x_0\|^2 = D^2.$$

Unicità: Siano y_1, y_2 due punti di minimo in K. Applicando l'identità del parallelogramma come in precedenza, si trova che

$$\|y_2 - y_1\|^2 = 2\|y_2 - x_0\|^2 + 2\|y_1 - x_0\|^2 - 4\left\|\frac{y_2 + y_1}{2} - x_0\right\| \leq 2D^2 + 2D^2 - 4D^2 \leq 0.$$

Allora $y_1 = y_2 := P_K(x_0)$; in particolare, è ben definita la mappa $P_K : \mathbb{H} \to K$.

Caratterizzazione: Dato y in K, osserviamo che $ty + (1-t)P_K(x_0)$ appartiene a K per ogni t in $[0, 1]$ (infatti K è convesso). Per definizione, si ha che

$$\|x_0 - (ty + (1-t)P_K(x_0))\| \geq \|x_0 - P_K(x_0)\|$$

per ogni t in $[0, 1]$. Espandendo i termini e prendendo $t \neq 0$, si trova che

$$t\|y - P_K(x_0)\|^2 \geq 2 < x_0 - P_K(x_0), y - P_K(x_0) > .$$

Allora, prendendo il limite per t che tende a 0^+, si ottiene che

$$0 \geq < x_0 - P_K(x_0), y - P_K(x_0) >$$

per ogni y in K.

Unicità della caratterizzazione: Siano z_1, z_2 due punti in K tali che

$$< x_0 - z_1, y - z_1 > \leq 0$$

$$< x_0 - z_2, y - z_2 > \leq 0$$

per ogni y in K. Valutiamo la prima relazione in $y = z_2$ e la seconda in $y = z_1$; sottraendo le disuguaglianze ottenute, si conclude che

$$\|z_2 - z_1\| \leq 0,$$

quindi $z_1 = z_2$.

Lipschitzianità: Siano x_1, x_2 punti in $\mathbb{H}$. Abbiamo mostrato che per ogni y in K vale che

$$< x_1 - P_K(x_1), y - P_k(x_1) > \leq 0,$$
$$< x_2 - P_K(x_2), y - P_k(x_2) > \leq 0.$$

Valutiamo la prima relazione in $P_K(x_2)$ e la seconda in $P_K(x_1)$. Sommando le disuguaglianze, si trova

$$< x_1 - x_2 - (P_K(x_1) - P_K(x_2)), P_K(x_2) - P_K(x_1) > \leq 0,$$

che è equivalente a

$$\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\|^2 \leq < x_2 - x_1, P_K(x_2) - P_K(x_1) > .$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si trova che

$$\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\|^2 \leq \|x_2 - x_1\| \, \|P_K(x_2) - P_K(x_1)\| ,$$

che è equivalente alla tesi. □

Corollario 3.2.3 (Proiezione su un sottospazio chiuso).
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathbb{V}$ un sottospazio chiuso di $\mathbb{H}$. Sia $P_{\mathbb{V}} : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ la proiezione su $\mathbb{V}$ definita in 3.2.2. In aggiunta alle conclusioni del teorema 3.2.2, valgono i seguenti fatti:

- *per ogni x in $\mathbb{H}$, $P_{\mathbb{V}}(x)$ è l'unico vettore di $\mathbb{V}$ tale che $< x - P_{\mathbb{V}}(x), v >= 0$ per ogni v in $\mathbb{V}$;*
- *$P_{\mathbb{V}}$ è lineare;*
- *vale lo spezzamento in somma diretta*

$$\mathbb{H} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^{\perp}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{V}$ è un convesso chiuso, pertanto la mappa $P_{\mathbb{V}}$ è ben definita e gode delle proprietà enunciate in 3.2.2.

Step 1: Sia x in $\mathbb{H}$; in particolare, per ogni y in $\mathbb{V}$ vale che

$$< x - P_{\mathbb{V}}(x), y - P_{\mathbb{V}}(x) > \leq 0.$$

Allora, per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$< x - P_{\mathbb{V}}(x), (v + P_{\mathbb{V}}(x)) - P_{\mathbb{V}}(x) > \leq 0,$$
$$< x - P_{\mathbb{V}}(x), (-v + P_{\mathbb{V}}(x)) - P_{\mathbb{V}}(x) > \leq 0.$$

Segue che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che $< x - P_{\mathbb{V}}(x), v >= 0$. Dobbiamo mostrare che $P_{\mathbb{V}}(x)$ è l'unico vettore con questa proprietà. Sia z in $\mathbb{V}$ tale che per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che $< x - z, v >= 0$. Allora, per ogni y in $\mathbb{V}$ vale che

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|x-z+z-y\|^2 \\ &= \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 + 2 < x-z, z-y > \\ &= \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 \\ &\geq \|x-z\|^2 .\end{aligned}$$

Questo dimostra che z minimizza la distanza di x da $\mathbb{V}$; per il teorema 3.2.2, possiamo concludere che $z = P_{\mathbb{V}}(x)$.

Step 2: Siano x_1, x_2 in $\mathbb{H}$ e α, β in $\mathbb{R}$. Per la linearità del prodotto scalare, per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$< \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha P_{\mathbb{V}}(x_1) + \beta P_{\mathbb{V}}(x_2)), v >= 0.$$

Per la caratterizzazione data al punto precedente, concludiamo che

$$P_{\mathbb{V}}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P_{\mathbb{V}}(x_1) + \beta P_{\mathbb{V}}(x_2).$$

Step 3: Sia x in $\mathbb{H}$. Per quanto dimostrato in precedenza, vale che $x - P_{\mathbb{V}}(x)$ appartiene a $\mathbb{V}^\perp$. Pertanto, possiamo immediatamente scrivere $x = (x - P_{\mathbb{V}}(x)) + P_{\mathbb{V}}(x)$, che è la decomposizione di x in una parte su $\mathbb{V}^\perp$ e in una su $\mathbb{V}$. Inoltre, tale decomposizione è ovviamente unica perchè $\mathbb{V} \cap \mathbb{V}^\perp = \{0\}$ (come segue dal fatto che il prodotto scalare è definito positivo). □

3.2.2 Duale di uno spazio di Hilbert

Teorema 3.2.4 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.**
Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert; l'applicazione $J : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ tale che per ogni v in $\mathbb{H}$ $\mathcal{J}_v$ è il prodotto scalare per v, cioè

$$J_v(x) :=< v, x >,$$

è ben definita ed è un'isometria lineare bigettiva.

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni x, v in $\mathbb{H}$ vale che

$$|J_v(x)| = |< v, x >| \leq \|v\|_{\mathbb{H}} \|x\|_{\mathbb{H}} .$$

Pertanto l'applicazione lineare J è ben definita e inoltre vale che

$$\|J_v\|_{\mathbb{H}'} \leq \|v\|_{\mathbb{H}} .$$

Poichè per ogni v in $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ vale

$$\left| J_v \left(\frac{v}{\|v\|_{\mathbb{H}}} \right) \right| = \|v\|_{\mathbb{H}} ,$$

è chiaro che J è un'isometria lineare; in particolare, è un'applicazione iniettiva. Per concludere, basta mostrare la surgettività. Sia L un funzionale lineare continuo su $\mathbb{H}$; in particolare, $\mathrm{Ker}(L)$ è un sottospazio chiuso di $\mathbb{H}$. Per quanto mostrato in 3.2.3, è ben definito lo spezzamento in somma diretta ortogonale

$$\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Ker}(L)^\perp.$$

Se L è il funzionale nullo, allora $L = J_0$. Pertanto, possiamo supporre che $\mathrm{Ker}(L)$ sia un sottospazio proprio di $\mathbb{H}$. Osserviamo che la restrizione di L a $\mathrm{Ker}(L)^\perp$ è iniettiva, pertanto $\mathrm{Ker}(L)^\perp$ ha dimensione 1. Sia v_0 in $\mathbb{H}$ tale che

$$\mathrm{Ker}(L)^\perp = \mathrm{Span}(v_0).$$

Poniamo

$$v := \frac{L(v_0)}{\|v_0\|_{\mathbb{H}}^2}.$$

Mostriamo che $L = J_v$. Dato x in $\mathbb{H}$ esistono α in $\mathbb{R}$ e w in $\mathrm{Ker}(L)$ tali che

$$x = \alpha v + w.$$

Del resto, poiché w è in $\mathrm{Ker}(L)$, si trova

$$L(x) = \alpha L(v).$$

Allora, si ha che

$$J_v(x) =< v, x >=< v, \frac{L(x)}{L(v)} v + w >= \frac{L(x)}{L(v)} \|v\|^2 = L(x),$$

perché è facile mostrare che

$$\frac{L(v)}{\|v\|_{\mathbb{H}}^2} = 1.$$

□

Esempio 3.2.5. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e v_0 in $\mathbb{H}$ un vettore non nullo. Un funzionale allineato (vedi 1.1.6) a v_0 è definito da

$$f(v) := \frac{1}{\|v_0\|_{\mathbb{H}}} < v, v_0 >$$

per ogni v in $\mathbb{H}$. Il teorema 3.2.4 mostra anche che è l'unico funzionale lineare continuo tale che $f(v_0) = \|v_0\|_{\mathbb{H}}$.

Osservazione 3.2.6. Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{H}$ e v_∞ un vettore in $\mathbb{H}$. Per la definizione 1.1.18, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{H}$ a v_∞ se per ogni f in $\mathbb{H}'$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = f(v_\infty).$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, i funzionali lineari e continui su $\mathbb{H}$ sono tutti e soli i prodotti scalari per un vettore fissato di $\mathbb{H}$. Pertanto, possiamo equivalentemente dire che $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{H}$ a v_∞ se per ogni w in $\mathbb{H}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < w, v_n >=< w, v_\infty > .$$

Osservazione 3.2.7. Possiamo interpretare il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 3.2.4), in termini di riflessività. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $\mathbb{H}'$ il suo duale: $\mathbb{H}'$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare indotto da $\mathbb{H}$. Per la precisione, se

f, g sono funzionali in $\mathbb{H}'$, esistono (e sono unici) v, w in $\mathbb{H}$ tali che $f(x) =< v, x >$ e $g(x) =< w, x >$ per ogni x in $\mathbb{H}$; allora vale che

$$< f, g >_{\mathbb{H}'} =< v, w > .$$

Se L è una funzionale in $\mathbb{H}''$, esiste f in $\mathbb{H}'$ tale che per ogni g in $\mathbb{H}'$ vale che

$$L(g) =< f, g >_{\mathbb{H}'} .$$

Siano v, w_g in $\mathbb{H}$ tali che $f(x) =< v, x >$ e $g(x) =< w, x >$ per ogni x in $\mathbb{H}$; allora vale che

$$L(g) =< f, g >_{\mathbb{H}'} =< v, w_g >= g(v) = J_v(g).$$

Pertanto, $L = J_v$.

Osservazione 3.2.8. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Non è vero che ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente in $\mathbb{H}$. Infatti esiste una successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di vettori unitari a due a due ortogonali; tale successione non ammette sottosuccessioni di Cauchy, pertanto non ammette sottosuccessioni convergenti. Tuttavia, $\mathbb{H}$ è separabile e se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, esiste una sottosuccessione non rinominata che converge debolmente ad un elemento v_∞ in $\mathbb{H}$. Questo risultato è un corollario del teorema di Banach-Alaoglu (vedi 1.1.22). Infatti, consideriamo la famiglia di funzionali $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{H}'$ tali che $f_n(w) :=< v_n, w >$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha che

$$\|f_n\|_{\mathbb{H}'} \leq \|v_n\|_{\mathbb{H}} ;$$

pertanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $\mathbb{H}'$. Per il teorema di Banach-Alaoglu, a meno di sottosuccessioni (non rinominate), possiamo assumere che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga debole* a f_∞. Per il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 3.2.4), esiste v_∞ in $\mathbb{H}$ tale che $f_\infty(w) =< v_\infty, w >$ per ogni w in $\mathbb{H}$. Dunque, abbiamo che per ogni w in $\mathbb{H}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w >=< v_\infty, w >;$$

ovvero $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v_∞.

Proposizione 3.2.9. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che converge debolmente a v e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che converge fortemente a w. Allora vale che*

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w_n >=< v, w > .$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned} |< v_n, w_n > - < v, w >| &\leq |< v - v_n, w >| + |< v_n, w - w_n >| \\ &\leq |< v - v_n, w >| + \|v_n\| \, \|w - w_n\| . \end{aligned}$$

Concludiamo osservando che il primo addendo tende a 0 perchè $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v, il secondo addendo tende a 0 perchè $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in norma (vedi 1.3.14) e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w fortemente. □

Proposizione 3.2.10. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert, D un sottospazio denso in $\mathbb{H}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{H}$. Supponiamo che esista v in $\mathbb{H}$ tale che per ogni w in D vale che*

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w >=< v, w > .$$

Allora $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v.

Dimostrazione. Fissiamo un vettore w in $\mathbb{H}$ e mostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w > = < v, w > .$$

Sia M una costante positiva che limita la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in norma; fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia w_ε in D tale che

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon;$$

scegliamo n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$|< v_n, w_\varepsilon > - < v, w_\varepsilon >| \leq \varepsilon.$$

Allora, per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$\begin{aligned} |< v_n, w > - < v, w >| &\leq |< v_n, w > - < v_n, w_\varepsilon >| \\ &\quad + |< v_n, w_\varepsilon > - < v, w_\varepsilon >| \\ &\quad + |< v, w_\varepsilon > - < v, w >| \\ &\leq \|v_n\| \|w - w_\varepsilon\| + |< v_n - v, w_\varepsilon >| + \|v\| \|w - w_\varepsilon\| \\ &\leq \varepsilon(2M + 1). \end{aligned}$$

La tesi segue banalmente. □

3.2.3 Teoremi di semicontinuità inferiore

Lemma 3.2.11. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{H}$ che converge debolmente a v. Allora vale che*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|v_n\| \geq \|v\| .$$

Se vale che anche che

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n\| = \|v\| ,$$

allora $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v fortemente in $\mathbb{H}$.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned} \|v_n\|^2 &= \|v + (v_n - v)\|^2 \\ &= \|v_n\|^2 + \|v_n - v\|^2 + 2 < v, v_n - v > \\ &\geq \|v_n\|^2 + 2 < v, v_n - v > . \end{aligned}$$

Basta notare che il secondo addendo tende a 0 perchè $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v debolmente.

Assumiamo anche che

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n\| = \|v\| .$$

Allora vale che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|v_n - v\|^2 &= \lim_{n\to+\infty} \|v_n\|^2 + \|v\|^2 - 2 < v_n, v > \\ &= \|v\|^2 + \|v\|^2 - 2 < v, v > \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3.2.12. La semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole è stata dimostrata in un contesto più generale ed è una conseguenza del teorema di Hahn-Banach (vedi 1.1.21). Tuttavia, la dimostrazione data del lemma 3.2.11 è elementare e non richiede l'assioma di scelta.

Proposizione 3.2.13. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert, B un sottoinsieme convesso chiuso in $\mathbb{H}$ e x_0 un punto in $\mathbb{H} \setminus K$. Esistono w in $\mathbb{H}$ e due numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tali che per ogni b in B vale*

$$< w, b > \leq \delta_1 < \delta_2 = < w, x_0 > .$$

Dimostrazione. Essendo B un convesso chiuso, è ben definita la proiezione P_B (vedi 3.2.2). Poniamo $w \coloneqq x_0 - P_B(x_0)$; definiamo

$$\delta_2 \coloneqq < w, x_0 >$$

$$\delta_1 \coloneqq \delta_2 - \|x_0 - P_B(x_0)\|^2 .$$

Dato y in B, ricordando che $< x_0 - P_B(x_0), y - P_B(x_0) > \leq 0$ (vedi 3.2.2) vale che

$$\begin{aligned}
< w, y > &= < x_0 - P_B(x_0), y > \\
&= < x_0 - P_B(x_0), y - P_B(x_0) > + < x_0 - P_B(x_0), P_B(x_0) > \\
&\leq < x_0 - P_B(x_0), P_B(x_0) > \\
&= < x_0 - P_B(x_0), x_0 - P_B(x_0) > + < x_0 - P_B(x_0), x_0 > \\
&= \delta_1.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.2.14. L'enunciato 3.2.13 è già stato dimostrato in un contesto molto più generale (vedi 1.1.31); tuttavia, la dimostrazione data in questo caso non richiede l'assioma di scelta. In ogni caso, possiamo ottenere i seguenti risultati, già presentati in un contesto più generale.

Proposizione 3.2.15. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e K un sottoinsieme convesso e chiuso in $\mathbb{H}$. Allora K è debolmente chiuso, cioè se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in K che converge debolmente a v_∞, allora v_∞ appartiene a K.*

Dimostrazione. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in K che converge debolmente a v_∞; supponiamo che v_∞ non appartenga a K. Per la proposizione 3.2.13, esiste w in $\mathbb{H}$ ed esistono due numeri reali $\delta_2 > \delta_1$ tali che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale

$$< w, x_n > \leq \delta_1 < \delta_2 = < w, x_\infty > .$$

Tuttavia, questo è assurdo perchè

$$\lim_{n\to+\infty} < x_n, w > = < x_\infty, w > .$$

□

Proposizione 3.2.16. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $f : \mathbb{H} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Allora f è debolmente semicontinua inferiormente.*

Dimostrazione. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{H}$ che converge debolmente a x_∞. Dobbiamo mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty).$$

Se il limite inferiore è $+\infty$, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo che il limite inferiore sia finito e che, a meno di sottosuccessioni non rinominate, sia un limite, cioè che

$$\liminf_{n\to+\infty} f(v_n) = M = \lim_{n\to+\infty} f(v_n),$$

e che valga $f(v_n) \leq M+1$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartiene al sottolivello

$$f_\varepsilon := \{x \in \mathbb{H} \mid f(x) \leq M + \varepsilon\}$$

che è chiuso e convesso per le proprietà di f. Per la proposizione 3.2.15, troviamo che f_ε è chiuso debolmente; dunque v_∞ appartiene ad f_ε per ogni $\varepsilon > 0$. Concludiamo che $f(v_\infty) \leq M$. □

3.2.4 Risolubilità quantitativa

Proposizione 3.2.17. *Siano $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ spazi di Hilbert separabili e sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ un'applicazione lineare e surgettiva. Esiste un'applicazione $s : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tale che $f(s(y)) = y$ per ogni y in $\mathbb{Y}$; inoltre s è lineare e continua.*

Dimostrazione. Sia $K := \mathrm{Ker} f$; per ipotesi K è un sottospazio chiuso; pertanto, è ben definito lo spezzamento in somma diretta ortogonale

$$\mathbb{V} = K \oplus K^\perp.$$

Osserviamo che la restrizione di f a $K^\perp$ è lineare, continua e bigettiva su $\mathbb{W}$. Del resto, $K^\perp$ è un sottospazio chiuso, pertanto è uno spazio di Hilbert. Per il corollario 1.3.25, la mappa $f^{-1}_{|K^\perp} : \mathbb{W} \to K^\perp$ è lineare e continua. Del resto, ponendo $s := f^{-1}_{|K^\perp}$, si ha la tesi. □

Osservazione 3.2.18. Siano $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ spazi vettoriali; sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ lineare e surgettiva. Utilizzando l'assioma di scelta, si mostra che esiste una mappa lineare $s : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tale che per ogni w in $\mathbb{W}$ vale che $f(s(w)) = w$.

Se $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sono anche spazi di Banach e f è aperta, abbiamo mostrato (vedi 1.3.21) che esiste una mappa $s : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tale che per ogni w in $\mathbb{W}$ vale che $f(s(w)) = w$ ed esiste $M > 0$ tale che $\|s(w)\|_\mathbb{V} \leq M \|w\|_\mathbb{W}$. Tuttavia, non ci sono garanzie sulla linearità di s.

Se $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ sono spazi di Hilbert e f è lineare, continua e surgettiva, abbiamo mostrato che esiste $s : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ lineare e continua tale che $f(s(w)) = w$ per ogni w in $\mathbb{W}$ (vedi 3.2.17). Tuttavia, questo risultato non è vero se $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sono spazi di Banach: infatti, non è detto che esista un sottospazio chiuso in somma diretta con $\mathrm{Ker} f$, detto supplementare topologico di $\mathrm{Ker} f$. Se tale sottospazio esistesse, la stessa dimostrazione funzionerebbe anche nel contesto di spazi di Banach.

3.3 Spazi di Hilbert separabili

Teorema 3.3.1. *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert. $\mathbb{H}$ è separabile se e solo se ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile. In tal caso, diremo che un sistema ortonormale completo è una base di Hilbert di $\mathbb{H}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{F} := \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo; allora $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{F})$ è ovviamente un sottoinsieme numerabile e denso in $\mathbb{H}$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbb{H}$ sia separabile e sia $D := \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme numerabile denso. Possiamo supporre che $v_i \neq 0$ per ogni i in $\mathbb{N}$ e che $\mathbb{H}$ abbia dimensione infinita (altrimenti, la conclusione è banale); inoltre, con il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, possiamo costruire ricorsivamente una successione di vettori unitari $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che per ogni j in $\mathbb{N}$ vale che

$$\mathrm{Span}(b_1; \ldots ; d_j) = \mathrm{Span}(d_1; \ldots ; d_{n_j})$$

per un certo n_j e tali sottospazi hanno dimensione j. Questo basta a concludere che $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale completo di $\mathbb{H}$. $\square$

Osservazione 3.3.2. Vale la pena notare che il teorema 3.3.1 è una conseguenza del teorema 3.1.12; tuttavia, la dimostrazione data in questo caso non richiede l'assioma di scelta.

Lemma 3.3.3. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Per ogni n in $\mathbb{N}$, poniamo*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,$$

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Vale che $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge come serie di vettori in $\mathbb{H}$ se e solo se $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge come serie di numeri reali.

Dimostrazione. Essendo $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale, per ogni $n > m$ vale che

$$\begin{aligned}\|S_n - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \\ &= \left| \tilde{S}_n - \tilde{S}_m \right|.\end{aligned}$$

Pertanto, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{H}$ se e solo se $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Si conclude osservando che $\mathbb{H}$ ed $\mathbb{R}$ sono entrambi spazi metrici completi. $\square$

Osservazione 3.3.4. Siano $\mathbb{V}$ uno spazio di Banach e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ poniamo

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|.$$

Se $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge come successione di numeri reali, allora $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge come successione di vettori in $\mathbb{V}$. Dunque, a differenza del lemma 3.3.3, vale soltanto una implicazione.

Siano $n > m$ due interi positivi. Allora vale che

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|v_k\| = \tilde{S}_n - \tilde{S}_n.$$

Essendo $\{\tilde{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{V}$; per completezza, è convergente.

Lemma 3.3.5 (Identità di Parseval)**.**
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

Allora il vettore

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

è ben definito in $\mathbb{H}$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $a_n =< e_n, v >$. Inoltre vale l'identità di Parseval, ovvero

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Dimostrazione. Per il lemma 3.3.3, il vettore v è ben definito in $\mathbb{H}$. Sia n in $\mathbb{N}$; per la continuità del prodotto scalare (vedi 3.1.7), vale che

$$< v, e_n >= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_n >= a_n < e_n, e_n >= a_n.$$

Per continuità della norma, vale che

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

$\square$

Lemma 3.3.6. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $E := \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo. Sia v in $\mathbb{H}$ tale che $< v, e_n >= 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$; allora $v = 0$.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi deduciamo che v appartiene a $E^{\perp}$; per la linearità e la continuità del prodotto scalare (vedi 3.1.7), si ha che v appartiene a $(\overline{\mathrm{Span}(E)})^{\perp}$. Essendo E un sistema ortonormale completo, deduciamo che v è ortogonale a se stesso; allora deve essere $v = 0$. □

Teorema 3.3.7. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $E := \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo. Sia x in $\mathbb{H}$; per ogni k in $\mathbb{N}$, poniamo $x_k :=< x, e_k >$. Allora vale che*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n,$$

nel senso che la serie converge in $\mathbb{H}$; si ha che

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Se y è un altro vettore in $\mathbb{H}$ e poniamo $y_n :=< y, e_n >$ per ogni n in $\mathbb{N}$, allora

$$< x, y >= \sum_{n^1}^{\infty} x_n y_n.$$

Dimostrazione. Sia n in $\mathbb{N}$. Se poniamo

$$r_n := x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

vale ovviamente che

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n + r_n.$$

Osserviamo che per ogni k in $\{1; \ldots; n\}$ vale che

$$< r_n, e_k >=< x, e_k > -x_k = 0.$$

Pertanto, si ha che

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots x_n^2 + \|r_n\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Questo mostra che

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

Questa relazione è anche nota come disuguaglianza di Bessel. Per il lemma 3.3.3, il vettore

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

è ben definito in $\mathbb{H}$. Per la continuità del prodotto scalare (vedi 3.1.7), per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$< x - v, e_n >=< x, e_n > - < v, e_n >= x_n - x_n = 0.$$

Per il lemma 3.3.6, concludiamo che $x = v$. Da questo segue banalmente che

$$\|x\|^2 = \|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Infine, se y è un altro vettore in $\mathbb{H}$, osserviamo che per la continuità del prodotto scalare (vedi 3.1.7) si conclude che

$$< x, y >=< \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

□

Esempio 3.3.8. Sia dato $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu)$ uno spazio misurabile dotato di una misura μ. Ricordiamo che $L^2(\mathbb{X})$ è uno spazio metrico completo con la norma

$$\|f\|_2 \coloneqq \sqrt{\int_{\mathbb{X}} f^2 \, d\mu}.$$

Tale norma deriva da un prodotto scalare, ovvero

$$< f, g >\coloneqq \int_{\mathbb{X}} f \cdot g \, d\mu.$$

Pertanto, $L^2(\mathbb{X})$ è uno spazio di Hilbert. Se $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ e μ è la misura che conta i punti, lo spazio $L^2(\mathbb{X})$ è chiamato ℓ^2 ed è formato dalle successioni quadrato sommabili. ℓ^2 è uno spazio metrico completo e, date f, g in ℓ^2 vale che

$$< f, g >= \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)g(n).$$

Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile ed $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{H}$. Consideriamo la mappa $\Psi : \mathbb{H} \to \ell^2$ tale che

$$\Psi(v) \coloneqq \{< v, e_n >\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Il teorema 3.3.7 dice che Ψ è un'isometria lineare e bigettiva tra $\mathbb{H}$ ed ℓ^2.

Esempio 3.3.9. Sia c la cardinalità del continuo e $\mathbb{X}$ un insieme di cardinalità 2^c; sia μ la misura su $\mathbb{X}$ che conta i punti. $L^2(\mathbb{X})$ è uno spazio di Hilbert non separabile: infatti l'insieme delle indicatrici dei punti è ben definito in $L^2(\mathbb{X})$ ed ha cardinalità 2^c. Tuttavia, ogni spazio metrico separabile ha al più cardinalità c.

Esempio 3.3.10. Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo. La successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy, perchè se $n \neq m$ vale che

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2.$$

Per la completezza di $\mathbb{H}$ non può ammettere sottosuccessioni convergenti. Tuttavia, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{H}$ a 0. Infatti, per ogni w in $\mathbb{H}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < w, e_n >= 0,$$

essendo la successione $\{< w, e_n >\}_{n\in\mathbb{N}}$ di quadrato sommabile.

La successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mostra anche che in generale se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v e $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a w, non è detto che

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, w_n >=< v, w >,$$

come nella proposizione 3.2.9. Infatti, vale che

$$1 = \lim_{n\to+\infty} < e_n, e_n > \neq < 0, 0 >= 0.$$

Osserviamo che la proposizione 3.2.10 è falsa se rimuoviamo l'ipotesi che la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata in norma. Basta considerare $\{ne_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ovviamente, per ogni v in $\mathrm{Span}(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < ne_n, v >= 0;$$

tuttavia, la successione non converge debolmente a 0. Poniamo

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n.$$

Per il lemma 3.3.3, w è ben definito in $\mathbb{H}$. Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} < ne_n, w >= \lim_{n\to+\infty} < ne_n, \frac{1}{n} e_n >= 1 \neq 0 =< 0, w > .$$

Osservazione 3.3.11. Siano $\mathbb{H}$ è uno spazio di Hilbert separabile ed $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo. Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{H}$ che converge debolmente a v_∞. Allora per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} < v_n, e_k >=< v_\infty, e_k > .$$

In altri termini, negli spazi di Hilbert separabili, la convergenza debole implica la convergenza delle componenti. Se $\mathbb{H}$ ha dimensione finita, questo è equivalente alla convergenza in norma.

3.4 Operatori compatti in spazi di Hilbert

Esempio 3.4.1. Siano $\mathbb{H} = L^2((0,1))$ e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ tale che per ogni f in $\mathbb{H}$ per ogni x in $(0,1)$ vale che

$$[A(f)](x) := \int_0^x f(s)\ ds.$$

A è l'operatore primitiva ed è chiaramente lineare; mostriamo che è compatto. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $\mathbb{H}$. Osserviamo che per ogni x, y in $(0,1)$, con $x < y$, vale che

$$|[A(f)](x) - A(f)(y)| \leq \int_x^y |f(s)|\ ds \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} \|f_n\|_{L^2} .$$

Dunque, la successione $\{A(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è formata da funzioni $\frac{1}{2}$-hölderiane con costanti equilimitate; pertanto, tali funzioni sono equicontinue. Ovviamente, $[A(f_n)](0) = 0$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione che converge ad una funzione f uniformemente in $[0,1]$. In particolare, la convergenza è in L^2. L'esempio è abbastanza esplicativo del fatto che un operatore compatto ha un effetto "regolarizzante" sugli elementi dello spazio su cui è definito.

Teorema 3.4.2 (Approssimazione lineare di un operatore compatto)**.**
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio normato, $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{H}$ un operatore compatto. Denotiamo con

$$\mathbb{H}_n \coloneqq \mathrm{Span}(e_1; \ldots ; e_n)$$

e con $P_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_n$ la proiezione. Definiamo $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{H}_n$ l'operatore tale che

$$f_n(x) \coloneqq P_n(f(x)).$$

Allora la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad f uniformemente in ogni insieme limitato di $\mathbb{X}$. Inoltre, vale che

- *se f è lineare, anche f_n è lineare per ogni n in $\mathbb{N}$;*
- *se f è continua, anche f_n è continua per ogni n in $\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Dati un numero positivo ε e un insieme limitato A in $\mathbb{X}$, bisogna mostrare che esiste n_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ vale che

$$\sup\{\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{H}} \mid x \in A\} \leq \varepsilon.$$

Per ipotesi su f, l'insieme $f(A)$ è relativamente compatto in $\mathbb{H}$; come osservato nella dimostrazione della proposizione 1.2.4, esistono dei punti $\{y_1; \ldots ; y_k\}$ in $\mathbb{H}$ tali che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}\left(y_i; \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Essendo $\mathrm{Span}(\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ denso in $\mathbb{H}$, esistono $\{z_1; \ldots ; z_k\}$ in $\mathrm{Span}(\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ tali che per ogni i in $\{1; \ldots ; k\}$ vale che z_i è in $\mathcal{B}\left(y_i; \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Per la disuguaglianza triangolare, abbiamo che

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}(z_i; \varepsilon).$$

Essendo i punti $\{z_1; \ldots ; z_k\}$ combinazioni lineari finite di elementi della base, esiste n_0 in $\mathbb{N}$ tale che z_i appartiene ad $\mathbb{H}_{n_0}$ per ogni i in $\{1; \ldots ; k\}$. Se $n \geq n_0$, allora concludiamo che per ogni x in A esiste i in $\{1; \ldots ; k\}$ tale che $f(x)$ è $\mathcal{B}(z_i; \varepsilon)$.

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathbb{H}} = \|P_n(f(x)) - f(x)\|_{\mathbb{H}} \leq \mathrm{dist}(f(x); \mathbb{H}_n) \leq \mathrm{dist}(f(x); \mathbb{H}_{n_0}) \leq \varepsilon.$$

Essendo P_n lineare e continua per ogni n in $\mathbb{N}$, le ultime due conclusioni sono ovvie. □

Esempio 3.4.3. Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale ed $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un'applicazione lineare continua tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un numero reale λ_n tale che

$$f(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Dall'ipotesi di continuità segue immediatamente che la successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Se y è un vettore in $\mathbb{H}$ tale che

$$y = \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i e_i,$$

per continuità vale che

$$f(y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i y_i e_i.$$

Allora, f è compatta se e solo se la successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Supponiamo che f sia compatta: essendo la successione $\{e_n\}_{n\in N}$ limitata in norma, la successione $\{f(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ deve avere una sottosuccessione convergente. Tuttavia, vale che

$$\|f(e_n) - f(e_m)\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 .$$

Pertanto, $\{f(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ può ammettere una sottosuccessione di Cauchy soltanto se $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Viceversa, supponiamo che la successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia infinitesima. Per ogni n in $\mathbb{N}$ poniamo $\mathbb{H}_n \coloneqq \mathrm{Span}(e_n; \ldots ; e_n)$ e $P_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_n$ la proiezione di $\mathbb{H}$ su $\mathbb{H}_n$, ovvero se

$$y = \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i e_i,$$

allora vale che

$$P_n(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Poniamo $f_n : \mathbb{H} \to \mathbb{H}_n$ tale che $f_n \coloneqq P_n \circ f$. Essendo la successione infinitesima, per ogni n in $\mathbb{N}$ possiamo ben definire

$$j(n) \coloneqq \min\{i > n \mid |\lambda_i| = \max\{t > n \mid |\lambda_t|\}\} .$$

Sia M un numero reale positivo. Per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni y in $\mathbb{H}$ tale che $\|y\| \le M$ vale che

$$\begin{aligned}
\|f_n(y) - f(y)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i e_i - \sum_{i\in\mathbb{N}} y_i \lambda_i e_i \right\|^2 \\
&= \sum_{i>n} |\lambda_i y_i|^2 \\
&\le \left|\lambda_{j(n)}\right|^2 \sum_{i>n} |y_i|^2 \\
&\le \left|\lambda_{j(n)}\right|^2 M.
\end{aligned}$$

Essendo la successione $\{|\lambda_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima, abbiamo provato che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sugli insiemi limitati di $\mathbb{H}$. Del resto, è ovvio che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di operatori compatti, essendo le proiezioni finito-dimensionali di f. Pertanto f è un operatore compatto per il teorema 3.4.2.

Definizione 3.4.4 (Operatore simmetrico)**.**
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore lineare. Si dice che A è un operatore simmetrico se per ogni x, y in $\mathbb{H}$ vale che

$$< Ax, y >=< x, Ay > .$$

Proposizione 3.4.5. *Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore lineare, compatto e simmetrico. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{H}$ che converge debolmente a x_∞ in $\mathbb{H}$, allora $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad Ax_∞ rispetto alla norma di $\mathbb{H}$.*

Dimostrazione. Per la linearità di A, si può assumere che $x_\infty = 0$. Per ogni v in $\mathbb{H}$, dalla convergenza debole e dall'ipotesi di simmetria, si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} < Ax_n, v >= \lim_{n\to+\infty} < x_n, Av >= 0.$$

Essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata (vedi 1.3.14), a meno di sottosuccessioni, non rinominate, si può supporre che esiste y_∞ in $\mathbb{H}$ tale che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad y_∞ rispetto alla norma di $\mathbb{H}$. Per continuità dei prodotti scalari, si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} < Ax_n, v >=< y_\infty, v > .$$

In particolare, abbiamo mostrato che $< y_\infty, v >= 0$ per ogni v in $\mathbb{H}$. Da ciò segue che y_∞ è il vettore nullo. □

3.4.1 Teoria spettrale per operatori compatti

Definizione 3.4.6 (Quoziente di Rayleigh)**.**
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore. Definiamo il quozione di Rayleigh associato all'operatore A come l'operatore $q : \mathbb{H} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$q(x) := \frac{< Ax, x >}{\|x\|^2}.$$

Proposizione 3.4.7 (Caratterizzazione variazionale degli autovalori)**.**
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore compatto, lineare e simmetrico. Sia $\mathbb{V}$ un sottospazio di $\mathbb{H}$ chiuso e A-invariante. Denotiamo con q il quoziente di Rayleigh associato ad A (vedi 3.4.6). Valgono i seguenti fatti:

- *i seguenti massimi sono ben definiti e coincidono:*
  1. $\max\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}\}$;
  2. $\max\{|< Ax, x >| \mid x \in \mathbb{V} \setminus \{0\},\ \|x\| = 1\}$;
  3. $\max\{|< Ax, x >| \mid x \in \mathbb{V} \setminus \{0\},\ \|x\| \le 1\}$;
- *il massimo di q su $\mathbb{V} \setminus \{0\}$ è un autovalore di A;*
- *i punti di massimo di q su $\mathbb{V} \setminus \{0\}$ sono autovettori per A relativi al massimo di q.*

Dimostrazione. **Step 1**: Essendo q radiale, vale banalmente che

$$\begin{aligned}\sup\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}\} &= \sup\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V},\ \|x\| = 1\}\\ &= \sup\{|< Ax, x >| \mid x \in \mathbb{V},\ \|x\| = 1\}\\ &\le \sup\{|< Ax, x >| \mid x \in \mathbb{V},\ \|x\| \le 1\}.\end{aligned}$$

Possiamo mostrare che anche nell'ultimo caso vale il segno di uguaglianza. Infatti, se x è un vettore in $\mathbb{V} \setminus \{0\}$ tale che $\|x\| < 1$ e tale che $< Ax, x >\neq 0$, ponendo $y := \frac{x}{\|x\|}$ si trova che

$$|< Ay, y >| = \left|\frac{< Ax, x >}{\|x\|^2}\right| > |< Ax, x >| .$$

Avendo mostrato che gli estremi superiori suddetti coincidono, basta provare che

$$\alpha \coloneqq \sup\{|< Ax, x >| \mid x \in \mathbb{V},\ \|x\| \leq 1\}$$

è un massimo. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{V}$ tale che $\|x_n\| \leq 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. Essendo le palle chiuse debolmente compatte, a meno di sottosuccessioni non rinominate, esiste un vettore x_∞ in $\mathbb{H}$ tale che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{H}$ ad x_∞. Essendo $\mathbb{V}$ chiuso rispetto alla norma di $\mathbb{H}$ e convesso, allora è chiuso per convergenza debole (vedi 1.1.33); inoltre la norma debolmente semicontinua inferiormente (vedi 1.1.21). Pertanto, vale che x_∞ appartiene a $\mathbb{V}$ e $\|x_\infty\| \leq 1$. Per la proposizione 3.4.5, vale che $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad Ax_∞ rispetto alla norma di $\mathbb{H}$. Per quanto mostrato in 3.2.9, vale che

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} < Ax_n, x_n >=< Ax_\infty, x_\infty > .$$

Step 2: Sia x_0 un punto di massimo per $|q|$ in $\mathbb{V}\setminus\{0\}$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che x_0 sia un punto di massimo di q in $\mathbb{V}\setminus\{0\}$. Allora, per ogni v in $\mathbb{V}$, la funzione $\varphi(t) \coloneqq q(x_0 + tv)$ è ben definita per t in un intorno di 0. Vale che

$$\varphi(t) = \frac{< Ax_0, x_0 > +2t < Ax_0, v > +t^2 < Av, v >}{\|x_0\|^2 + 2t < x_0, v > +t^2\|v\|^2}.$$

Essendo derivabile in t e avendo un punto estremale in 0, deve valere $\varphi'(0) = 0$; con facili conti, si trova che per ogni v in $\mathbb{V}\setminus\{0\}$ vale che

$$0 = \varphi'(0) =< Ax_0 - \frac{< Ax_0, x_0 >}{\|x_0\|^2}x_0, v >;$$

in altri termini, $Ax_0 - \frac{<Ax_0,x_0>}{\|x_0\|^2}x_0$ è un vettore in $\mathbb{V}^\perp$. Essendo $\mathbb{V}$ un sottospazio A-invariante, si trova che $< Ax_0, v > -\frac{<Ax_0,x_0>}{\|x_0\|^2}x_0$ è un vettore in A. Questo basta a concludere che

$$Ax_0 - \frac{< Ax_0, x_0 >}{\|x_0\|^2}x_0 = 0.$$

In particolare, il massimo di $|q|$ in $\mathbb{V}\setminus\{0\}$ è un autalore di A e un autovettore corrispondente è un punto di massimo di $|q|$ in $\mathbb{V}\setminus\{0\}$. □

Osservazione 3.4.8. Dalla proposizione 3.4.7 non segue che q ammette massimo e minimo in $\mathbb{H}\setminus\{0\}$.

Osservazione 3.4.9. Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore simmetrico. Se v, w sono autovettori per A relativi a due autovalori distinti, rispettivamente λ e μ, allora sono ortogonali:

$$\lambda < v, w >=< Av, w >=< v, Aw >= \mu < v, w >,$$

da cui segue che $< v, w >= 0$. Inoltre, se $\mathbb{V}$ è un sottospazio A-invariante, anche $\mathbb{V}^\perp$ è A-invariante.

Teorema 3.4.10 (Teorema spettrale per operatori compatti).
Siano $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ un operatore compatto, lineare e simmetrico. Allora valgono i seguenti fatti:

- *esiste una base di Hilbert di $\mathbb{H}$ formata da autovettori per A;*
- *tutti gli autospazi hanno dimensione finita, tranne al più il nucleo di A;*
- *l'insieme degli autovalori di A è limitato e ammette eventualmente 0 come unico punto di accumulazione.*

Dimostrazione. **Step 1**: Nelle nostre ipotesi, A è un operatore continuo (vedi 1.2.3). Pertanto, $\ker A$ è un sottospazio chiuso; essendo $\mathbb{H}$ uno spazio metrico separabile, anche $\ker A$ è separabile, pertanto ammette una base ortonormale al più numerabile. Poichè $\ker A$ è A-invariante, anche $(\ker A)^{\perp}$ è A-invariante; del resto, è un sottospazio chiuso, quindi è ancora uno spazio di Hilbert separabile. Se mostriamo che $(\ker A)^{\perp}$ ammette una base ortogonale di autovettori, allora basta giustapporre questa base e una qualsiasi base ortogonale di $\ker A$ per costruire una base di Hilbert di $\mathbb{H}$ formata da autovettori di A. In altri termini, possiamo supporre che $\ker A = \{0\}$, ovvero che A sia iniettivo.

Step 2: La dimostrazione consiste nel costruire per ricorsione una successione di sottospazi di dimensione finita che invadono $\mathbb{H}$. Poniamo $\mathbb{V}_1 \coloneqq \mathbb{H}$; per la caratterizzazione variazionale degli autovalori (vedi 3.4.7), A ammette un autovalore λ_1 in $\mathbb{V}_1$ non nullo per iniettività. Inoltre λ_1 massimizza il modulo del quoziente di Rayleigh in $\mathbb{V}_1 \setminus \{0\}$. Sia x_1 un autovettore unitario relativo a λ_1. Supponiamo di aver definito gli autovalori $\{\lambda_1; \ldots; \lambda_k\}$ ordinati in maniera decrescente (in valore assoluto) e i corrispondenti autovettori unitati $\{x_1; \ldots; x_k\}$ in modo che siano a due a due ortogonali. Poniamo

$$\mathbb{V}_{k+1} \coloneqq \mathrm{Span}(x_1; \ldots; x_k)^{\perp}.$$

Se $\mathbb{V}_{k+1} = \{0\}$, il teorema è completamente dimostrato. Altrimenti, assumiamo che sia $\mathbb{V}_{k+1} \neq \{0\}$. Essendo $\mathbb{V}_{k+1}$ un sottospazio A-invariante (vedi 3.4.9) e chiuso, per la proposizione 3.4.7 esiste un autovalore λ_{k+1} e un autovettore corrispondente x_{k+1} in $\mathbb{V}_{k+1}$ per A. Per iniettività, vale che $\lambda_{k+1} \neq 0$; per la proposizione 3.4.7, vale che $|\lambda_{k+1}| \leq |\lambda_k|$. Inoltre, possiamo assumere che x_{k+1} sia un vettore unitario. Per costruzione, è ortogonale a x_i per ogni i in $\{1; \ldots; k\}$.

Step 3: Questi argomenti sono sufficienti per affermare che esiste una famiglia al più numerabile di autovettori unitari a due a due ortogonali $\{x_i\}_{i \in I}$ i cui autovalori corrispondenti $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ sono ordinati in una successione mai nulla e decrescente in modulo. Osserviamo che se l'insieme I è finito, il teorema è completamente dimostrato; quindi, possiamo assumere che coincida con $\mathbb{N}$. Dobbiamo provare che la successione $\{|\lambda_k|\}_{k \in \mathbb{N}}$ è infinitesima. Supponiamo che esista un numero reale positivo ν tale che $|\lambda_k| \geq \nu$ per ogni k in $\mathbb{N}$. La successione $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è limitata; essendo A un operatore compatto, la successione $\{Av_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione di Cauchy. Tuttavia, per ortogonalità, se $k \neq h$ vale che

$$\|Av_k - Av_h\|^2 = \|\lambda_k v_k - \lambda_h v_h\|^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_h|^2 \geq 2\nu^2.$$

Questo è assurdo.

Step 4: Bisogna, infine, dimostrare che la famiglia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base di Hilbert di $\mathbb{H}$, in particolare che genera un sottospazio denso. Sia

$$\mathbb{V}_{\infty} \coloneqq \mathrm{Span}(\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\})^{\perp}.$$

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{V}_{\infty} \neq \{0\}$; essendo un sottospazio chiuso e A-invariante, per la proposizione 3.4.7, è ben definito il massimo del modulo di q in $\mathbb{V}_{\infty} \setminus \{0\}$; inoltre $\mathbb{V}_{\infty} \subseteq \mathbb{V}_k$ per ogni k in $\mathbb{N}$, allora vale

$$\max\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V}_{\infty} \setminus \{0\}\} \leq \max\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V}_k \setminus \{0\}\} = |\lambda_k|.$$

Poichè la successione $\{|\lambda_k|\}_{k\in\mathbb{N}}$ è infinitesima, vale che

$$\max\{|q(x)| \mid x \in \mathbb{V}_\infty \setminus \{0\}\} = 0;$$

in altri termini, $\mathbb{V}_\infty = \ker A = \{0\}$; tuttavia, questo è assurdo. Essendo $\mathbb{V}_\infty = \{0\}$, possiamo concludere che la famiglia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base di Hilbert di $\mathbb{H}$. □

Esempio 3.4.11. Siano $\mathbb{H} = L^2((0,1))$ e $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'operatore definito da

$$[Af](x) = xf(x)$$

per ogni f in $L^2((0,1))$ per ogni x in $(0,1)$. Si mostra facilmente che A è lineare, simmetrico e 1-lipschitziano; tuttavia, non ammette autovettori non banali. Infatti, se esistono λ in $\mathbb{R}$ e f in $L^2((0,1))$ tali che $xf(x) = \lambda f(x)$ per quasi ogni x in $(0,1)$, allora f è nulla in quasi ovunque in $(0,1)$. Del resto, l'operatore A non è compatto perchè possiamo trovare una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in norma L^2 tale che $\{Af_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni di Cauchy. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una qualsiasi successione strettamente decrescente in $(0,1)$ che converge a $\frac{1}{2}$. Sia

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{x_{n+1} - x_n}} \mathbb{1}_{[x_n, x_{n+1}]}.$$

Ovviamente $\|f_n\|_{L^2} = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ e gli elementi della successione sono a due a due ortogonali. Dunque, se $n \neq m$ si trova che

$$\|Af_n - Af_m\|_{L^2}^2 = \|Af_n\|_{L^2}^2 + \|Af_m\|_{L^2}^2 = \int_{x_{n+1}}^{x_n} x^2 f_n(x)^2 \; dx + \int_{x_{m+1}}^{x_m} x^2 f_m(x)^2 \; dx \geq \frac{1}{2}.$$

Capitolo 4

Spazi di Sobolev

4.1 Definizioni

4.1.1 Formalismo W

Definizione 4.1.1 (Derivata W-debole)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Siano u e v funzioni in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si dice che v è la derivata W-debole di u di ordine α se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)\ dx. \tag{4.1}$$

Osservazione 4.1.2. Nella definizione 4.1.1, la richiesta che le funzioni u, v siano in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e che le funzioni test siano limitate a supporto compatto in Ω è quella minima affinché gli integrali scritti abbiano senso.

Osservazione 4.1.3. La derivata W-debole, se esiste, è unica. Infatti, se u è una funzione in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che ammette derivate deboli v_1 e v_2 di ordine α in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega v_1(x)\varphi(x)\ dx = \int_\Omega v_2(x)\varphi(x)\ dx;$$

allora, si trova che

$$\int_\Omega (v_1(x) - v_2(x))\varphi(x)\ dx = 0$$

per ogni φ in $C_c^\infty(\Omega)$. Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (vedi 4.1.6), si conclude che $v_1 = v_2$ quasi ovunque. Denoteremo la derivata W debole di ordine α di u con

$$v = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} = D^\alpha u.$$

Osservazione 4.1.4. Come nella definizione di derivata W-debole (vedi 4.1.1), dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^d$, u, v in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e un vettore non nullo η in $\mathbb{R}^d$, diciamo che v è la derivata direzionale di u nella direzione η se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\ dx = -\int_\Omega \varphi v\ dx.$$

In tal caso, denotiamo
$$v = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$
Come mostrato in 4.1.3, se esiste una funzione v con la proprietà di derivata direzionale di u, allora v è unica. Supponiamo inoltre che u ammetta tutte le derivate parziali W-deboli di ordine 1 (vedi 4.1.1). Allora, per ogni η in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ esiste la derivata direzionale di u lungo η e vale la formula

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} =< \nabla u, \eta > .$$

Infatti, per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \, dx &= \int_\Omega u < \nabla \varphi, \eta > \, dx \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \eta_i u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \\
&= -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \eta_i \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \\
&= -\int_\Omega \varphi < \nabla u, \eta > \, dx.
\end{aligned}$$

Lemma 4.1.5 (Compatibilità con il caso classico)**.**
Siano α un multi-indice in $\mathbb{N}^d$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che u sia una funzione di classe $C^{|\alpha|}(\Omega)$; allora u ammette derivata W-debole di ordine α e questa coincide con la sua derivata classica di ordine α.

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha = (1; 0 \dots ; 0)$. La dimostrazione per induzione su $|\alpha|$. Sia φ una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$. Osserviamo che la funzione $u\varphi$ può essere estesa ad una funzione su tutto $\mathbb{R}^d$ avente supporto coincidente con quello di φ e la stessa regolarità di u. Essendo φ una funzione $C_c^\infty(\Omega)$, per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale la formula di Leibniz

$$\frac{\partial u\varphi}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\varphi(x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)u(x),$$

avendo esteso $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ in maniera arbitraria fuori da Ω. Integrando ambi in membri si ottiene che
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u\varphi}{\partial x_1} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} u \, dx.$$
Sia $M > 0$ tale che il supporto di $u\varphi$ è contenuto in $[-M, M] \times \mathbb{R}^{d-1}$; allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u\varphi}{\partial x_1} \, dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx_2 \dots dx_d \int_{-M}^{M} \frac{\partial u\varphi}{\partial x_1} \, dx_1 = 0.$$

Infine, basta osservare che

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} u \, dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi \, dx + \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} u \, dx.$$

□

Lemma 4.1.6 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni)**.**
Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e f una funzione in $L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx = 0$$

per ogni φ in $C^\infty_c(\Omega)$. Allora $f(x) = 0$ per quasi ogni x in Ω.

Dimostrazione. Per ogni k in $\mathbb{N}$ consideriamo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \operatorname{dist}(x; \partial\Omega) > \frac{1}{2^k},\ |x| < 2^k \right\}.$$

Osserviamo che $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un'esaustione in compatti di Ω e che per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che Ω_k è relativamente compatto in Ω_{k+1}. Pertanto è sufficiente mostrare che per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che $f(x) = 0$ per quasi ogni x in Ω_k. Sia k in $\mathbb{N}$ fissato; siano $f_k := f\mathbb{1}_{\Omega_k}$ e ρ un mollificatore (vedi 2.2.1). Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo ρ_ε come in 2.2.2. Sia $\varepsilon < 2^{-k+1}$. Per le proprietà del prodotto di convoluzione (vedi 2.2.3), vale che $\operatorname{sgn}(f_k) * \rho_\varepsilon$ è una successione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le seguenti proprietà:

- è supportata nell'insieme
$$\Omega_k + \mathcal{B}(0; 2^{-(k+1)}) \subseteq \Omega_{k+1},$$
pertanto $\{\operatorname{sgn}(f_k) * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,2^{-(k+1)})}$ è contenuta in $C^\infty_c(\Omega_{k+2})$;
- converge puntualmente a $\operatorname{sgn}(f_k)$ per quasi ogni x in Ω_k per ε che tende a 0;
- $\|\operatorname{sgn}(f_k) * \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_k)} \leq \|\operatorname{sgn}(f_k)\|_{L^\infty(\Omega_k)}$ per ogni ε in $(0, 2^{-(k+1)})$.

Essendo f_k una funzione in $L^1(\Omega_k)$, per il teorema di convergenza dominata, si trova che

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_k} f_k(x)[\operatorname{sgn}(f_k) * \rho_\varepsilon](x)\ dx = \int_{\Omega_k} \operatorname{sgn}(f_k(x)) f_k(x)\ dx = \int_{\Omega_k} |f_k(x)|\ dx.$$

Pertanto, $f_k(x) = 0$ per quasi ogni x in Ω_k. □

Lemma 4.1.7 (Du Bois-Reymond)**.**
Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^d$, n un intero positivo e f una funzione in $L^1_{loc}(\Omega)$ tale che per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| = n$ vale che

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha x}\varphi(x)\ dx = 0$$

per ogni φ in $C^\infty_c(\Omega)$. In altri termini, f è una funzione avente tutte le derivate W-deboli di ordine n nulle. Allora f coincide con un polinomio di grado al più $n-1$ per quasi ogni x in Ω.

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di palle che ricopre Ω. Supponiamo che per ogni k in $\mathbb{N}$ esiste un polinomio p_k di grado al più $n-1$ tale che f coincide con p_k per quasi ogni x in Ω_k. Vogliamo mostrare i polinomi p_k sono tutti coincidenti. A meno di modificare f in un insieme di misura nulla in Ω_1, possiamo supporre che $f(x) = p_1(x)$ per ogni x in Ω_1. Fissiamo k in $\mathbb{N}$ e sia x_k il centro di Ω_k. Essendo Ω

un aperto connesso, è anche connesso per archi; sia $\alpha_k : [0,1] \to \Omega$ un cammino che connette x_1 e x_k. Per compattezza, esiste un numero finito di palle $\{\Omega_{j_1}; \dots ; \Omega_{j_k}\}$ la cui unione ricopre l'immagine di α_k; inoltre, possiamo assumere che $\Omega_{j_i} \cap \Omega_{j_{i+1}} \neq \emptyset$ per ogni i in $\{1; \dots ; k-1\}$ e che $\Omega_{j_1} = \Omega_1$ e $\Omega_{j_k} = \Omega_k$. Dal momento che $\Omega_1 \cap \Omega_{j_2}$ è un aperto di misura positiva, p_1 e p_{j_2} coincidono su un insieme di misura positiva; in particolare, due polinomi di grado al più $n-1$ che coincidono in (almeno) n punti hanno tutti i coefficienti uguali. Allora deduciamo che $p_1 = p_{j_2}$ in $\Omega_1 \cup \Omega_{j_2}$; dunque, a meno di modificare f su un insieme di misura nulla di Ω_{j_1}, si può assumere che f coincide con p_1 in $\Omega_1 \cup \Omega_{j_2}$. Iterando questo ragionamento, si mostra che i polinomi $\{p_{j_1}; \dots ; p_{j_k}\}$ sono tutti coincidenti; in particolare p_1 e p_k coincidono. Essendo k arbitrario, si conclude che f coincide quasi ovunque in Ω con il polinomio p_1.

Step 2: Per quanto mostrato, possiamo supporre che Ω sia una palla di centro x_0 e raggio $r > 0$. Si osserva banalmente che la palla possiede un'esaustione in compatti connessi (questo motiva le argomentazioni del primo step): basta considerare per ogni k in $\mathbb{N}$ la palla

$$\Omega_k := \mathcal{B}(x_0; r - 2^{-k}).$$

Se mostriamo che f coincide con un polinomio p_k di grado al più $n-1$ per quasi ogni x in Ω_k, concludiamo come nel primo step che p_k è indipendente da k e, quindi, otteniamo la tesi.

Sia ρ un mollificatore (vedi 2.2.1); per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo ρ_ε come in 2.2.3. Fissiamo k in $\mathbb{N}$ e poniamo $f_k := f\mathbb{1}_{\Omega_k}$. Sia $\varepsilon < 2^{-(k+1)}$. Per le proprietà del prodotto di convoluzione (vedi 2.2.3), $\{f_k * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ è una successione di funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le seguenti proprietà:

- è supportata nell'insieme
$$\Omega_k + \mathcal{B}(0; 2^{-(k+1)}) \subseteq \Omega_{k+1},$$
pertanto $\{f_k * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0, 2^{-(k+1)})}$ è contenuta in $C_c^\infty(\Omega_{k+2})$;
- converge puntualmente a f_k per quasi ogni x in Ω_k per ε che tende a 0.

Sia φ una funzione di classe $C_c^\infty(\Omega_k)$. Osserviamo che $\varphi * \rho_\varepsilon$ è ancora una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$ per ogni ε in $(0, 2^{-(k+1)})$. Utilizzando l'ipotesi e le proprietà del prodotto di convoluzione (vedi 2.2.3), per ogni multi-indice α di cardinalità n vale che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega f(x) \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha x} [\varphi * \rho_\varepsilon](x) \right) dx \\ &= \int_\Omega f(x) \left[\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \varphi \right) * \rho_\varepsilon \right] (x)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \varphi(x) \right) [f * \rho_\varepsilon] (x)\, dx. \end{aligned}$$

Essendo $f * \rho_\varepsilon$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, possiamo integrare per parti e otteniamo che

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \varphi(x) \right) [f * \rho_\varepsilon] (x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} [f * \rho_\varepsilon](x) \right) \varphi(x)\, dx.$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (vedi 4.1.6), deduciamo che

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} [f * \rho_\varepsilon](x) = 0$$

per ogni multi-indice α di cardinalità n e per ogni x in Ω_k (infatti è una funzione continua). Essendo Ω connesso, $f * \rho_\varepsilon$ è un polinomio di grado al più $n-1$. Dal momento che $f * \rho_\varepsilon$ converge a f per quasi ogni x in Ω_k, concludiamo che anche f coincide quasi ovunque in Ω_k con un polinomio p_k di grado al più $n-1$ (infatti una successione di polinomi di grado al più $n-1$ che converge puntualmente in almeno n punti distinti ha come limite puntuale un polinomio di grado al più $n-1$). $\square$

Lemma 4.1.8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $L^1_{loc}(\Omega)$, u, v in $L^1_{loc}(\Omega)$ e α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che*

- *v_n sia la derivata W-debole di u_n di ordine α per ogni n in $\mathbb{N}$;*
- *per ogni sottoinsieme Ω' aperto relativamente compatto in Ω vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u debolmente in $L^1(\Omega')$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v in $L^1(\Omega')$.*

Allora u ammette derivata W-debole di ordine α e questa coincide con v.

Dimostrazione. Sia φ una funzione $C^\infty_c(\Omega)$. Sia Ω' un aperto relativamente compatto in Ω contenente il supporto di φ. Per definizione di convergenza debole il $L^1(\Omega')$ e di derivata W-debole vale che

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha}\,dx &= \int_{\Omega'} u\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha}\,dx\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega'} u_n D^\alpha\varphi\,dx\\ &= \lim_{n\to+\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega'} v_n\varphi\,dx\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega'} v\varphi\,dx\\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v\varphi\,dx.\end{aligned}$$

$\square$

Proposizione 4.1.9 (Inversione dell'ordine di derivazione)**.**
Siano Ω in $\mathbb{R}^d$ un aperto, u, v funzioni in $L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1;\ldots;\alpha_d)$ in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che v sia la derivata W-debole di u. Sia σ una permutazione di $\{1;\ldots;d\}$; poniamo

$$\sigma(\alpha) := (\alpha_{\sigma(1)};\ldots;\alpha_{\sigma(d)}).$$

Allora, u ammette derivata di ordine $\sigma(\alpha)$ e questa coincide con v.

Dimostrazione. Sia φ una funzione test in $C^\infty_c(\Omega)$. Per il teorema di Schwarz, vale che

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\sigma(\alpha)|}\varphi}{\partial x^{\sigma(\alpha)}};$$

dalla definizione 4.1.1, è chiaro che v è la derivata W-debole di u di ordine $\sigma(\alpha)$. $\square$

Esempio 4.1.10. L'esistenza di una derivata W-debole di ordine $|\alpha|$ non implica l'esistenza delle derivate W-deboli di ordine inferiore. Consideriamo la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} u(x;y) := -1 & \text{se } x > 0,\ y > 0,\\ u(x;y) := 0 & \text{se } xy \le 0,\\ u(x;y) := 1 & \text{se } x < 0,\ y < 0.\end{cases}$$

Se φ è una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, si trova facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \, dxdy = 0,$$

ovvero la derivata W-debole di ordine $(1;1)$ di u è la funzione identicamente nulla. Tuttavia, possiamo verificare che la derivata W-debole di ordine $(0;1)$ di u non esiste. Data una funzione φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, si trova facilmente che

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x;0) dx.$$

Supponiamo che esista una funzione v in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi v \, dxdy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x;0) dx$$

per ogni funzione φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ sia φ_n una funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ con le seguenti proprietà:

- $\varphi_n(x;0) = 1$ per ogni x in $[-1,1]$;
- l'immagine di φ_n è $[0,1]$;
- il supporto di φ_n è contenuto in $[-2,2] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Per il teorema di convergenza dominata, è immediato osservare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n v \, dxdy = 0;$$

del resto, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x;0) \, dx \geq \int_{-1}^{1} \, dx = 2.$$

L'assurdo segue banalmente.

Definizione 4.1.11 (Spazi di Solobev - definizione W)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ e p in $[1, +\infty]$. Si indica con $W^{m,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni u in $L^p(\Omega)$ che ammettono tutte le derivate W-deboli di ordine minore o uguale a m in $L^p(\Omega)$.

Osservazione 4.1.12. Ovviamente, se u_1 e u_2 ammettono derivate deboli v_1 e v_2 di ordine α e a, b sono numeri reali, allora $au_1 + bu_2$ ammette derivata debole di ordine α che coincide con $av_1 + bv_2$. In altri termini, $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Osservazione 4.1.13. Se Ω' è un aperto contenuto in un aperto Ω (eventualmente coincidente con Ω), $m \geq 1$ è un intero, p è in $[1, +\infty]$, α in $\mathbb{N}^d$ è un multi-indice tale che $|\alpha| < m$ e u è una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$ allora $D^\alpha u$ appartiene $W^{m-|\alpha|,p}(\Omega')$ e per ogni multi-indice β tale che $|\beta| \leq m - |\alpha|$ vale che

$$D^\beta(D^\alpha u) = D^{\beta+\alpha} u.$$

4.1.2 Formalismo H

Definizione 4.1.14 (Derivata H-debole)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice, u, v funzioni in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si dice che v è la derivata H-debole di u di ordine α se esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ tale che per ogni aperto Ω' a chiusura compatta in Ω vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^1(\Omega')$ e $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v in $L^1(\Omega')$.

Osservazione 4.1.15. Siano Ω una aperto di $\mathbb{R}^d$ e α un intero in $\mathbb{N}^d$. Se u è una funzione in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che ammette derivata H-debole v di ordine α (vedi 4.1.14), allora u e v coincidono quasi ovunque con delle funzioni continue su Ω.

Definizione 4.1.16 (Spazi di Sobolev - definizione H)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ e p in $[1, +\infty]$. Si indica con $H^{m,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni u in $L^p(\Omega)$ per le quali esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$;
- per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ vale che $\{D^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite in $L^p(\Omega)$.

Osservazione 4.1.17. Nella definizione 4.1.16, la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale da approssimare tutte le derivate H-deboli di u. Dunque, questa richiesta è più forte della sola esistenza delle derivate H-deboli.

Osservazione 4.1.18. Nel contesto della definizione 4.1.16, data una funzione u in $C^\infty(\Omega)$, definiamo

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definiamo l'insieme

$$C^{m,p}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{m,p,\Omega} < +\infty\}.$$

La funzione $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ è ovviamente una norma sull'insieme $C^{m,p}(\Omega)$. Per la definizione 4.1.16, lo spazio $H^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Osservazione 4.1.19. Denoteremo con $D^m u : \Omega \to R^{d^m}$ il vettore avente tutte le derivate H-deboli di ordine m; se $m = 1$ denoteremo

$$D^1 u := \nabla u.$$

Se $p < +\infty$, porremo

$$\|D^m u\|_{L^p(\Omega)} := \left\| |D^m u|_p^p \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

dove $|v|_p$ è la norma p-esima di una vettore in $\mathbb{R}^d$. Se $p = +\infty$, porremo

$$\|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)} := \left\| \max_{|\alpha|=m} \{|D^\alpha u|\} \right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ovviamente, per ogni p in $[1, +\infty]$ valgono le disuguaglianze

$$\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposizione 4.1.20 (H $\subseteq$ W)**.**
Siano Ω in $\mathbb{R}^d$ un aperto, u, v funzioni in $L^1_{loc}(\Omega)$ e α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che v sia la derivata H-debole di u di ordine α; allora, v è anche la derivata W-debole di u di ordine α. In altri termini, per ogni intero $m \geq 1$ per ogni p in $[1, +\infty]$ vale la seguente inclusione

$$H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Presa $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $C^\infty(\Omega)$ come nella definizione 4.1.14, la dimostrazione è un'immediata conseguenza dei lemmi 4.1.5 e 4.1.8. $\square$

4.2 Il caso speciale di $W^{1,p}((a,b))$

Studiamo il caso speciale in cui Ω è un intervallo (a, b) in $\mathbb{R}$, eventualmente illimitato, limitandoci al primo ordine di derivazione. Mostreremo dei risultati di approssimazione e di regolarità delle funzioni di Sobolev. Nel seguito, mostreremo come sia possibile ottenere risultati analoghi nel caso generale.

Esempio 4.2.1. Siano (a, b) un intervallo in $\mathbb{R}$ eventualmente illimitato e $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 a tratti. Per la precisione, supponiamo che u sia continua in $[a, b]$ e che esista una partizione finita $a \coloneqq t_0 < t_1 \cdots < t_n < t_{n+1} \coloneqq b$ tale che u è di classe $C^1([t_i, t_{i+1}])$ per ogni i in $\{0; \dots ; n\}$. Allora la derivata debole in senso W di u esiste e coincide quasi ovunque con la derivata in senso classico di u (che è definita ovunque tranne che in un numero finito di punti di (a, b)). Infatti, sia data una funzione test φ in $C^\infty_c((a, b))$. Utilizzando la formula di integrazione per parti in ogni sottointervallo della partizione e il fatto che u è continua, troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)\varphi'(x)\ dx &= \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(x)\varphi'(x)\ dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left[u(t_{i+1})\varphi(t_{i+1}) - u(t_i)\varphi(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(x)\varphi(x)\ dx \right] \\
&= u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u'(x)\varphi(x)\ dx \\
&= -\int_a^b u'(x)\varphi(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Esempio 4.2.2. Sia $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$H(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Tale funzione non ammette derivata debole in senso W. Supponiamo che esista v in $L^1_{\text{loc}}((-1, 1))$ tale che

$$\int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x)\ dx = -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)\ dx$$

per ogni φ in $C^\infty_c((-1, 1))$. In particolare, data φ in $C^\infty_c((-1, 1))$, avremmo che

$$\int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)\ dx = \int_0^1 \varphi'(x)\ dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0).$$

Sia $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni in $C^\infty_c((-1, 1))$ con le seguenti proprietà:

- per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $(-1,1)$ vale che $\varphi_n(x)$ appartiene a $[0,1]$;
- per ogni n in $\mathbb{N}$ abbiamo che φ_n è supportata in $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$;
- per ogni n in $\mathbb{N}$ abbiamo che $\varphi_n(0) = 1$.

Allora, per il teorema di convergenza dominata, abbiamo che

$$-1 = \lim_{n\to+\infty} -\varphi_n(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} v(x)\varphi_n(x)\ dx = 0,$$

che è assurdo.

Lemma 4.2.3. *Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$, eventualmente illimitato, e u una funzione in $L^1_{loc}((a,b))$. Supponiamo che u ammetta derivata debole v in senso W (vedi 4.1.11) di classe $C^0((a,b))$. Allora u è di classe $C^1((a,b))$ e v è la derivata di u in senso classico.*

Dimostrazione. Sia x_0 un punto fissato in (a,b) e definiamo

$$V(x) := \int_{x_0}^{x} v(t)\ dt.$$

Essendo v continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, vale che V è di classe $C^1((a,b))$. Sia φ una funzione test di classe $C^\infty_c((a,b))$; allora, dalla definizione di derivata W-debole (vedi 4.1.11) e dalla formula di integrazione per parti per funzioni di classe C^1, si deduce che

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\ dx = -\int_a^b v(x)\varphi(x)\ dx = \int_a^b V(x)\varphi'(x)\ dx;$$

in altri termini, otteniamo che

$$\int_a^b (V(x) - u(x))\varphi'(x)\ dx = 0$$

per ogni φ in $C^\infty_c((a,b))$. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), concludiamo che $V - u$ coincide quasi ovunque con una funzione costante; pertanto, u coincide quasi ovunque con una funzione di classe $C^1((a,b))$. □

Lemma 4.2.4. *Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato), u una funzione in $L^1_{loc}((a,b))$ e v la sua derivata debole in senso W (vedi 4.1.11) appartenente ad $L^1_{loc}((a,b))$. Sia x_0 un punto in (a,b) e definiamo la funzione $V : (a,b) \to \mathbb{R}$ tale che*

$$V(x) := \int_{x_0}^{x} v(t)\ dt.$$

V è una funzione continua ed esiste una costante c in $\mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = V(x) + c$$

per quasi ogni c in (a,b).

Dimostrazione. Essendo v in $L^1_{\text{loc}}((a,b))$, la funzione V è ben definita ed è continua per il teorema di convergenza dominata. Sia φ una funzione in $C_c^\infty((a,b))$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b V(x)\varphi'(x)\ dx &= \int_a^b \varphi'(x) \left(\int_{x_0}^x v(t)\ dt \right)\ dx \\
&= -\int_a^{x_0} \left(\int_a^t \varphi'(x)v(t)\ dx \right)\ dt + \int_{x_0}^b \left(\int_t^b \varphi'(x)v(t)\ dx \right)\ dt \\
&= -\int_a^{x_0} v(t)\varphi(t)\ dt - \int_{x_0}^b v(t)\varphi(t)\ dt \\
&= -\int_a^b v(t)\varphi(t)\ dt \\
&= \int_a^b u(t)\varphi'(t)\ dt.
\end{aligned}
$$

Dunque, vale che

$$\int_a^b [V(x) - u(x)]\varphi'(x)\ dx = 0$$

per ogni funzione test φ in $C_c^\infty((a,b))$. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), possiamo concludere che esiste una costante c in $\mathbb{R}$ tale che per quasi ogni x in (a,b) vale $V(x) = u(x) + c$. □

Osservazione 4.2.5. In altri termini, il lemma 4.2.4 mostra che una funzione derivabile debolmente in senso W (vedi 4.1.1) è una primitiva della sua derivata debole.

Teorema 4.2.6 (H=W in dimensione 1)**.**
Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, p in $[1,+\infty)$ ($+\infty$ è escluso) e u una funzione in $W^{1,p}((a,b))$. Esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty((a,b))$ tale che

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p((a,b))$;*
- *$\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Du in $L^p((a,b))$.*

In particolare, gli spazi $H^{1,p}((a,b))$ e $W^{1,p}((a,b))$ coincidono.

Dimostrazione. Per densità, esiste una successione di funzioni $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty((a,b))$ che converge a Du in $L^p((a,b))$. Fissiamo x_0 in (a,b); per ogni n in $\mathbb{N}$ definiamo

$$V_n(x) := \int_{x_0}^x v_n(t)\ dt;$$

inoltre, sia

$$V(x) := \int_{x_0}^x Du(t)\ dt.$$

Osserviamo che $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a V in L^p; infatti, vale che

$$\begin{aligned}\int_a^b |V_n(x) - V(x)|^p \, dx &= \int_a^b \left(\left|\int_{x_0}^x v_n(t) - Du(t) \, dt\right|\right)^p \, dx \\ &\leq \int_a^b \left(\left|\int_{x_0}^x |v_n(t) - Du(t)| \, dt\right|\right)^p \, dx \\ &= \int_a^b \|v_n - Du\|^p_{L^1((x_0,x))} \, dx \\ &\leq (b-a) \|v_n - Du\|^p_{L^1((a,b))} \,;\end{aligned}$$

essendo (a,b) limitato, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Du anche in L^1. Per il lemma 4.2.4, esiste una costante c tale che $u(x) = V(x) + c$; se poniamo $u_n := V_n - c$, abbiamo che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p((a,b))$. □

Teorema 4.2.7 (Regolarità delle funzioni in $W^{1,p}((a,b))$)**.**
Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato), p un esponente in $[1,+\infty]$, u una funzione in $W^{1,p}((a,b))$ e Du la sua derivata debole.

- *Se $p = +\infty$, u coincide quasi ovunque con una funzione lipschitziana e vale che*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{L^\infty((a,b))} |x - y| \,;$$

- *se p è in $(1,+\infty)$, detto p' l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5), u coincide quasi ovunque con una funzione $\frac{1}{p'}$-hölderiana che denotiamo ancora con u e vale la disuguaglianza*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^p((a,b))} |x - y|^{\frac{1}{p'}}$$

  ed esiste una costante $c(a,b,p)$ dipende soltanto dal dominio (a,b) e da p tale che

$$\|u\|_{L^\infty((a,b))} \leq c(a,b,p) \|u\|_{1,p,(a,b)} \,;$$

- *se $p = 1$ esiste una costante $c(a,b)$ tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} c(a,b) \leq \|u\|_{1,1,(a,b)} \,.$$

Inoltre, sono ben definiti i valori

$$u(a) := \lim_{x\to a^+} u(x),$$

$$u(b) := \lim_{x\to b^-} u(x).$$

Dimostrazione. Supponiamo $p = +\infty$; per il lemma 4.2.4, per ogni x, y in (a,b) (diciamo $x < y$) vale che

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(t)| \, dt \leq \|u\|_{L^\infty((a,b))} |x - y| \,.$$

Supponiamo p in $(1,+\infty)$ e sia p' l'esponente coniugato (vedi 2.1.5). Per il lemma 4.2.4, per ogni x, y in (a,b) (diciamo $x < y$) vale che

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'(t)| \, dt \leq \|u'\|_{L^p((a,b))} |x - y|^{\frac{1}{p'}} \,,$$

per la disuguaglianza di Hölder. In ogni caso, abbiamo provato che u è una funzione uniformemente continua; quindi, se (a,b) è limitato, u si estende con continuità ad $[a,b]$; se $a=-\infty$ deve valere
$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=0,$$
(intendendo che il limite esiste) perchè u è in $L^p((a,b))$ con $p<+\infty$. Se $b=+\infty$ è analogo.

Supponiamo $p=1$. Assumiamo che (a,b) sia un intervallo limitato. Esiste un punto x_0 in (a,b) tale che
$$|u(x_0)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(t)|\ dt.$$
Per il lemma 4.2.4, possiamo assumere che per ogni x in (a,b) vale
$$u(x)=u(x_0)+\int_{x_0}^x u'(t)\ dt.$$
Essendo u' in $L^1((a,b))$, per il teorema di convergenza dominata esiste
$$l^+ := \lim_{x\to b^+} u(x)=u(x_0)+\int_{x_0}^b u'(t)\ dt.$$
Analogamente esiste
$$l^- := \lim_{x\to a^-} u(x)=u(x_0)-\int_a^{x_0} u'(t)\ dt.$$
Deduciamo inoltre che per ogni x in $[a,b]$ vale che
$$|u(x)|\le |u(x_0)|+\int_a^b |u'(t)|\ dt \le c(a,b)\left\|u\right\|_{1,1,(a,b)}.$$
Se (a,b) è illimitato, possiamo supporre che coincida con $\mathbb{R}$; in tal caso , per il lemma 4.2.4, per ogni x in $\mathbb{R}$ vale che
$$u(x)=u(0)+\int_0^x u'(t)\ dt.$$
Come in precedenza, possiamo ben definire l^+ e l^-; essendo u in $L^1(\mathbb{R})$, deve valere $l^+=l^-=0$. Allora, per ogni x in $\mathbb{R}$ vale che
$$u(x)=\int_{-\infty}^x u'(t)\ dt,$$
da cui segue che
$$\left\|u\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \left\|u'\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$
□

Corollario 4.2.8. *Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato), p in $(1,+\infty)$ e (c,d) un intervallo limitato in (a,b). Siano u una funzione in $W^{1,p}((a,b))$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $C^\infty((a,b))$ tale che*

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p((a,b))$,*

- $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* Du *in* $L^p((a,b))$.

Esiste una sottosuccessione, non rinominata, tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad* u *uniformemente in* $[c,d]$.

Dimostrazione. Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$,e p in $(1,d)$ e p^* l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2). Supponiamo che Ω sia connesso, limitato e regolare (vedi 4.4.9). Per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ poniamo nte M tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste x_n in $[c,d]$ per cui vale che $|u_n(x_n)| \leq M$; essendo $[c,d]$ limitato, è facile mostrare che per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[c,d]$ vale che

$$|u_n(x)| \leq M + \|u_n'\|_{L^p((a,b))}(d-c)^{\frac{1}{p'}},$$

dove p' è l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). □

Proposizione 4.2.9. *Siano* (a,b) *un intervallo in* $\mathbb{R}$, p *in* $(1,+\infty)$, (c,d) *un intervallo limitato in* (a,b) *e* u,v *funzioni in* $W^{1,p}((a,b))$. *Allora vale la formula*

$$\int_c^d u(x)v'(x)\ dx = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d u'(x)v(x)\ dx.$$

Dimostrazione. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $C^\infty((a,b))$ tali che

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u il $L^p((c,d))$ e uniformemente in $[c,d]$ (non restrittivo per il lemma 4.2.8);
- $\{u_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Du in $L^p((c,d))$;
- $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v il $L^p((a,b))$ e uniformemente in $[c,d]$ (non restrittivo per il lemma 4.5.6);
- $\{v_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Dv in $L^p((a,b))$.

Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_c^d u_n(x)v_n'(x)\ dx = u_n(d)v_n(d) - u_n(c)v_n(c) - \int_c^d u_n'(x)v_n(x)\ dx.$$

Per le ipotesi di convergenza, la tesi segue passando al limite per n che tende a $+\infty$. □

4.3 Teoremi di approssimazione

4.3.1 Approssimazioni in aperti a chiusura compatta

Lemma 4.3.1. *Siano* B *un aperto di* $\mathbb{R}^d$, A *un aperto a chiusura compatta in* B, u *una funzione in* $L^1(B)$ *e* α *in* $\mathbb{N}^d$ *un multi-indice. Supponiamo che* $D^\alpha u$ *sia la derivata W-debole di* u *di ordine* α. *Sia* ρ *un mollificatore e per ogni* ε *in* $(0,\delta)$ *sia* u_ε *come nella definizione 2.2.2. Supponiamo* $B \neq \mathbb{R}^d$; *sia*

$$\delta := \min\{\operatorname{dist}(a;\partial B) \mid a \in A\}.$$

Allora, per ogni ε *in* $(0,\delta)$ *per ogni* x *in* A *vale che*

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Se, invece, $B = \mathbb{R}^d$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *per ogni* x *in* $\mathbb{R}^d$ *vale che*

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Dimostrazione. Supponiamo $B \neq \mathbb{R}^d$; in tal caso, osserviamo che δ è ben definito ed è strettamente positivo, essendo A relativamente compatto in B. Inoltre, se ε è in $(0, \delta)$, vale che $A + \mathcal{B}(0; \varepsilon)$ è contenuto in B ed è relativamente compatto in B; pertanto, per ogni x in A per ogni y in $\mathcal{B}(0; \varepsilon)$, è ben definito $u(x + y)$. Come osservato in 2.2.3, se estendiamo u a 0 fuori da B, per ogni x in A vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y) D^\alpha \rho_\varepsilon(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y) \frac{1}{\varepsilon^{d+|\alpha|}} D^\alpha \rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\ dy.$$

Ponendo $z \coloneqq x - y$, troviamo che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(z) \frac{1}{\varepsilon^{d+|\alpha|}} D^\alpha \rho\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\ dz.$$

Se poniamo

$$\varphi_x(z) \coloneqq \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right),$$

è immediato osservare che

$$D^\alpha \varphi_x(z) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{d+|\alpha|}} D^\alpha \rho\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right).$$

Allora, vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} u(z) D^\alpha \varphi_x(z)\ dz = (-1)^{|\alpha|} \int_B u(z) D^\alpha \varphi_x(z)\ dz.$$

Per definizione di δ, φ_x è una funzione $C_c^\infty(B)$; dal momento che u ammette derivata debole in senso W in B, vale che

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= (-1)^{|\alpha|} \int_B u(z) D^\alpha \varphi_x(z)\ dz \\ &= \int_B D^\alpha u(z) \varphi_x(z)\ dz \\ &= \int_B D^\alpha u(z) \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\ dz \\ &= \int_B D^\alpha u(x-y) \rho_\varepsilon(y)\ dy \\ &= D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Se, invece, $B = \mathbb{R}^d$ la dimostrazione data si adatta facilmente, risultando semplificata. □

Teorema 4.3.2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice, p in $[1, +\infty)$ ($+\infty$ è escluso). Siano u una funzione in $L^p_{loc}(\Omega)$ con derivata W-debole $D^\alpha u$ in $L^p_{loc}(\Omega)$. Allora esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ tale che per ogni aperto Ω' a chiusura compatta in Ω vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega')$ e $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$. Inoltre, se u ammette derivata W-debole di ordine β (con β un multi-indice in $\mathbb{N}^d$) in $L^p_{loc}(\Omega)$, allora per ogni aperto Ω' a chiusura compatta in Ω la successione $\{D^\beta u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\beta u$ in $L^p(\Omega')$; in altri termini, la costruzione della successione approssimante è indipendente dall'ordine di derivazione.*

Dimostrazione. Supponiamo $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. La dimostrazione nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^d$ è una semplificazione di quella proposta.

Step 1: Fissiamo un aperto A a chiusura compatta in Ω. Per ogni x in $\overline{A}$ esiste un raggio $\delta_x > 0$ tale che $\overline{\mathcal{B}(x;\delta_x)}$ è relativamente compatto in Ω. Essendo $\overline{A}$ compatto in Ω, esistono finiti punti $\{x_1; \dots; x_j\}$ in $\overline{A}$ tali che

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(x_i; \delta_{x_i}).$$

Se definiamo

$$B \coloneqq \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{B}(x_i; \delta_{x_i}),$$

è immediato verificare che B è un aperto che contiene A relativamente compatto in Ω. Per le ipotesi su u e $D^\alpha u$, queste funzioni sono entrambe in $L^p(B)$. Supponiamo $\Omega \neq \mathbb{R}^d$; essendo B a chiusura compatta in Ω, è ben definito

$$\delta \coloneqq \min\{\operatorname{dist}(x; \partial\Omega) \mid x \in B\}.$$

Possiamo anche supporre che

$$\delta < \min\{\operatorname{dist}(x; \partial B) \mid x \in A\}.$$

Se estendiamo u a 0 fuori da B e consideriamo un mollificatore ρ, per ogni ε in $(0, \delta)$ definiamo $u_\varepsilon \coloneqq u * \rho_\varepsilon$ (vedi 2.2.2). Per la scelta di δ, per il lemma 4.3.1, per ogni ε in $(0, \delta)$ per ogni x in A vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Come osservato in 2.2.3, vale che $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una successione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ il cui supporto è relativamente compatto in Ω che converge a u in $L^p(\mathbb{R}^d)$; in particolare la convergenza è in $L^p(A)$. Analogamente, vale che $\{D^\alpha u * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ (intendendo che abbiamo esteso $D^\alpha u$ a 0 fuori da B); in particolare la convergenza è in $L^p(A)$ e, per quanto osservato, concludiamo che $\{D^\alpha u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(A)$.

Step 2: Per ogni k intero positivo definiamo

$$\Omega_k \coloneqq \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |x| < k,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Si osserva facilmente che per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che Ω_k è un aperto contenuto in Ω a chiusura compatta in Ω_{k+1}. Se k è fissato, come dimostrato nel primo passo, esiste una funzione u_k^k in $C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\left\| u_k^k - u \right\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k},$$

$$\left\| D^\alpha u_k^k - D^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}.$$

Sia Ω' un aperto a chiusura compatta in Ω. Esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che per ogni $k \geq k_0$ l'aperto Ω' è relativamente compatto in Ω_k. Allora, per ogni $k \geq k_0$ vale che

$$\left\| u_k^k - u \right\|_{L^p(\Omega')} \leq \left\| u_k^k - u \right\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k},$$

$$\left\| D^\alpha u_k^k - D^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega')} \leq \left\| D^\alpha u_k^k - D^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \frac{1}{k}.$$

□

Teorema 4.3.3. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p *in* $[1, +\infty)$ *(*$+\infty$ *è escluso) e* u *una funzione in* $W^{m,p}(\Omega)$. *Esiste una successione* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *con le seguenti proprietà:*

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad* u *in* $L^p(\Omega)$*;*
- *per ogni aperto* Ω' *a chiusura compatta in* Ω *per ogni multi-indice* α *in* $\mathbb{N}^d$ *con* $|\alpha| \leq m$, *la successione* $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $D^\alpha u$ *in* $L^p(\Omega')$.

Se u *appartiene ad* $L^\infty(\Omega)$ *per ogni* n *in* $\mathbb{N}$ *vale che*

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Inoltre, se $\Omega = \mathbb{R}^d$, *per ogni multi-indice* α *in* $\mathbb{N}^d$ *tale che* $|\alpha| \leq m$ *vale che* $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $D^\alpha u$ *in* $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Dimostrazione. Sia ρ un mollificatore come in 2.2.1. Dopo aver esteso u a 0 fuori da Ω, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione u_ε come in 2.2.2. Sia $\xi : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ una funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\xi(x) = 0$ se $|x| \geq 2$;
- $\xi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\xi_\varepsilon(x) := \xi(\varepsilon x);$$

inoltre, definiamo

$$v_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(x)\xi_\varepsilon(x).$$

Vogliamo mostrare che la successione $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ha le proprietà richieste. Per le proprietà della convoluzione (vedi 2.2.3) vale che $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una successione in $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Quindi, $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una successione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mostriamo che $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$. Per il teorema di convergenza dominata, vale che $\{u\xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$ per ε che tende a 0. Allora, vale che

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|v_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u_\varepsilon\xi_\varepsilon - u\xi_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u\xi_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\xi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u\xi_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Fissati un aperto Ω' relativamente compatto in Ω e un multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$, vogliamo mostrare che $\{D^\alpha v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$. Per il lemma 4.3.1 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni ε in $(0, \delta)$ per ogni x in Ω' per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Possiamo anche assumere che Ω' sia contenuto in $\mathcal{B}\left(0; \frac{1}{\delta}\right)$ e sia relativamente compatto in tale palla. Allora, per ogni ε in $(0, \delta)$ per ogni x in Ω' vale che $\xi_\varepsilon(x) = 1$; in particolare, deduciamo che $D^\alpha v_\varepsilon(x) = D^\alpha u_\varepsilon(x)$. Per le proprietà della convoluzione, vale che $\{D^\alpha u * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ (intendendo che abbiamo esteso $D^\alpha u$ a 0 fuori da Ω); in particolare, la convergenza è in $L^p(\Omega')$. Per quanto osservato, abbiamo mostrato che $\{D^\alpha v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$.

Inoltre, osserviamo che, essendo $v_\varepsilon = \xi_\varepsilon(u * \rho_\varepsilon)$, per le proprietà della convoluzione (vedi 2.2.3) vale che

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Infine, supponiamo $\Omega = \mathbb{R}^d$. Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo espandere la derivata α-esima del prodotto con la regola di Leibniz; utilizzando il lemma 4.3.1, per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\begin{aligned}
D^\alpha(u_\varepsilon\xi_\varepsilon)(x) &= \sum_S D^S u_\varepsilon(x) \cdot D^{S^c}\xi_\varepsilon(x) \\
&= \sum_S D^S u_\varepsilon(x) \cdot \varepsilon^{|\alpha|-|S|} D^{S^c}\xi(\varepsilon x) \\
&= \sum_S D^S(u * \rho_\varepsilon)(x)\varepsilon^{|\alpha|-|S|} D^{S^c}\xi(\varepsilon x) \\
&= \sum_S [(D^S u) * \rho_\varepsilon](x)\varepsilon^{|\alpha|-|S|} D^{S^c}\xi(\varepsilon x),
\end{aligned}$$

dove S varia tra tutti i sottoinsiemi di $\{0;\ldots;|\alpha|\}$. In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha(u_\varepsilon\xi_\varepsilon) - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq \|D^\alpha(u_\varepsilon\rho_\varepsilon) - (D^\alpha u)\rho_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|(D^\alpha u)\rho_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|(D^\alpha u)\rho_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad + \sum_S \left\|(D^S u) * \rho_\varepsilon\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \varepsilon^{|\alpha|-|S|} \left\|D^{S^c}\xi(\varepsilon x)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

al variare di S tra tutti i sottoinsiemi di $\{0;\ldots;|\alpha|\}$ di cardinalità strettamente minore di $|\alpha|$. Ricordando che ξ è una funzione di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e che per ogni sottoinsieme S in $\{0;\ldots;|\alpha|\}$ vale che $\{(D^S u) * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a $D^S u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per le proprietà della convoluzione (vedi 2.2.3), deduciamo che esiste una costante M tale che per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\|D^\alpha(u_\varepsilon\xi_\varepsilon) - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|(D^\alpha u)\rho_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + M\varepsilon;$$

questo è sufficiente a concludere. □

4.3.2 Approssimazioni globali

Lemma 4.3.4. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1,+\infty]$, u una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$ e ψ una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u\psi$ è una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$ e vale la regola di Leibniz per le derivate W-deboli.*

Dimostrazione. Sia α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Procediamo per induzione sulla cardinalità di α. Supponiamo $|\alpha| = 1$. Sia φ una funzione test in $C_c^\infty(\Omega)$. Applicando la regola di Leibniz tra funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ e la definizione di derivata W-debole ($\varphi\psi$ è una funzione test in $C_c^\infty(\Omega)$), vale che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\psi D_{x_i}\varphi \, dx &= \int_\Omega u D_{x_i}(\psi\varphi)\, dx - \int_\Omega u(\varphi D_{x_i}\psi)\, dx \\
&= -\int_\Omega \varphi\psi D_{x_i}u \, dx - \int_\Omega \varphi u D_{x_i}\psi \, dx \\
&= -\int_\Omega \varphi \left[\psi D_{x_i}u + u D_{x_i}\psi\right] \, dx.
\end{aligned}$$

Sia $j < m$ un intero. Supponiamo che la tesi sia vera per ogni multi-indice β in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\beta| \leq j$. Sia α un multi-indice in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| = j+1$. Esiste un multi-indice β di cardinalità j tale che $D^\alpha u = D_{x_i} D^\beta u$, per il teorema di inversione dell'ordine di derivazione (vedi 4.1.9 e 4.1.13). Applicando la regola di Leibniz per funzioni lisce, la definizione di derivata W-debole ($\psi D^\beta \varphi$ è una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$) e il fatto che $u\psi$ è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ (come mostrato nel passo base), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\psi D^\alpha \varphi \, dx &= \int_\Omega u\psi (D_{x_i} D^\beta \varphi) \, dx \\
&= \int_\Omega u D_{x_i}(\psi D^\beta \varphi) \, dx - \int_\Omega u D_{x_i}\psi D^\beta \varphi \, dx \\
&= -\int_\Omega D_{x_i} u (\psi D^\beta \varphi) \, dx - \int_\Omega u D_{x_i}\psi D^\beta \varphi \, dx \\
&= -\int_\Omega \left[\psi D_{x_i} u + u D_{x_i}\psi\right] D^\beta \varphi \, dx. \\
&= -\int_\Omega D_{x_i}(u\psi) D^\beta \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Si osserva facilmente che se u è in $W^{m,p}(\Omega)$, allora $D_{x_i}u$ è in $W^{m-1,p}(\Omega)$. Per ipotesi induttiva, le funzioni $\psi D_{x_i} u$ e $u D_{x_i}\psi$ sono in $W^{j,p}(\Omega)$. Essendo $D_{x_i}(u\psi) = u D_{x_i}\psi + \psi D_{x_i} u$, allora $D_{x_i}(u\psi)$ è in $W^{j,p}(\Omega)$. Essendo $|\beta| = j$, vale che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u\psi D^\alpha \varphi \, dx &= -\int_\Omega D_{x_i}(u\psi) D^\beta \varphi \, dx \\
&= -(-1)^{|\beta|} \left[D^\beta D_{x_i}(u\psi)\right] \varphi \, dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha(u\psi) \varphi \, dx.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3.5 (Partizione dell'unità - caso 1)**.**
Siano A un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti con le seguenti proprietà:

- *A_k è relativamente compatto in A per ogni k in $\mathbb{N}$;*
- *$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$;*
- *il ricoprimento è localmente finito, cioè ogni compatto K in A interseca soltanto un numero finito di aperti $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.*

Allora esiste una partizione dell'unità relativa al ricoprimento, cioè una successione di funzioni $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con le seguenti proprietà:

- *ψ_k è in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e ha supporto contenuto in A_k per ogni k in $\mathbb{N}$;*
- *$0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$ per ogni k in $\mathbb{N}$;*
- *per ogni x in A vale che*
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k(x) = 1.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Mostriamo che per ogni k in $\mathbb{N}$ esiste un aperto B_k relativamente compatto in A_k tale che la famiglia $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è ancora un ricoprimento di A.

Sia $k = 1$; per ogni i intero positivo, consideriamo l'aperto

$$A_{1,i} := \left\{ x \in A_1 \;\middle|\; \operatorname{dist}(x; \partial A_1) > \frac{1}{i} \right\}.$$

Ovviamente, per ogni i l'aperto $A_{1,i}$ è a chiusura compatta in A_i. Affermiamo che esiste un intero positivo j tale che

$$A = A_{1,j} \cup \bigcup_{k \geq 2} A_k.$$

Supponiamo per assurdo che per ogni i in $\mathbb{N}$ esista un punto

$$x_i \in A \setminus \left(A_{1,i} \cup \bigcup_{k \geq 2} A_k \right).$$

Segue che per ogni i in $\mathbb{N}$ il punto x_i è in A_1. Essendo A_1 a chiusura compatta in A, a meno di sottosuccessioni, non rinominate, possiamo supporre che $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sia convergente ad un punto x_∞ in $\overline{A_1}$. Ovviamente, per ogni $k \geq 2$ il punto x_∞ non può appartenere ad A_k, altrimenti la successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dovrebbe definitivamente essere contenuta in A_k (essendo A_k aperto). Pertanto, x_∞ deve appartenere ad A_1. Tuttavia, questo non è possibile perché x_i non appartiene ad $A_{1,i}$ per ogni i in $\mathbb{N}$, quindi

$$\operatorname{dist}(x_i; \partial A_1) \leq \frac{1}{i}$$

che implica che x_∞ appartiene a ∂A_1.

Per ricorsione, possiamo definire per ogni k in $\mathbb{N}$ l'aperto B_k con le proprietà richieste. Procedendo in maniera del tutto analoga possiamo costruire una successione $\{C_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ di aperti con le seguenti proprietà:

- $\{C_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ricopre A;
- per ogni k in $\mathbb{N}$ C_k è relativamente compatto in B_k.

Step 2: Sia k in $\mathbb{N}$ fissato. Poniamo

$$\delta_k := \min \left\{ \min\{\operatorname{dist}(x; \partial A_k) \mid x \in B_k\}; \min\{\operatorname{dist}(x; \partial B_k) \mid x \in C_k\} \right\}.$$

Essendo B_k relativamente compatto in A_k e C_k relativamente compatto in B_k, δ_k è ben definito ed è strettamente positivo. Sia ρ un mollificatore (vedi 2.2.1); dato ε in $(0, \delta_k)$, possiamo definire

$$\theta_k := \mathbb{1}_{B_k} * \rho_\varepsilon$$

come in 2.2.2. Dalla definizione di prodotto di convoluzione, è chiaro che $\theta_k(x)$ è in $[0, 1]$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$ e vale 1 per ogni x in C_k; per le proprietà del prodotto di convoluzione (vedi 2.2.3), il supporto di θ_k è contenuto in $B_k + \mathcal{B}(0; \varepsilon)$ che è contenuto in A_k per la scelta di ε.

Step 3: Per ogni x in A definiamo

$$S(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \theta_k(x).$$

Sia x in A e sia K_x un intorno di x a chiusura compatta in A; è immediato osservare che, essendo il ricoprimento $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ localmente finito, esiste un numero finito di indici tali che $\theta_k(y) \neq 0$ che per ogni y in K_x. Questo è sufficiente per concludere che la funzione S è ben definita ed è strettamente positiva su tutto A; inoltre, è di classe $C^\infty(A)$ (la somma è localmente finita). In conclusione, per ogni k in $\mathbb{N}$ per ogni x in A possiamo ben definire

$$\psi_k(x) := \frac{\theta_k(x)}{S(x)}.$$

La funzione ψ_k è supportata in A_k che è a chiusura compatta in A; pertanto, la sua estensione a 0 fuori da A è ancora una funzione liscia. Inoltre, è ovvio che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_k(x) = 1$$

per ogni x in A. □

Teorema 4.3.6 (Meyers-Serrin, 1964)**.**
Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ ($+\infty$ escluso) e u una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$;*
- *$\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha(u)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni α multi-indice in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$.*

In particolare, vale il contenimento

$$W^{m,p}(\Omega) \subseteq H^{m,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. **Step 1**: Per ogni intero $k \geq 1$, definiamo l'aperto

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; |x| < k,\ \operatorname{dist}(x; \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Poniamo anche $\Omega_0 = \Omega_{-1} := \emptyset$. Per ogni intero $k \geq 1$, introduciamo gli aperti

$$A_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}},$$

$$B_k := \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_{k-2}}.$$

Vale banalmente che A_k è relativamente compatto in B_k per ogni $k \geq 1$; inoltre, gli aperti $\{A_k \mid k \geq 1\}$ formano un ricoprimento localmente finito di Ω.

Step 2: Sia $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la partizione dell'unità relativa al ricoprimento introdotto. Per ogni $k \geq 1$ poniamo

$$u_k := u \cdot \psi_k.$$

Per il lemma 4.3.5, abbiamo che u_k è supportata in A_k per ogni $k \geq 1$; per il lemma 4.3.4, u_k è in $W^{m,p}(\Omega)$ per ogni $k \geq 1$. Quindi, possiamo concludere che u_k è una funzione in $W^{m,p}(B_k)$. Inoltre, per ogni x in Ω vale che

$$\sum_{k\geq 1} u_k(x) = u(x),$$

dal momento che nella somma ci sono al più due addendi non nulli. Per concludere la dimostrazione, basta provare che per ogni $\eta > 0$ esiste una funzione v in $C^\infty(\Omega)$ tale che per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ vale che

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta$$

e anche

$$\|v - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \eta.$$

Dunque, fissiamo $\eta > 0$. Essendo A_k relativamente compatto in B_k, per il teorema 4.3.2 per ogni $k \geq 1$ esiste una funzione v_k in $C_c^\infty(B_k)$ tale che

$$\|v_k - u_k\|_{m,p,B_k} \leq \frac{\eta}{2^k}$$

(vedi 4.1.16 per la definizione di $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$). Essendo v_k supportata in B_k per ogni $k \geq 1$ e il ricoprimento $\{B_k \mid k \geq 1\}$ localmente finito, per ogni x in Ω possiamo ben definire

$$v(x) := \sum_{k \geq 1} v_k(x).$$

Inoltre v è anche di classe $C^\infty(\Omega)$ perché ogni punto in Ω ha un intorno compatto in Ω che interseca solo un numero finito di aperti del ricoprimento $\{B_k \mid k \geq 1\}$. Del resto, per quanto osservato, è ovvio che

$$\|u_k - v_k\|_{m,p,\Omega} = \|u_k - v_k\|_{m,p,B_k}.$$

In conclusione, valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\|v - u\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum_{k \geq 1} (v_k - u_k) \right\|_{m,p,\Omega} \\
&\leq \sum_{k \geq 1} \|v_k - u_k\|_{m,p,\Omega} \\
&\leq \sum_{k \geq 1} \frac{\eta}{2^k} = \eta.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.3.7. Dimostrata l'uguaglianza degli spazi $W^{m,p}(\Omega)$ e $H^{m,p}(\Omega)$, lo spazio $W^{m,2}(\Omega)$ è denotato usualmente con H^m.

4.3.3 Teoremi algebrici

Il teorema di Meyers-Serrin (vedi 4.3.6) dimostra l'uguaglianza degli spazi $H^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ per ogni $m \geq 1$, per ogni p in $[1, +\infty)$ e per ogni aperto Ω in $\mathbb{R}^d$, senza ulteriori ipotesi aggiuntive. Tuttavia, per provare i seguenti teoremi algebrici è sufficiente (e anche più comodo) invocare il teorema di approssimazione 4.3.3.

Teorema 4.3.8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1, +\infty]$, u, v due funzioni in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Allora uv è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz per le derivate deboli, cioè per ogni i in $\{1; \ldots; d\}$ vale che*

$$D_{x_i}(uv) = u D_{x_i} v + v D_{x_i} u.$$

Dimostrazione. Sia i un intero fissato in $\{1;\dots;d\}$. Innanzitutto osserviamo che uv e $uD_{x_i}v+vD_{x_i}u$ sono funzioni in $L^p(\Omega)$. Sia φ una funzione $C_c^\infty(\Omega)$. Dobbiamo mostrare che

$$\int_\Omega (uv)D_{x_i}\varphi\ dx = -\int_\Omega \left[uD_{x_i}u + vD_{x_i}u\right]\varphi\ dx.$$

Step 1: Supponiamo che p sia in $[1,+\infty)$. Per il teorema 4.3.3, siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$, $\{D_{x_i}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D_{x_i}u$ in $L^p(\Omega')$ per ogni aperto Ω' relativamente compatto in Ω;
- $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v in $L^p(\Omega)$, $\{D_{x_i}v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D_{x_i}v$ in $L^p(\Omega')$ per ogni aperto Ω' relativamente compatto in Ω;
- per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le \|u\|_{L^\infty(\Omega)},\\ \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$D_{x_i}(u_nv_n) = u_nD_{x_i}v_n + v_nD_{x_i}u_n.$$

In particolare, se Ω' è un aperto relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di φ, vale che

$$\int_{\Omega'} (u_nv_n)D_{x_i}\varphi\ dx = -\int_{\Omega'} \left[u_nD_{x_i}v_n + v_nD_{x_i}u_n\right]\varphi\ dx.$$

Abbiamo che $\{u_nv_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione equi-limitata in norma infinito dalla costante $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. A meno di sottosuccessioni, non rinominate, possiamo supporre che converga a uv puntualmente quasi ovunque in Ω. Essendo Ω' compatto, le costanti sono dominazioni ammissibili; quindi, dal teorema di convergenza dominata segue che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega'}(u_nv_n)D_{x_i}\varphi\ dx = \int_{\Omega'}(uv)D_{x_i}\varphi\ dx.$$

Proviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega'}(u_nD_{x_i}v_n)\varphi\ dx = \int_{\Omega'}(uD_{x_i}v)\varphi\ dx.$$

Sia $M>0$ tale che $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\le M$. Essendo Ω' di misura finita, $\{D_{x_i}v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D_{x_i}v$ anche in $L^1(\Omega')$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega'}\left[u_nD_{x_i}v_n - uD_{x_i}v\right]\varphi\ dx\right| &\le \int_{\Omega'}\left|u_nD_{x_i}v_n - uD_{x_i}v\right||\varphi|\ dx\\ &\le M\int_{\Omega'}|u_n|\left|D_{x_i}v_n - D_{x_i}v\right|\ dx\\ &\quad + M\int_{\Omega'}|D_{x_i}v|\,|u_n-u|\ dx\\ &\le M\|u\|_{L^\infty(\Omega')}\left\|D_{x_i}v_n - D_{x_i}v\right\|_{L^1(\Omega')}\\ &\quad + M\int_{\Omega'}|D_{x_i}v|\,|u_n-u|\ dx.\end{aligned}$$

Per quanto osservato in precedenza, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} M \|u\|_{L^\infty(\Omega')} \|D_{x_i}v_n - D_{x_i}v\|_{L^1(\Omega')} = 0.$$

Infine, notiamo che

$$|D_{x_i}v(x)|\,|u_n(x) - u(x)| \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)} |D_{x_i}v(x)|$$

per ogni x in Ω' per ogni n in $\mathbb{N}$. Essendo $D_{x_i}v$ una funzione in $L^1(\Omega')$, a patto di estrarre una ulteriore sottosuccessione (non rinominata) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad u quasi ovunque in Ω, per il teorema di convergenza dominata si conclude anche che

$$\lim_{n\to+\infty} M \int_{\Omega'} |D_{x_i}v|\,|u_n - u| \; dx = 0.$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} (v_n D_{x_i}u_n)\varphi \; dx = \int_{\Omega'} (vD_{x_i}u)\varphi \; dx.$$

Questo conclude la dimostrazione nel caso in cui p appartiene a $[1, +\infty)$.

Step 2: Sia $p = +\infty$. Se Ω' è un aperto relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di φ, possiamo trovare un altro aperto Ω'' relativamente compatto in Ω tale che Ω' sia relativamente compatto in Ω''. Essendo Ω'' a chiusura compatta, possiamo concludere che u, v appartengono anche a $W^{1,1}(\Omega'')$. Dal momento che il supporto di φ è compatto in Ω'', per quanto dimostrato nel primo passo, si conclude che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (uv)D_{x_i}\varphi \; dx &= \int_{\Omega''} (uv)D_{x_i}\varphi \; dx \\
&= -\int_{\Omega''} [uD_{x_i}v + vD_{x_i}u]\,\varphi \; dx \\
&= -\int_\Omega [uD_{x_i}v + vD_{x_i}u]\,\varphi \; dx.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.9. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1, +\infty]$ e u una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *g è di classe $C^1(\mathbb{R})$;*
- *$g(0) = 0$ (richiesta superflua Ω ha misura finita);*
- *esiste M in $\mathbb{R}$ tale che $|g'(s)| \leq M$ per ogni s in $\mathbb{R}$.*

Allora $g(u)$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni i in $\{1; \dots ; d\}$ vale la formula

$$D_{x_i}g(u) = g'(u)D_{x_i}u.$$

Dimostrazione. Sia i un intero fissato in $\{1; \dots ; d\}$. Innanzitutto osserviamo che $g'(u)D_{x_i}u$ è una funzione in $L^p(\Omega)$. Se $g(0) = 0$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue banalmente che $|g(s)| \leq M|s|$ per ogni s in $\mathbb{R}$; allora, si conclude che $|g(u)| \leq M|u|$, in particolare $g(u)$ è una funzione in $L^p(\Omega)$. Se Ω ha misura finita e

$g(0) \neq 0$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale che $|g(s)| \leq |g(0)|+M|s|$; segue che $|g(u)| \leq |g(0)|+M|u|$, quindi $g(u)$ è ancora una funzione in $L^p(\Omega)$ (è cruciale l'ipotesi di misura finita).

Siano φ una funzione test in $C_c^\infty(\Omega)$ e i in $\{1;\ldots;d\}$. Dobbiamo mostrare che

$$\int_\Omega (uv) D_{x_i}\varphi \, dx = -\int_\Omega [g'(u)D_{x_i}u]\, \varphi \, dx.$$

Step 1: Supponiamo che p sia in $[1,+\infty)$. Per il teorema 4.3.3, sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$, $\{D_{x_i}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D_{x_i}u$ in $L^p(\Omega')$ per ogni aperto Ω' relativamente compatto in Ω,
- per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che
$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Sia Ω' una aperto relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di φ. Per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\Omega'} g(u_n) D_{x_i}\varphi \, dx = -\int_{\Omega'} [g'(u_n)D_{x_i}u_n]\, \varphi \, dx.$$

A meno di ulteriori sottosuccessioni, non rinominate, possiamo supporre che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga ad u puntualmente quasi ovunque. Allora $\{g(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g(u)$ quasi ovunque. Inoltre, essendo Ω' a chiusura compatta, vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^1(\Omega')$. Per ogni n in $\mathbb{N}$ per quasi ogni x in Ω' vale che

$$|g_n(u(x))| \leq |g(0)| + M|u(x)|.$$

Essendo u una dominazione ammissibile in $L^1(\Omega')$ e Ω' un aperto di misura finita, vale che $|g(0)| + M|u|$ è una dominazione in $L^1(\Omega')$. Allora, per il teorema di convergenza dominata, possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} g(u_n) D_{x_i}\varphi \, dx = \int_{\Omega'} g(u) D_{x_i}\varphi \, dx.$$

Sia $A > 0$ tale che $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A$; per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le stime seguenti:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega'} [g'(u_n)D_{x_i}u_n - g'(u)D_{x_i}u]\, \varphi \, dx\right| &\leq A\int_{\Omega'} |g'(u_n)D_{x_i}u_n - g'(u)D_{x_i}u| \, dx \\
&\leq A\int_{\Omega'} |g'(u_n)D_{x_i}u_n - g'(u_n)D_{x_i}u| \, dx \\
&\qquad + A\int_{\Omega'} |g'(u_n)D_{x_i}u - g'(u)D_{x_i}u| \, dx \\
&\leq AM\|D_{x_i}u_n - D_{x_i}u\|_{L^1(\Omega')} \\
&\qquad + A\int_{\Omega'} |g'(u_n) - g'(u)|\,|D_{x_i}u| \, dx.
\end{aligned}$$

Essendo Ω' relativamente compatto in Ω, vale che $\{D_{x_i}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D_{x_i}u$ anche in $L^1(\Omega')$; allora, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} AM\|D_{x_i}u_n - D_{x_i}u\|_{L^1(\Omega')} = 0.$$

Inoltre, per le ipotesi su g, per ogni n in $\mathbb{N}$, per quasi ogni x in Ω' vale che

$$|g'(u_n(x)) - g'(u(x))|\,|D_{x_i}u(x)| \leq 2M\,|D_{x_i}u(x)|$$

che è una dominazione ammissibile in $L^1(\Omega')$. Per il teorema di convergenza dominata, si conclude che

$$\int_{\Omega'} |g'(u_n) - g'(u)|\,|D_{x_i}u|\ dx = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione nel caso in cui p appartenga a $[1,+\infty)$.

Step 2: Sia $p = +\infty$. Se Ω' è un aperto relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di φ, possiamo trovare un altro aperto Ω'' relativamente compatto in Ω tale che Ω' sia relativamente compatto in Ω''. Essendo Ω'' a chiusura compatta, possiamo concludere che u appartiene anche a $W^{1,1}(\Omega'')$. Dal momento che il supporto di φ è compatto in Ω'', per quanto dimostrato nel primo passo, si conclude che

$$\int_\Omega g(u)D_{x_i}\varphi\ dx = \int_{\Omega''} g(u)D_{x_i}\varphi\ dx = -\int_{\Omega''} [g'(u)D_{x_i}u]\,\varphi\ dx = -\int_\Omega [g'(u)D_{x_i}u]\,\varphi\ dx.$$

□

Corollario 4.3.10. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1,+\infty]$ e u una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora $|u|$ è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni i in $\{1;\ldots;d\}$ vale*

$$D_{x_i}|u| = \operatorname{sgn}(u)D_{x_i}u.$$

In particolare, se v è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$, allora $\max\{u;v\}$ e $\min\{u;v\}$ sono funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Per ogni n in $\mathbb{N}$ definiamo $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$g_n(s) \coloneqq \sqrt{s^2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $C^1(\mathbb{R})$ e vale

$$g_n'(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{n}}};$$

pertanto, $|g_n'(s)| \leq 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni s in $\mathbb{R}$. Per il teorema 4.3.9, $\{g_n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni i in $\{1;\ldots;d\}$ vale che

$$D_{x_i}g_n(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{1}{n}}}D_{x_i}u.$$

Sia φ una funzione $C_c^\infty(\Omega)$. Dobbiamo provare che

$$\int_\Omega |u|\,D_{x_i}\varphi\ dx = -\int_\Omega [\operatorname{sgn}(u)D_{x_i}u]\,\varphi\ dx.$$

Per quanto osservato, se Ω' è una aperto relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di φ, allora per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\Omega'} g_n(u)D_{x_i}\varphi\ dx = -\int_{\Omega'} [g_n'(u)D_{x_i}u]\,\varphi\ dx.$$

Osserviamo che $\{g_n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $|u|$ puntualmente e per ogni n in $\mathbb{N}$ per quasi ogni x in Ω vale che

$$0 \leq g_n(u(x)) \leq |u(x)|\,;$$

essendo Ω' un insieme di misura finita, u è una funzione in $L^1(\Omega')$. Il teorema di convergenza dominata garantisce che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega'} g_n(u)D_{x_i}\varphi\; dx = \int_{\Omega'} |u|\, D_{x_i}\varphi.$$

Osserviamo anche che $\{g_n'(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\operatorname{sgn}(u)$; essendo $|g_n'(u)| \leq 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$ per quasi ogni x in Ω' e $D_{x_i}u$ una funzione in $L^1(\Omega')$, possiamo concludere con il teorema di convergenza dominata che vale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega'} [g_n'(u)D_{x_i}u]\,\varphi\; dx = \int_{\Omega'} [\operatorname{sgn}(u)D_{x_i}u]\,\varphi\; dx.$$

□

Teorema 4.3.11 (Composizione interna)**.**
Siano A, B aperti di $\mathbb{R}^d$ tali che esiste una mappa $\Phi : A \to B$ con le seguenti proprietà:

- *Φ è invertibile;*
- *Φ e Φ^{-1} sono di classe C^1;*
- *$J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ sono limitati.*

Sia p in $[1, +\infty]$. Allora u appartiene a $W^{1,p}(B)$ se e solo se $u\circ\Phi$ appartiene a $W^{1,p}(A)$. Inoltre, vale la regola di derivazione a catena:

$$\frac{\partial u\circ\Phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial x_j}(\Phi(x))\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x).$$

Dimostrazione. Mostriamo che se u appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$, allora $u\circ\Phi$ appartiene a $W^{1,p}(A)$ e vale la formula di derivazione a catena. L'altra implicazione è del tutto analoga. Siano φ una funzione di classe $C_c^\infty(A)$ e i un intero in $\{1;\ldots;d\}$; dobbiamo mostrare che

$$\int_A u\circ\Phi(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)\; dy = -\int_A\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial y_j}(\Phi(y))\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i}(y)\right)\varphi(y)\; dy.$$

Sia A' un aperto relativamente compatto in A che contiene il supporto di φ; poniamo $B' := \Phi(A')$. Sia B'' un aperto relativamente compatto in B che contiene $\overline{B'}$ (che è compatta in B, perchè Φ è un omeomorfismo). Ovviamente, u è una funzione in $W^{1,p}(B'')$ e, essendo B'' relativamente compatto in B, vale che u è in $W^{1,1}(B'')$. Per il teorema 4.3.3, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^1(B'')$;
- $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad ∇u in $L^1(B')$.

Per la formula di cambio di variabili, essendo $J\Phi^{-1}$ una funzione limitata, vale che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A'}|u_n\circ\Phi(y)-u\circ\Phi(y)|\ dy=\lim_{n\to+\infty}\int_{B'}|u_n(x)-u(x)|\left|\det(J\Phi^{-1}(x))\right|\ dx=0.$$

Dunque $\{u_n\circ\Phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u\circ\Phi$ in $L^1(A')$. In maniera del tutto analoga, si mostra che $\{(\nabla u_n)\circ\Phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(\nabla u)\circ\Phi$ in $L^1(A')$. Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}\int_A u_n\circ\Phi(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(y)\ dy&=-\int_A\frac{\partial(u_n\circ\Phi)}{\partial x_i}(y)\varphi(y)\ dy\\&=-\int_A\left(\sum_{j=1}^d\frac{\partial u_n}{\partial y_j}(\Phi(y))\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i}\right)\varphi(y)\ dy.\end{aligned}$$

Allora vale banalmente che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_A u_n\circ\Phi(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)\ dy=\int_A u\circ\Phi(y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(y)\ dy.$$

Essendo $J\Phi$ una funzione limitata, concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_A\left(\sum_{j=1}^d\frac{\partial u_n}{\partial y_j}(\Phi(y))\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i}\right)\varphi(y)\ dy=\int_A\left(\sum_{j=1}^d\frac{\partial u}{\partial y_j}(\Phi(y))\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i}\right)\varphi(y)\ dy.$$

□

4.4 Teoremi di estensione

Definizione 4.4.1 (Extender)**.**
Siano $d\geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m\geq 1$ e p in $[1,+\infty]$.

1. Si dice (m,p)-estensione una funzione lineare $E_{m,p}:W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

   - per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ per quasi ogni x in Ω vale che
   $$E_{m,p}u(x)=u(x);$$
   - esiste una costante $c(m;p)$ dipendente solo da m e p tale che per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ vale che
   $$\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d}\leq c(m;p)\,\|u\|_{m,p,\Omega}\,.$$

2. Si dice m-estensione forte una funzione lineare $E_m:L^1_{\text{loc}}(\Omega)\to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tale che la sua restrizione a $W^{m,p}(\Omega)$ è una $(m;p)$-estensione per ogni p in $[1,+\infty]$.

3. Si dice estensione universale una funzione lineare $E:L^1_{\text{loc}}(\Omega)\to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ che sia una m-estensione forte per ogni m.

Teorema 4.4.2. *Siano $d\geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m\geq 1$ un intero e p in $[1,+\infty)$. Supponiamo che esista $E_{m,p}:W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ una $(m;p)$-estensione (vedi 4.4.1). Allora per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che*

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$,*
- *per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \le m$ vale che $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia u in $W^{m,p}(\Omega)$; poniamo $\hat{u} := E_{m;p}u$. Sappiamo che $\hat{u}$ appartiene a $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Per il teorema 4.4.2 esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzione di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$,
- per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \le m$ vale $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

In particolare, le convergenze sono in $L^p(\Omega)$. □

Osservazione 4.4.3. Il teorema 4.4.2 è il miglior risultato di approssimazione che si possa dare in questo contesto. L'intento delle prossime sezioni è trovare ipotesi ragionevoli su Ω che garantiscano l'esistenza di una (m,p)-estensione (come nel teorema 4.4.2).

4.4.1 Estensione nel caso modello

Definizione 4.4.4. Siano A un aperto in $\mathbb{R}^{d-1}$; poniamo $C_A^+ := A \times (0,1)$ e $C_A := A \times (-1,1)$ in $\mathbb{R}^d$ Data una funzione $u : C_A^+ \to \mathbb{R}$, definiamo

- l'estensione per parità, cioè $Eu : C_A \to \mathbb{R}$ tale che
$$[Eu](x;y) := \begin{cases} u(x;y) & \text{se } (x;y) \in C_A^+, \\ u(x;-y) & \text{se } x \in A,\ y \in (-1,0), \\ 0 & \text{se } x \in A,\ y = 0; \end{cases}$$
- l'estensione per disparità, cioè $\hat{E}u : C_A \to \mathbb{R}$ tale che
$$[\hat{E}u](x;y) := \begin{cases} u(x;y) & \text{se } (x;y) \in C_A^+, \\ -u(x;-y) & \text{se } x \in A,\ y \in (-1,0), \\ 0 & \text{se } x \in A,\ y = 0. \end{cases}$$

In entrambi i casi, la definizione in $A \times \{0\}$ è puramente convenzionale (infatti $A \times \{0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^d$).

Teorema 4.4.5 (Estensione per parità)**.**
Siano $d \ge 1$ un intero, A un aperto di $\mathbb{R}^{d-1}$, $C_A := A \times (-1,1)$ e $C_A^+ := A \times (0,1)$ e p in $[1,+\infty]$. Siano E l'operatore di estensione per parità ed $\hat{E}$ l'operatore di estensione per disparità (vedi 4.4.4). La restrizione di $E : W^{1,p}(C_A^+) \to W^{1,p}(C_A)$ è ben definita e lineare; inoltre valgono le seguenti proprietà:

- *per ogni i in $\{1;\dots;d-1\}$ vale che*
$$\frac{\partial Eu}{\partial x_i} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right);$$
- $\dfrac{\partial Eu}{\partial y} = \hat{E}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right);$

- *per ogni u in $W^{1,p}(C_A^+)$ vale che*

$$\|Eu\|_{1,p,C_A} \leq 2\,\|u\|_{1,p,C_A^+}\,.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Fissiamo i in $\{1;\dots;d-1\}$; sia φ una funzione test in $C_c^\infty(C_A)$ e mostriamo che

$$\int_{C_A}[Eu(x;y)]\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)\;dxdy = -\int_{C_A}\left[E\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\right]\varphi(x;y)\;dxdy.$$

Poniamo $\psi(x;y) \coloneqq \varphi(x;y)+\varphi(x;-y)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}
&\int_{C_A}[Eu(x;y)]\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)\;dxdy\\
&=\int_A\left(\int_0^1 u(x;y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)\;dy\right)\;dx+\int_A\left(\int_{-1}^0 u(x;-y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)\;dy\right)\;dx\\
&=\int_A\left(\int_0^1 u(x;y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)\;dy\right)\;dx+\int_A\left(\int_0^1 u(x;y)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;-y)\;dy\right)\;dx\\
&=\int_A\left(\int_0^1 u(x;y)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;y)+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x;-y)\right]\right)\;dx\\
&=\int_{C_A^+}u(x;y)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x;y)\;dxdy.
\end{aligned}$$

Con conti del tutto analoghi, troviamo che

$$\int_{C_A}\left[E\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\right]\varphi(x;y)\;dxdy = \int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi(x;y)\;dxdy.$$

Dunque, dobbiamo mostrare che

$$\int_{C_A^+}u(x;y)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x;y)\;dxdy = -\int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi(x;y)\;dxdy.$$

Osserviamo che ψ è una funzione $C^\infty(C_A^+)$; tuttavia, non è detto che abbia supporto compatto in C_A^+. Sia $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà:

- $\theta(y)=0$ se $y\leq 1$ e $\theta(y)=1$ se $y\geq 2$;
- $\theta(y)$ è in $[0,1]$ per ogni y in $\mathbb{R}$.

Per ogni intero positivo k, poniamo $\psi_k(x;y)\coloneqq\psi(x;y)\theta(ky)$. Osserviamo che $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni di classe $C_c^\infty(C_A^+)$, pertanto per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{C_A^+}u(x;y)\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}(x;y)\;dxdy = -\int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi_k(x;y)\;dxdy;$$

più esplicitamente, per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{C_A^+}u(x;y)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x;y)\theta(ky)\;dxdy = -\int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi(x;y)\theta(ky)\;dxdy.$$

Se denotiamo con B il supporto di ψ, osserviamo che tutti gli integrali sono in B e che B è limitato. Per le proprietà di θ per ogni k in $\mathbb{N}$ per ogni $(x;y)$ in C_A^+ si ha

$$\left| u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y)\theta(ky) \right| \leq \left| u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y) \right|$$

che è una dominazione ammissibile in $L^1(B)$ (infatti u è in $L^p(C_A^+)$ e B ha misura finita). Inoltre per quasi ogni $(x;y)$ in C_A^+ vale che

$$\lim_{k\to+\infty} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y)\theta(ky) = u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y);$$

per il teorema di convergenza dominata, concludiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y)\theta(ky)\ dxdy = \int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y)\ dxdy.$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi(x;y)\theta(ky)\ dxdy = \int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\psi(x;y)\ dxdy.$$

Step 2: Sia φ una funzione test in $C_c^\infty(C_A)$. Dobbiamo mostrare che

$$\int_{C_A} [Eu(x;y)]\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x;y)\ dxdy = -\int_{C_A} \left[\hat{E}\frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\right]\varphi(x;y)\ dxdy.$$

Poniamo $\psi(x;y) \coloneqq \varphi(x;y) - \varphi(x;-y)$. Procedendo come nel primo step, troviamo che la tesi è equivalente a mostrare che

$$\int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\ dxdy = -\int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\psi(x;y)\ dxdy.$$

Osserviamo che ψ è una funzione in $C^\infty(C_A^+)$; tuttavia, non è detto che il suo supporto sia compatto in C_A^+. Sia $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con le stesse proprietà indicate nel primo step. Per ogni k in $\mathbb{N}$ denotiamo con $\psi_k(x;y) \coloneqq \psi(x;y)\theta(ky)$. Essendo $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $C_c^\infty(C_A^+)$, per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi_k}{\partial y}(x;y)\ dxdy = -\int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\psi_k(x;y)\ dxdy;$$

più esplicitamente, per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}\int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\theta(ky)\ dxdy + \int_{C_A^+} u(x;y)\psi(x;y)k\theta'(ky)\ dxdy \\ = -\int_{C_A^+} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\psi(x;y)\theta(ky)\ dxdy.\end{aligned}$$

Come mostrato dettagliatamente nel primo step, vale che

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\theta(ky)\ dxdy = \int_{C_A^+} u(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\ dxdy,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\psi(x;y)\theta(ky)\ dxdy=\int_{C_A^+}\frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\psi(x;y)\ dxdy.$$

Dunque, per concludere basta mostrare che

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{C_A^+}u(x;y)\psi(x;y)k\theta'(ky)\ dxdy=0.$$

Osserviamo che ψ si annulla sull'asse x e che è lipschitziana; pertanto, esiste una costante $L>0$ tale che per ogni $(x;y)$ in C_A^+ vale che

$$|\psi(x;y)|=|\psi(x;y)-\psi(x;0)|\leq L\,|y|\,.$$

Siano $M>0$ tale che $\|\theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq M$ e B il supporto di ψ: osserviamo che B è limitato. Per ogni k in $\mathbb{N}$ poniamo

$$B_k\coloneqq B\cap A\times\left(0,\frac{2}{k}\right).$$

Essendo $\theta'(y)=0$ se $y\geq 2$, vale che

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\left|\int_{C_A^+}u(x;y)\psi(x;y)k\theta'(ky)\right|\ dxdy&\leq\lim_{k\to+\infty}\int_{B_k}|u(x;y)|\,|\psi(x;y)|\,k\,|\theta'(ky)|\ dxdy\\&\leq\lim_{k\to+\infty}\int_{B_k}|u(x;y)|\,MLk\,|y|\ dxdy\\&\leq 2ML\lim_{k\to+\infty}\int_{B_k}|u(x;y)|\ dxdy\\&=0\end{aligned}$$

per convergenza dominata (infatti B ha misura finita e u è in $L^1(B)$).

Step 3: Abbiamo mostrato che la mappa $E:W^{1,p}(C_A^+)\to W^{1,p}(C_A)$ è ben definita e valgono le relazioni enunciate per le derivate deboli; inoltre E è ovviamente lineare. Per concludere, basta osservare che per ogni u in $W^{1,p}(C_A^+)$ vale che

$$\begin{aligned}\|Eu\|_{1,p,C_A}&=\|Eu\|_{L^p(C_A)}+\sum_{i=1}^{d}\|D_{x_i}Eu\|_{L^p(C_A)}\\&\leq\|Eu\|_{L^p(C_A^+)}+\|Eu\|_{L^p(C_A^-)}+\sum_{i=1}^{d}\|D_{x_i}Eu\|_{L^p(C_A^+)}+\sum_{i=1}^{d}\|D_{x_i}Eu\|_{L^p(C_A^-)}\\&=2\,\|u\|_{L^p(C_A^+)}+2\sum_{i=1}^{d}\|D_{x_i}u\|_{L^p(C_A^+)}\\&=2\,\|u\|_{1,p,C_A^+}\,.\end{aligned}$$

□

Osservazione 4.4.6. Lo stesso enunciato del teorema 4.4.5 vale nel caso in cui A sia un aperto di $\mathbb{R}^{d-1}$ e $C_A=A\times(0,+\infty)$ e $C_A^+=A\times\mathbb{R}$. La dimostrazione data può facilmente essere adattata.

Osservazione 4.4.7. L'estensione per parità non è una 2-estensione forte. Basta osservare che per ogni p in $[1,+\infty]$, la funzione $u(x)\coloneqq x$ è in $W^{2,p}((0,1))$; tuttavia, $Eu(x)=|x|$ non è in $W^{2,p}((-1,1))$.

Osservazione 4.4.8. L'estensione per disparità non è una $(1,p)$-estensione per ogni p in $[1,+\infty]$. Infatti la funzione $u(x)\coloneqq 1$ è in $W^{1,p}((0,1))$; tuttavia $\hat{E}u$ non è in $W^{1,p}((-1,1))$ per ogni p in $[1,+\infty]$.

4.4.2 Estensione nel caso di aperti regolari

Definizione 4.4.9 (Aperto C^k)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $\mathcal{B}_{d-1}(0;1)$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^{d-1}$; poniamo $Q := \mathcal{B}_{d-1}(0;1)\times(-1,1)$ e $Q^+ := \mathcal{B}_{d-1}(0;1)\times(0,1)$. Diciamo che Ω è di classe C^k se per ogni x in $\partial\Omega$ esiste un intorno $\mathcal{U}$ di x e una mappa $\Phi : \mathcal{U} \to Q$ con le proprietà seguenti:

- Φ è invertibile;
- Φ e Φ^{-1} sono di classe C^k;
- tutte le derivate fino all'ordine k-esimo di Φ e Φ^{-1} sono limitate;
- $\Phi(\mathcal{U}\cap\Omega) = Q^+$;
- $\Phi(\mathcal{U}\cap\partial\Omega) = \mathcal{B}_{d-1}(0;1)\times\{0\}$.

Lemma 4.4.10 (Partizione dell'unità - caso 2)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ tale che $\partial\Omega$ è compatto. Siano $\{A_1;\dots;A_n\}$ aperti relativamente compatti in $\mathbb{R}^d$ tali che

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Esistono delle funzioni $\{\psi_0;\psi_1;\dots;\psi_n\}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tali che

- $0 \le \psi_i(x) \le 1$ *per ogni x in $\mathbb{R}^d$ per ogni i in $\{0;1;\dots;n\}$;*
- ψ_i *è supportata in A_i per ogni i in $\{1;\dots;n\}$;*
- ψ_0 *è supportata in Ω;*
- *per ogni x in $\overline{\Omega}$ vale che*

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) = 1.$$

Dimostrazione. Poniamo $A_0 := \Omega$. Allora vale che

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i.$$

Step 1: Per ogni intero positivo k per ogni i in $\{0;\dots;n\}$ poniamo

$$A_{i;k} := \left\{ x \in A_i \;\middle|\; \operatorname{dist}(x;\partial A_i) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Come mostrato in 4.3.5, esiste k in $\mathbb{N}$ tale che

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_{i;k}.$$

Osserviamo che per ogni i in $\{1;\dots;n\}$ vale che $A_{i;k}$ è relativamente compatto in A_i e che $\overline{A_{0;k}}$ è contenuto in Ω.

Step 2: Come mostrato in 4.3.5, per ogni i in $\{0;\dots;n\}$ esiste una funzione θ_i di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$;
- $\theta_i(x) = 1$ per ogni x in $A_{i;k}$;
- $\theta_i(0) = 0$ per ogni x in A_i^c.

Step 3: Per $i = 0$ poniamo

$$\psi_0(x) \coloneqq \theta_0(x);$$

per i in $\{1; \ldots ; n\}$ poniamo

$$\psi_i(x) \coloneqq \theta_i(x) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \theta_j(x)).$$

Per ogni i in $\{0; \ldots ; n\}$ vale che ψ_i è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a valori in $[0, 1]$ che si annulla fuori da A_i. Per induzione su n si mostra facilmente che per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$1 - \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) = \prod_{i=0}^{n} (1 - \theta_i(x)).$$

Se x appartiene a $\overline{\Omega}$ esiste i tale che x appartiene ad $A_{i;k}$. Concludiamo che la produttoria al membro di destra è 0; quindi vale che

$$1 - \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) = 0.$$

□

Lemma 4.4.11. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1, +\infty]$ e ψ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^d)$ supportata in Ω. Supponiamo che u sia in $W^{1,p}(\Omega)$. Se estendiamo u a 0 fuori da Ω, allora ψu è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Sia φ una funzione test in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, supportata in un insieme compatto B; fissiamo i in $\{1; \ldots ; d\}$. Dobbiamo mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^d} [u(x)\psi(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \left[u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) + \psi(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right] \varphi(x)\ dx,$$

assumendo di aver esteso u e $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ a 0 fuori da Ω. Se indichiamo con K il supporto di ψ, osserviamo che tutti gli integrali sono in $K \cap B$ che è compatto in Ω. Per il teorema 4.3.3 esiste una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad u in $L^1(K \cap B)$;
- $\{\nabla u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ∇u in $L^1(K \cap B)$.

Allora, per ogni n in $\mathbb{N}$, vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} [u_n(x)\psi(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \left[u_n(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) + \psi(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right] \varphi(x)\ dx.$$

Essendo $\varphi, \psi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ limitate in $K \cap B$, si può passare al limite per convergenza dominata. □

Teorema 4.4.12 (Estensione per aperti C^1)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 (vedi 4.4.9) tale che $\partial\Omega$ è compatto. Allora esiste una 1-estensione forte nel senso della definizione 4.4.1.

Dimostrazione. Essendo Ω un aperto di classe C^1 e $\partial\Omega$ compatto, esiste un numero finito di aperti $\{\mathcal{U}_1; \dots; \mathcal{U}_n\}$ con le seguenti proprietà:

- $\partial\Omega \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_1$;
- per ogni i in $\{1; \dots; n\}$ esiste una mappa $\Phi_i : \mathcal{U}_i \to Q$ con le proprietà elencate in 4.4.9.

Per ogni i in $\{1; \dots; n\}$ poniamo $u_i := u\big|_{\mathcal{U}_i \cap \Omega}$; poniamo $v_i := u_i \circ (\Phi_i^{-1})\big|_{Q^+} : Q^+ \to \mathbb{R}$. Poichè Φ_i^{-1} ha jacobiano limitato, per il teorema di composizione interna (vedi 4.3.11) vale che v_i appartiene a $W^{1,p}(Q^+)$. Per il teorema di estensione nel caso modello (vedi 4.4.5), esiste una 1-estensione forte $E^{(i)} : W^{1,p}(Q^+) \to W^{1,p}(Q)$ tale che

$$\left\| E^{(i)} z \right\|_{1,p,Q} \leq 2 \left\| z \right\|_{1,p,Q^+}$$

per ogni z in $W^{1,p}(Q^+)$. Pertanto, per ogni i in $\{1; \dots; n\}$ poniamo $\hat{v}_i := E^{(i)} v_i$. Definiamo anche $\hat{u}_i := \hat{v}_i \circ \Phi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$; essendo Φ_i un'applicazione con jacobiano limitato, $\hat{u}_i$ è in $W^{1,p}(\mathcal{U}_i)$ (vedi 4.3.11).

Poniamo per convenzione $\mathcal{U}_0 := \Omega$ e $\hat{u}_0 := u$. Sia $\{\psi_0; \psi_i; \dots; \psi_n\}$ una partizione dell'unità relativa ad $\{\mathcal{U}_0; \mathcal{U}_1; \dots; \mathcal{U}_n\}$ come nel lemma 4.4.10. Per ogni i in $\{0; \dots; d\}$, assumiamo per convenzione che $\hat{u}_i$ sia estesa a tutto $\mathbb{R}^d$ e valga 0 fuori da $\mathcal{U}_i$.

Poniamo

$$\hat{u}(x) := \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i(x) \psi_i(x).$$

Per ogni i in $\{1; \dots; n\}$, per come è definita l'estensione $E^{(i)}$ (vedi 4.4.5), per ogni x in Q vale che $u_i(x) = v_i(x)$. Allora, per costruzione è banale osservare che per ogni x in Ω vale che

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} \hat{u}_i(x) \psi_i(x) = \sum_{i=0}^{n} u(x) \psi_i(x) = u(x).$$

Inoltre, è ovvio che l'operatore che associa ad u l'estensione $\hat{u}$ è lineare.

Per il lemma 4.4.11, $\hat{u}_i \psi_i$ è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni i in $\{0; \dots; n\}$; allora $\hat{u}$ è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Per il lemma 4.4.11 e per i teoremi 4.3.11 e 4.4.5, osserviamo che per ogni i in $\{1; \dots; n\}$ esistono costanti opportune (dipendenti soltanto da ψ_i) tali che

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{u}_i \psi_i \right\|_{1,p,\mathbb{R}^d} &\leq c_{i,1} \left\| \hat{u}_i \right\|_{1,p,\mathcal{U}_i} \\
&\leq c_{i,1} c_{i,2} \left\| \hat{v}_i \right\|_{1,p,Q} \\
&\leq 2 c_{i,1} c_{i,2} \left\| v_i \right\|_{1,p,Q^+} \\
&\leq 2 c_{i,1} c_{i,2} c_{i,3} \left\| u_i \right\|_{1,p,\Omega \cap \mathcal{U}_i} \\
&\leq 2 c_{i,1} c_{i,2} c_{i,3} \left\| u \right\|_{1,p,\Omega} .
\end{aligned}$$

Il lemma 4.4.11 garantisce che per $i = 0$ vale che

$$\left\| \hat{u}_0 \psi_0 \right\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq c_{0,1} \left\| u \right\|_{1,p,\Omega} .$$

In conclusione, troviamo che esiste una costante C dipendente soltanto da $\{\psi_0; \dots; \psi_n\}$ tale che

$$\|\hat{u}\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq C \|u\|_{1,p,\Omega}.$$

□

4.5 Teoremi di immersione

4.5.1 Immersione nel caso modello

Lemma 4.5.1 (Disuguaglianza di Gagliardo-Brascamp-Lieb, 1959)**.**
Sia $d \geq 2$ un intero. Per ogni i in $\{1; \dots; d\}$, sia data una funzione $\varphi_i : \mathbb{R}^{d-1} \to [0, +\infty)$ in $L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})$. Sia $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ la proiezione tale che

$$\pi_i(x_1; \dots; x_d) \coloneqq (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_d).$$

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ tale che

$$\varphi(x) \coloneqq \prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\pi_i(x)).$$

Allora φ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^{d} \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su d. Se $d = 2$, vale banalmente che

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(x)\varphi_2(y)\ dxdy \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(x)\ dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y)\ dy\right) \\
&= \|\varphi_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi_2\|_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Supponiamo che la tesi sia vera per d funzioni e mostriamo che vale per $d+1$ funzioni. Introduciamo la notazione seguente: per ogni i in $\{1; \dots; d+1\}$ denotiamo

$$\hat{x}_i = (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_{d+1});$$

per ogni i in $\{1; \dots; d\}$ denotiamo

$$\hat{x}_{i;d+1} = (x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_d).$$

Pertanto, vale che

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\hat{x}_i).$$

Se poniamo

$$\Phi(\hat{x}_{d+1}) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\hat{x}_i)\ dx_{d+1},$$

troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \left[\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\hat{x}_i)\ dx_{d+1} \right]\ d\hat{x}_{d+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1}) \Phi(\hat{x}_{d+1})\ d\hat{x}_{d+1} \\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{d+1}(\hat{x}_{d+1})^d\ d\hat{x}_{d+1} \right]^{\frac{1}{d}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}}\ d\hat{x}_{d+1} \right]^{\frac{d-1}{d}} \\
&= \|\varphi_{d+1}\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \|\Phi\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder con esponenti d e $\frac{d}{d-1}$. Quindi è sufficiente mostrare che

$$\|\Phi\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \le \prod_{i=1}^{d} \|\varphi_i\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.$$

Se applichiamo la disuguaglianza di Hölder con pesi $\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d}$ (d volte), troviamo che

$$\begin{aligned}
\Phi(\hat{x}_{d+1}) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1) \cdots \varphi_d(\hat{x}_{d+1})\ dx_{d+1} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1)^d\ dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_d(\hat{x}_d)^d\ dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d}}.
\end{aligned}$$

Pertanto, si trova che

$$\Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}} \le \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\hat{x}_1)^d\ dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d-1}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_d(\hat{x}_d)^d\ dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Per ogni i in $\{1; \dots; d\}$, poniamo

$$\Phi_i(\hat{x}_{i;d+1}) \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d\ dx_{d+1} \right)^{\frac{1}{d-1}};$$

utilizzando l'ipotesi induttiva, possiamo scrivere le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}}\ d\hat{x}_{d+1} &\le \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_1(\hat{x}_{1;d+1}) \cdots \Phi_d(\hat{x}_{d,d+1})\ d\hat{x}_{d+1} \\
&\le \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi_i(\hat{x}_{i;d+1})^{d-1}\ d\hat{x}_{i;d+1} \right]^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{1=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\hat{x}_i)^d\ dx_{d+1} \right)\ d\hat{x}_{i;d+1} \right]^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(\hat{x}_i)^d\ d\hat{x}_i \right]^{\frac{1}{d-1}}.
\end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo che

$$\left[\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\hat{x}_{d+1})^{\frac{d}{d-1}}\ d\hat{x}_{d+1} \right]^{\frac{d-1}{d}} \le \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(\hat{x}_i)^d\ d\hat{x}_i \right]^{\frac{1}{d}} = \prod_{i=1}^{d} \|\varphi_i\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Definizione 4.5.2 (Esponente di Sobolev)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero e p in $[1, d)$. Sia p^* tale che

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d};$$

equivalentemente, vale che

$$p^* = \frac{dp}{d-p}.$$

p^* è detto esponente di Sobolev relativo a d e p.

Il seguente teorema fondamentale vale soltanto se l'aperto di definizione è $\mathbb{R}^d$.

Teorema 4.5.3 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.**
Siano $d \geq 2$ un intero, p in $[1, d)$ e u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Sia p^* l'esponente di Sobolev relativo a p e d (vedi 4.5.2). Allora u appartiene ad $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che u sia una funzione $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ e $p = 1$. Sia i un indice in $\{1; \ldots; d\}$. Introduciamo la notazione seguente: se i è un indice in $\{1; \ldots; d\}$, poniamo

$$\hat{x}_i = (x_1; \ldots; x_{i-1}; x_{i+1}; \ldots; x_d).$$

Essendo u di classe $C_c^1(\mathbb{R}^d)$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} u(x_1; \ldots; x_{i-1}; t; x_{i+1}; \ldots; x_d)\ dt.$$

Segue che

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} u(x_1; \ldots; x_{i-1}; t; x_{i+1}; \ldots; x_d) \right| \ dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} u(x_1; \ldots; x_{i-1}; t; x_{i+1}; \ldots; x_d) \right| \ dt := f_i(\hat{x}_i). \end{aligned}$$

Vale banalmente che

$$|u(x)|^d \leq \prod_{i=1}^d f_i(\hat{x}_i).$$

Osserviamo che $1^* = \frac{d}{d-1}$; se definiamo per ogni i in $\{1; \ldots; d\}$ la funzione $\varphi_i : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi_i(\hat{x}_i) := f_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}},$$

allora si trova che

$$|u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \leq \prod_{i=1}^d f_i(\hat{x}_i)^{\frac{1}{d-1}} = \prod_{i=1}^d \varphi_i(\hat{x}_i).$$

Dalla disuguaglianza di Gagliardo-Brascamp-Lieb (vedi 4.5.1), deduciamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, dx &\leq \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi_i(\hat{x}_i)^{d-1} \, d\hat{x}_i \right]^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_i(\hat{x}_i) \, d\hat{x}_i \right]^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_d) \right| \, dx_i \right) \, d\hat{x}_i \right]^{\frac{1}{d-1}} \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \, dx \right]^{\frac{1}{d-1}}.
\end{aligned}$$

Riordinando gli esponenti, troviamo che

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \, dx \right]^{\frac{1}{d}} = \prod_{i=1}^{d} \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \right]^{\frac{1}{d}}. \tag{4.2}$$

In particolare, vale la disuguaglianza seguente:

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.3}$$

Step 2: Supponiamo ancora u in $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ e sia p in $(1, d)$. Per ogni $r > 0$, poniamo

$$\varphi_r(\sigma) := |\sigma|^r \, \sigma;$$

ricordiamo che è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Poniamo $v_r := \varphi_r \circ u = |u|^r \, u$ e osserviamo che per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\nabla v_r(x) = \varphi_r'(u(x)) \nabla u(x) = (r+1) \, |u(x)|^r \, \nabla u(x).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\|v_r\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} &= \left[\int_{\mathbb{R}^d} |v_r(x)|^{\frac{d}{d-1}} \, dx \right]^{\frac{d-1}{d}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{\frac{d}{d-1}(r+1)} \, dx \right]^{\frac{d-1}{d}} \\
&= \|u\|^{r+1}_{L^{\frac{d}{d-1}(r+1)}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder con pesi $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p'}$ (p' è l'esponente coniugato di p, come definito in 2.1.5, e $p' < +\infty$ perchè $p \neq 1$), per ogni indice i in $\{1; \ldots; d\}$ vale che

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= (r+1) \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^r \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \, dx \\
&\leq (r+1) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{rp'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (r+1) \, \|u\|^r_{L^{p'r}(\mathbb{R}^d)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq (r+1) \, \|u\|^r_{L^{p'r}(\mathbb{R}^d)} \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza (4.2) alla funzione v_r troviamo

$$\begin{aligned}
\|u\|^{r+1}_{L^{\frac{d}{d-1}(r+1)}(\mathbb{R}^d)} &= \|v_r\|_{L^{1^*}} \\
&\leq \prod_{i=1}^{d} \left[\left\| \frac{\partial v_r}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \right]^{\frac{1}{d}} \\
&\leq (r+1) \|u\|^{r}_{L^{p'r}(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} . \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Imponiamo che

$$\frac{d}{d-1}(r+1) = p'r;$$

questo è equivalente a richiedere che

$$r = \frac{d(p-1)}{d-p};$$

in particolare, troviamo che

$$r+1 = \frac{p(d-1)}{d-p}$$

e anche che

$$\frac{d}{d-1}(r+1) = p'r = p^*.$$

Semplificando i termini, ottieniamo la disuguaglianza seguente:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} . \qquad (4.5)$$

Step 3: Per le disuguaglianze (4.3) e (4.5), per ogni p in $[1,d)$ per ogni u in $C^1_c(\mathbb{R}^d)$ vale che

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} . \qquad (4.6)$$

Siano p qualsiasi esponente in $[1,d)$ e u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Per il teorema 4.3.3 esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e puntualmente quasi ovunque;
- $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∇u in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

In particolare, la successione $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla norma $L^p(\mathbb{R}^d)$. Per la disuguaglianza (4.6), la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$. Per completezza, ammette un limite v in $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$. A meno di sottosuccessioni, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v puntualmente quasi ovunque; pertanto, u coincide con v. Inoltre, è ovvio che

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

$\square$

Corollario 4.5.4. *Siano $d \geq 2$ un intero, $p = d$ e u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora per ogni q in $[p,+\infty)$ ($+\infty$ è escluso) u appartiene ad $L^q(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una $c(d;p;q)$ che dipende da d,p e q tale che*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;q) \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d} .$$

Dimostrazione. **Step 1**: Sia u una funzione in $C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Se applichiamo la disuguaglianza 4.4 ottenuta nella dimostrazione del teorema 4.5.3, nel caso $p = d$ per ogni $r > 0$ si ottiene

$$\|u\|^{r+1}_{L^{\frac{d}{d-1}(r+1)}(\mathbb{R}^d)} \leq (r+1) \|u\|^{r}_{L^{\frac{d}{d-1}r}(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} . \tag{4.7}$$

Per ogni k in $\mathbb{N}$ poniamo

$$q_k := p + \frac{d}{d-1}k;$$

mostriamo per induzione su k che per ogni k in $\mathbb{N}$ esiste una costante $c(d, p, q_k)$ dipendente solo da d, p, q_k tale che

$$\|u\|_{L^{q_k}(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q_k) \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d} .$$

Questo è sufficiente a concludere che per ogni q in $[d, +\infty)$ che esiste una costante $c(d; p; q)$ dipendente solo da d, p, q tale che

$$\|u\|_{L^{q}(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q) \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d} \tag{4.8}$$

per la disuguaglianza di interpolazione. Il passo base è banale: u è in $L^p(\mathbb{R}^d)$ per ipotesi. Supponiamo che u appartenga ad $L^{q_k}(\mathbb{R}^d)$ e valga

$$\|u\|_{L^{q_k}(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q_k) \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d} .$$

Scegliamo r tale che

$$\frac{d}{d-1}r = p + \frac{d}{d-1}k;$$

questo equivale a richiedere che

$$r = \frac{p(d-1)}{d} + k.$$

Osserviamo che

$$q_{k+1} = \frac{d}{d-1}(r+1).$$

Allora, la disuguaglianza (4.7) diventa

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{q_{k+1}}(\mathbb{R}^d)} &\leq (r+1) \|u\|^{\frac{r}{r+1}}_{L^{q_k}(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|^{\frac{1}{r+1}}_{L^d(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq (r+1) c(d; p; q_k)^{\frac{r}{r+1}} \|u\|^{\frac{r}{r+1}}_{1,d,\mathbb{R}^d} \|\nabla u\|^{\frac{1}{r+1}}_{L^d(\mathbb{R}^d)} \\
&= (r+1) c(d; p; q_k)^{\frac{r}{r+1}} \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d} .
\end{aligned}$$

Step 2: Se u è una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, per il teorema 4.3.3, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^d(\mathbb{R}^d)$ e puntualmente quasi ovunque;
- $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∇u in $L^d(\mathbb{R}^d)$.

Fissato q in $[p, +\infty)$, se applichiamo la disuguaglianza (4.8), per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q) \|u_n\|_{1,d,\mathbb{R}^d}.$$

Deduciamo che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^q(\mathbb{R}^d)$, pertanto converge ad una funzione v in $L^q(\mathbb{R}^d)$. A meno di sottosuccessioni, la convergenza è anche puntuale quasi ovunque; pertanto, possiamo concludere che $u = v$ e che vale la disuguaglianza

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q) \|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d}.$$

□

Teorema 4.5.5 (Morrey).
Siano $d \geq 2$ un intero, p un esponente in $(d, +\infty)$ e u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$; allora u appartiene ad $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una costante $c(d; p)$ dipendente da p e d tale che

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p) \left\{ \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\}.$$

Inoltre, u coincide quasi ovunque con una funzione α-hölderiana che denotiamo ancora con u, dove $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$, e per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ vale

$$|u(y) - u(x)| \leq c(d; p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |y - x|^\alpha.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Sia u una funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dati due punti distinti x, y in $\mathbb{R}^d$, poniamo $\delta := |x - y|$ e

$$S := \mathcal{B}(x; \delta) \cap \mathcal{B}(y; \delta).$$

Per ogni z in S vale banalmente

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(y) - u(z)| + |u(x) - u(z)|.$$

Integrando in S rispetto alla variabile z, otteniamo

$$\mathscr{L}(S) |u(x) - u(y)| \leq \int_S |u(x) - u(z)| \, dz + \int_S |u(y) - u(z)| \, dz.$$

Vogliamo stimare il primo integrale. Per ogni t in $[0, 1]$, poniamo

$$\psi(t) := (x + t(z - x)).$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder con pesi $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{p'}$ (p' è l'esponente coniugato di p, come in 2.1.5), troviamo che

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(z)| &= |\psi(1) - \psi(0)| \\
&= \left| \int_0^1 \psi'(t) \, dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |< \nabla u(x + t(z - x)), z - x >| \, dt \\
&\leq \int_0^1 |z - x|_{p'} |\nabla u(x + t(z - x))|_p \, dt.
\end{aligned}$$

Per il principio di equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^d$, esiste una costante c tale che per ogni z in S vale

$$|x-z|_{p'} \leq c\,|x-y| \leq c\delta.$$

Integrando in S rispetto alla variabile z, troviamo

$$\begin{aligned}
\int_S |u(z)-u(x)| \; dz &\leq c\delta \int_S dz \int_0^1 |\nabla u(x+t(z-x))|_p \; dt \\
&= c\delta \int_0^1 dt \int_S |\nabla u(x+t(z-x))|_p \; dz \\
&\leq c\delta \int_0^1 dt \int_{\mathcal{B}(x;\delta)} |\nabla u(x+t(z-x))|_p \; dz.
\end{aligned}$$

Se poniamo $w \coloneqq x+t(z-x)$, vale che $dz = \frac{1}{t^d} dw$. Allora troviamo

$$\int_S |u(z)-u(x)| \; dz \leq c\delta \int_0^1 dt \int_{\mathcal{B}(x;t\delta)} \frac{1}{t^d} 1 \cdot |\nabla u(w)|_p \; dw.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder con pesi $\frac{1}{p'}$ e $\frac{1}{p}$ (p' è l'esponente coniugato di p), si ottiene che

$$\begin{aligned}
\int_S |u(x)-u(z)| \; dz &\leq c\delta \int_0^1 \frac{1}{t^d} \mathscr{L}(\mathcal{B}(x;t\delta))^{\frac{1}{p'}} \left[\int_{\mathcal{B}(x;t\delta)} |\nabla u(w)|_p^p \; dw\right]^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq c\delta \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \frac{\mathscr{L}(\mathcal{B}(x;t\delta))^{\frac{1}{p'}}}{t^d} \; dt.
\end{aligned}$$

Se $c(d)$ indica il volume $d-1$-dimensionale della sfera unitaria, per ogni $\theta > 0$ vale

$$\mathscr{L}(\mathcal{B}(0;\theta)) = c(d)\theta^d;$$

allora troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_S |u(x)-u(z)| \; dz &\leq c\delta \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \frac{\mathscr{L}(\mathcal{B}(x;t\delta))^{\frac{1}{p'}}}{t^d} \; dt \\
&\leq c \cdot c(d)^{\frac{1}{p'}} \cdot \delta^{1+\frac{d}{p'}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 t^{\frac{d}{p'}-d} \; dt \\
&= c \cdot c(d)^{\frac{1}{p'}} \cdot \delta^{1+\frac{d}{p'}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{d}{p}}} \; dt.
\end{aligned}$$

Essendo $p > d$, si ha che

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{d}{p}}} \; dt < +\infty;$$

pertanto, esiste una costante $c_1(d;p)$ tale che

$$\int_S |u(x)-u(z)| \; dz \leq c_1(d;p) \cdot \delta^{1+\frac{d}{p'}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Ricordando che esiste una costante $c_2(d)$ tale che $\mathscr{L}(S) = c_2(d)\delta^d$, abbiamo mostrato che

$$c_2(d) \cdot \delta^d \, |u(x)-u(y)| \leq 2c_1(d;p) \cdot \delta^{1+\frac{d}{p'}} \left\|\nabla u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Riordinando i termini e rinominando le costanti, troviamo che esiste una costante $c(d;p)$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq c(d;p) \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \delta^{1-\frac{d}{p}} = c(d;p) \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^{1-\frac{d}{p}} . \tag{4.9}$$

Possiamo anche trovare una stima L^∞ su u. Sia x in $\mathbb{R}^d$; per il teorema della media integrale, esiste un punto x_0 in $\mathcal{B}(0;1)$ tale che

$$|u(x_0)|^p \leq \frac{1}{\mathscr{L}(\mathcal{B}(0;1))} \int_{\mathcal{B}(0;1)} |u(s)|^p \, ds;$$

se $c(d)$ è il volume d-dimensionale della palla unitaria, troviamo che

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{c(d)} \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

Per la stima (4.9), troviamo che esiste una costante $\gamma(d;p)$ tale che per ogni x in $\mathcal{B}(0,1)$ vale che

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |u(x_0)| + |u(x) - u(x_0)| \\ &\leq \frac{1}{c(d)} \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + c(d;p) \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \gamma(p;d) \left\{ \left\| u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right\} . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Del resto, la stima vale in ogni palla unitaria contenuta in $\mathbb{R}^d$, con le stesse costanti; dunque deduciamo che vale per ogni x in $\mathbb{R}^d$.

Step 2: Sia u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Per il teorema 4.3.3, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le proprietà seguenti:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$ puntualmente per ogni x in $\mathbb{R}^d$, a meno di modificare u in un insieme di misura nulla;
- $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∇u in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Allora, per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ per ogni n in $\mathbb{N}$, vale la disuguaglianza (4.9); prendendo il limite per n che tende a $+\infty$, si ottiene che la disuguaglianza suddetta vale anche per la funzione u. Allo stesso modo, si estende la disuguaglianza (4.10) alla funzione u, sapendo che è verificata da ogni elemento della successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Osservazione 4.5.6. Nelle ipotesi del teorema di Morrey (vedi 4.5.5), se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $\{u_n\}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∇u in $L^p(\mathbb{R}^d)$, dalle disuguaglianze (4.9) e (4.10), segue che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni equi-limitate ed equi-continue; pertanto, per il teorema di Ascoli-Arzelà, per ogni compatto K in $\mathbb{R}^d$ esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad u in K. Prendendo un'esaustione in compatti di $\mathbb{R}^d$ e applicando un procedimento diagonale, si conclude che esiste una sottosuccessione che converge ad u uniformemente in ogni insieme compatto K contenuto in $\mathbb{R}^d$.

Osservazione 4.5.7. Nelle ipotesi del teorema di Morrey (vedi 4.5.5), se u è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora è uniformemente continua e, in particolare, è infinitesima per $|x|$ che tende a $+\infty$.

Osservazione 4.5.8. Un argomento di riscalamento mostra che i teoremi di immersione (vedi 4.5.3 e 4.5.5) sono possibili soltanto per gli esponenti indicati. In particolare, $d \geq 1$ è un intero, p è in $[1, d)$ e q in $[1, +\infty)$; supponiamo che esista $M > 0$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ vale che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq M \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Allora q deve coincidere con p^*, l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2). Infatti, date u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\lambda > 0$, poniamo

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Per il teorema di composizione interna (vedi 4.3.11), allora u_λ è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\nabla u_\lambda(x) = \lambda \nabla u(\lambda x).$$

Per la formula di cambio di variabili, otteniamo che

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(\lambda x)|^q \ dx \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{d}{q}}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Analogamente, si trova che

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \lambda^p |\nabla u(\lambda x)|_p^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{d}{p}-1}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Affinchè valga

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq M \|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

per ogni $\lambda > 0$, si deve avere che

$$1 - \frac{d}{p} = -\frac{d}{q},$$

ovvero $q = p^*$.

In maniera del tutto analoga si mostra che se $p > d$, q è in α è in $(0, 1)$ ed esiste una costante c tale che per ogni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x - y|^\alpha,$$

allora α deve coincidere con $1 - \frac{d}{p}$.

Teorema 4.5.9 (Immersioni di ordine superiore)**.**
Siano $d \geq 2$ un intero, p in $[1, +\infty]$ e $m \geq 1$ un intero.

1. *Supponiamo $mp < d$ e sia q tale che*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d},$$

cioè

$$q = \frac{dp}{d - mp}.$$

Esiste una costante $c(d; p; m)$ dipendente solo da p, d, m tale che per ogni u in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; m) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

2. *Supponiamo $mp = d$. Per ogni q in $[p, +\infty)$ esiste una costante $c(d; p; q; m)$ dipendente solo da d, p, q, m tale che per ogni u in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ vale che*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; q; m) \|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} .$$

3. *Supponiamo $mp > d$. Esiste una costante $c(d; p; m)$ dipendente solo da d, p, m tale che per ogni u in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ vale che*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; m) \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

Supponiamo che $\frac{d}{p}$ non sia un intero e poniamo

$$h = \left[m - \frac{d}{p} \right] ;$$

ovviamente h è in $(0, 1)$. Vale che u appartiene a $C^{h,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ con

$$\alpha = m - \frac{d}{p} - h$$

e per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ per ogni β in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\beta| = h$ vale che

$$\left| D^\beta u(x) - D^\beta u(y) \right| \leq c(d; p; m) \sum_{h \leq |\gamma| \leq m} \|D^\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x - y|^\alpha .$$

Dimostrazione. **Step 1**: Analizziamo il primo caso. Procediamo per induzione su m. Il passo base ($m = 1$) è stato dimostrato nel teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.5.3). Infatti, basta osservare che

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

Supponiamo l'enunciato vero per l'ordine di derivazione m e mostriamo che vale per l'ordine $m + 1$. Dunque, supponiamo $(m + 1)p < d$; in particolare, vale $mp < d$. Ovviamente, se u è in $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d)$, allora u e ∇u sono in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Per ipotesi induttiva, esiste una costante $c(d; p; m)$ tale che, detto $q := \frac{dp}{d-mp}$, vale che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ,$$

$$\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; p; m) \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha (\nabla u)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} .$$

In particolare, deduciamo che u appartiene a $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$; osserviamo che nelle nostre ipotesi vale $q < d$. Per il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.5.3), esiste una costante $c(d; q)$ tale che

$$\|u\|_{L^{q^*}(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; q) \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d; q) c(d; p; m) \sum_{|\alpha| = m+1} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ,$$

dove q^* è l'esponente di Sobolev relativo a q (vedi 4.5.2). Per concludere, basta osservare che

$$q^* = \frac{dp}{d - p(m+1)},$$

che è l'esponente desiderato.

Step 2: Analizziamo il secondo caso, procedendo per induzione su m. Il passo base ($m = 1$) è stato dimostrato nel teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.5.3). Supponiamo l'enunciato vero per l'ordine di derivazione m e mostriamo che vale per l'ordine $m+1$. Dunque, supponiamo $(m+1)p = d$. Sia u in $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d)$; ovviamente u e ∇u sono in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Essendo $mp < d$, se poniamo $q \coloneqq \frac{dp}{d-mp}$, per quanto mostrato nel primo step, vale che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha(\nabla u)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

In particolare, deduciamo che u appartiene a $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$. Nelle nostre ipotesi, vale che $q = d$; per il corollario 4.5.4, per ogni r in $[q, +\infty)$ esiste una costante $c(d;q;r)$ tale che

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q;r) \|u\|_{1,q,\mathbb{R}^d} \leq c(d;q;r)c(d;p) \|u\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d}.$$

Essendo $q > p$ e u una funzione in $L^p(\mathbb{R}^d)$, per la disuguaglianza di interpolazione, per ogni r in $[p, +\infty)$ vale che

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q;r) \|u\|_{1,q,\mathbb{R}^d} \leq c(d;q;r)c(d;p) \|u\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d}.$$

.

Step 3: Analizziamo il terzo caso. Procediamo per induzione su m. Il passo base ($m = 1$) è dato dal teorema di Morrey. Supponiamo l'enunciato vero per l'ordine di derivazione m e mostriamo che vale per l'ordine $m+1$. Supponiamo $(m+1)p > d$; sia u in $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d)$.

- Se $mp < d$, poniamo
$$q \coloneqq \frac{dp}{d - mp}.$$
Vale che u e ∇u appartengono a $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$; per quanto mostrato nel primo step, otteniamo che u e ∇u appartengono a $L^q(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una costante $c(d;q)$ tale che
$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$
$$\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;q) \sum_{|\alpha|=m} \|\nabla(D^\alpha u)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)};$$
dunque u è in $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$. Osserviamo che nelle nostre ipotesi, vale che $q > d$; per il teorema di Morrey (vedi 4.5.5) esiste una costante $c(d;p)$ tale che
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p) \|u\|_{1,q,\mathbb{R}^d} \leq c(d;p)c(c;p;m) \|u\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d}.$$

Inoltre per quasi ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq c(d;p) \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} |x-y|^{\alpha'} \\
&\leq c(d;p;m)c(d;p) \left\|D^{m+1}u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^{\alpha'},
\end{aligned}
$$

dove $\alpha' := 1 - \frac{d}{q}$. Si conclude osservando che

$$\alpha' = m + 1 - \frac{d}{p} = \alpha.$$

- Se $mp = d$, osserviamo che $\frac{d}{p}$ è un intero. Come verificato, abbiamo che u e ∇u sono funzioni in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Per quanto dimostrato nel secondo step, per ogni q in $[p, +\infty)$ esiste una costante $c(d;p;q;m)$ tale che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;q;m) \|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d},$$

$$\|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;q;m) \|\nabla u\|_{m,p,\mathbb{R}^d}.$$

Allora u appartiene a $W^{1,q}(\mathbb{R}^d)$ per ogni q in $[p, +\infty)$. Scegliendo $q := p(m+1)$, possiamo applicare il teorema di Morrey (vedi 4.5.5) e otteniamo che

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;q) \|u\|_{1,q,\mathbb{R}^d} \leq c'(d;p;q;m) \|u\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d}.$$

Questo conclude la dimostrazione di questo caso.

- Se $mp > d$, essendo u in $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva e troviamo che

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;m) \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;m) \sum_{|\alpha| \leq m+1} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

che è la disuguaglianza cercata. Inoltre, se poniamo

$$h' := \left[m - \frac{d}{p}\right],$$

allora u e ∇u appartengono a $C^{h',\alpha'}(\mathbb{R}^d)$, con

$$\alpha' := m - \frac{d}{p} - h'.$$

Inoltre per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ per ogni multi-indice β in $\mathbb{N}^d$ con $|\beta| = h'$ vale che

$$\left|D^\beta \nabla u(x) - D^\beta \nabla u(y)\right| \leq c(d;p;m) \sum_{h' \leq |\gamma| \leq m} \|D^\gamma \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^{\alpha'}.$$

Osservando che $h = h' + 1$ e

$$\alpha = m - \frac{d}{p} - (h-1) = m + 1 - \frac{d}{p} - h = \alpha,$$

deduciamo che per ogni multi-indice β in $\mathbb{N}^d$ di cardinalità h per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right| \leq c(d;p;m) \sum_{h \leq |\gamma| \leq m+1} \|D^\gamma u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |x-y|^\alpha .$$

Per concludere, dobbiamo soltanto provare che u è una funzione di classe $C^h(\mathbb{R}^d)$, avendo già mostrato la regolarità delle derivate di ordine h. Per il teorema 4.3.3, esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge ad u rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d}$. Per ipotesi induttiva, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|u - u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;m) \|u-u_n\|_{m,p,\mathbb{R}^d} ,$$

$$\|\nabla u - \nabla u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;m) \|\nabla u - \nabla u_n\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \|u-u_n\|_{m+1,p,\mathbb{R}^d} .$$

Deduciamo che le successioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono rispettivamente a u e ∇u uniformemente in $\mathbb{R}^d$. Questo basta a concludere che u è di classe $C^1(\mathbb{R}^d)$ e ∇u è il suo gradiente inteso in senso classico. Essendo ∇u di classe $C^{h',\alpha'}(\mathbb{R}^d)$, concludiamo che u è di classe $C^{h,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ e questo conclude la dimostrazione.

□

4.5.2 Immersione per aperti regolari

Teorema 4.5.10. *Siano $d \geq 2$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ un intero e p in $[1,+\infty)$. Supponiamo che esista una 1-estensione forte E_1 (vedi 4.4.1). Allora valgono le seguenti alternative:*

- *se $mp < d$, sia q tale che*
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d};$$
esiste una costante $c(d;p;m)$ tale che per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ vale che
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p;m) \|u\|_{m,p,\Omega} ;$$
- *se $mp = d$ per ogni q in $[p,+\infty)$ esiste una costante $c(d;p;q;m)$ tale che per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p;m) \|u\|_{m,p,\Omega} ;$$
- *Supponiamo $mp > d$. Esiste una costante $c(d;p;m;\Omega)$ dipendente solo da d, p, m, Ω tale che per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(d;p;m) \|u\|_{m,p,\Omega} .$$
Supponiamo che $\frac{d}{p}$ non sia un intero e poniamo
$$h = \left[m - \frac{d}{p}\right] ;$$
ovviamente h è in $(0,1)$. Vale che u appartiene a $C^{h,\alpha}(\Omega)$ con
$$\alpha = m - \frac{d}{p} - h$$
e per ogni x, y in Ω per ogni β in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\beta| = h$ vale che
$$\left|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)\right| \leq c(d;p;m) \|u\|_{m,p,\Omega} |x-y|^\alpha .$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m.

Step 1: Supponiamo $m = 1$: avendo esteso le funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$ a funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, la tesi è una banale conseguenza del teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.5.3), del corollario 4.5.4, del teorema di Morrey (vedi 4.5.5) e della definizione di 1-estensione forte (vedi 4.4.1).

Step 2: Supponiamo che l'enunciato sia vero per l'ordine di derivazione m e mostriamo che vale per l'ordine $m + 1$. In questo caso, si può facilmente adattare la dimostrazione data in 4.5.9, osservando che l'ipotesi che E_1 sia soltanto una 1-estensione forte è sufficiente. $\square$

Esempio 4.5.11. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la palla bidimensionale centrata nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$. Definiamo la funzione $u : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = \log(|\log(|x|)|).$$

Vogliamo mostrare che u è in $W^{1,2}(\mathcal{B})$; tuttavia, è ovvio che u non appartiene a $L^\infty(\mathcal{B})$. Innanzitutto osserviamo che se u appartiene a $L^2(\mathcal{B})$; infatti, per la formula di cambio di variabili, vale che

$$\int_{\mathcal{B}} |u(x)|^2 \ dx = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} |\log(\log(r))|^2 \, r \ dr < +\infty.$$

Per ogni r in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ poniamo

$$\psi(r) \coloneqq \log(|\log(r)|);$$

pertanto vale che $u(x) = \psi(|x|)$. Essendo ψ una funzione di classe $C^1(\left(0; \frac{1}{2}\right)$ si trova che u appartiene a $C^1(\mathcal{B} \setminus \{0\})$ e per ogni x in $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ vale

$$\nabla u(x) = \psi'(|x|) \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x| \log(|x|)} \frac{x}{|x|}.$$

Possiamo facilmente calcolare

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathcal{B})} &= \int_{\mathcal{B}} \frac{|x|^2}{(\log(|x|))^2 \, |x|^4} \ dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r(\log(r))^2} \ dr \\ &= \frac{1}{\log(2)}. \end{aligned}$$

Per concludere, data una funzione test φ in $C_c^\infty(\mathcal{B})$, mostriamo che per ogni i in $\{1; 2\}$ vale

$$\int_{\mathcal{B}} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \ dx.$$

Per ogni r in $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ per ogni t in $[0, 2\pi]$ denotiamo con

$$\gamma_r(t) = r(\cos(t); -\sin(t))$$

una parametrizzazione in senso orario della circonferenza centrata nell'origine e di raggio r. Poniamo $C_r \coloneqq \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}(0; r)$. Essendo u e ∇u in $L^1(\mathcal{B})$, per il teorema di convergenza dominata vale che

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx = \int_{\mathcal{B}} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ dx,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}\ dx=\int_{\mathcal{B}}\varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}\ dx,$$

Inoltre, per il teorema della divergenza, per ogni r in $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ vale che

$$\int_{C_r}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ dx=\int_{\gamma_r}u\varphi\nu_i\ ds-\int_{C_r}\varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}\ dx,$$

dove ν_i è l'i-esima componente della normale unitaria uscente da γ_r. Dunque, per concludere basta mostrare che

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}u\varphi\nu_i\ ds=0.$$

Per questo, basta osservare che

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_r}\varphi u\nu_i\ ds\right|&\leq\|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{B})}\int_{\gamma_r}|u|\ ds\\&=\|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{B})}2\pi r\left|\log(|\log(|r|)|)\right|.\end{aligned}$$

Esempio 4.5.12. Siano $d\geq 2$ un intero e p in $(1,d)$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la palla d-dimensionale centrata nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$. Vogliamo cercare una funzione u in $W^{1,p}(\mathcal{B})$ tale che per ogni $q>p^*$ vale che u non appartiene a $L^q(\mathcal{B})$ (p^* è l'esponente di Sobolev relativo a p, come in 4.5.2). Poniamo

$$u(x):=\frac{1}{|x|^{\frac{d}{p}-1}\left|\log(|x|)\right|}.$$

Vale che

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{|x|^{\frac{d}{p}-1}\left|\log(|x|)\right|}\right)^p dx&=c_d\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r^{d-1}}{r^{d-p}\left|\log(r)\right|^p}\ dr\\&=c_d\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r^{p-1}}{\left|\log(r)\right|}\ dr<+\infty,\end{aligned}$$

dove c_d indica il volume $d-1$-dimensionale della sfera unitaria. Si calcola facilmente che

$$\nabla u(x)=x\frac{1-\frac{d}{p}\log(|x|)}{|x|^{\frac{d}{p}+1}\log(|x|)^2};$$

Dunque, otteniamo che

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{B})}&\leq c\int_{\mathcal{B}}\left(\frac{1-\log(|x|)}{|x|^{\frac{d}{p}}\log(|x|)^2}\right)^p dx\\&=cc_d\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-\log(r))^p r^{d-1}}{r^d\log(|r|)^{2p}}\ dr\\&=cc_d\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-\log(r))^p}{r\log(|r|)^{2p}}\ dr<+\infty,\end{aligned}$$

essendo $p>1$ (c_d è il volume $d-1$-dimensionale della sfera unitaria e c è una costante positiva dovuta al fatto che la norma euclidea e la norma p-esima sono equivalenti in

$\mathbb{R}^d$). Come mostrato dettagliatamente nell'esempio 4.5.11, si trova che u appartiene a $W^{1,p}(\mathcal{B})$. Sia q in $(1,+\infty)$; si ha che

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\mathcal{B})}^q &= \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{|x|^{\frac{d}{p}-1} |\log(|x|)|} \right)^q dx \\ &= c_d \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{d-1}}{r^{\frac{dq}{p}-q} |\log(r)|^q} dr \\ &= c_d \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^{d-1+q-\frac{qd}{p}}}{|\log(r)|^q} dr.\end{aligned}$$

Tale integrale è convergente se e solo se

$$d-1+q-\frac{qd}{p} \geq -1,$$

che è equivalente a richiedere che

$$q \leq \frac{dp}{d-p} = p^*,$$

con p^* l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2).

Esempio 4.5.13. Siano $\Omega := (-1,0) \cup (0,1)$ e $u(x) := \mathbb{1}_{(-1,0)} - \mathbb{1}_{(0,1)}$. Ovviamente u appartiene a $W^{m,p}(\Omega)$ per ogni $m \geq 1$ per ogni p in $[1,+\infty]$; tuttavia, non può essere estesa ad una funzione in $W^{m,p}(\mathbb{R})$ e non può essere approssimata con funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ nel senso del teorema 4.4.2.

Se, invece, $\Omega := \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right)$, possiamo definire

$$u(x) := \sum_{n\geq 1} |\ln n| \, \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)}.$$

Allora, è ovvio che u appartiene a $W^{m,p}(\Omega)$ per ogni $m \geq 1$ e per ogni p in $[1,+\infty)$; tuttavia u non è limitata.

4.5.3 Immersione compatta

Teorema 4.5.14 (Rellich-Kondrakov).
Siano $d \geq 2$, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1,+\infty]$. Supponiamo che Ω sia limitato e vale il teorema di immersione (vedi 4.5.10). Allora valgono le seguenti alternative:

- *se $p < d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta per ogni q in $[1,p^*)$, dove p^* è l'esponente di Sobolev (vedi 4.5.2);*
- *se $p = d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta per ogni q in $[p,+\infty)$;*
- *se $p > d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ è compatta.*

Dimostrazione. **Caso 1**: Supponiamo $p < d$. Per ogni k in $\mathbb{N}$ definiamo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; \operatorname{dist}(x;\partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Essendo Ω limitato, vale che

$$\lim_{k\to+\infty} \mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k) = 0.$$

Estendiamo u a 0 fuori da Ω e denotiamo ancora con u tale estensione. Siano p^* l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2) e $(p^*)'$ l'esponente coniugato di p^* (vedi 2.1.5); osserviamo che $p^* > 1$. Vogliamo mostrare che esiste una costante $c(d;p;\Omega)$ tale che per ogni $k \geq 1$ per ogni h in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_k)} \leq 2c(d;p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega} \mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k)^{\frac{1}{(p^*)'}}.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, la disuguaglianza di Hölder e il teorema di immersione (vedi 4.5.10), troviamo che

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_k)} &\leq \|u\|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_k)} + \|\tau_h u\|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_k)} \\
&\leq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k)^{\frac{1}{(p^*)'}} + \|\tau_h u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k)^{\frac{1}{(p^*)'}} \\
&\leq 2c(d;p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega} \mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k)^{\frac{1}{(p^*)'}}.
\end{aligned}$$

Mostriamo che per ogni intero positivo k per ogni h in $\mathbb{R}^d$ tale che $|h| \leq \frac{1}{k}$ vale che

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega_k)} \leq |h|_{p'}\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

dove p' è l'esponente coniugato a p (eventualmente $+\infty$). Essendo $|h| \leq \frac{1}{k}$ per ogni x in Ω_k vale che $x+h$ appartiene ancora ad Ω. Poniamo $\psi(x) := u(ht+x)$. Essendo u in $W^{1,p}(\Omega)$, ψ è in $W^{1,p}((0,1))$ (vedi 4.1.4) e inoltre vale la formula

$$\begin{aligned}
|u(x+h) - u(x)| &= |\psi(1) - \psi(0)| \\
&= \left| \int_0^1 \psi'(t)\ dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 < h, \nabla u(x+th) >\ dt \right| \\
&\leq |h|_{p'} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|_p\ dt.
\end{aligned}$$

Integrando e applicando la disuguaglianza di Hölder, si trova che

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} |u(x+h) - u(x)|\ dx &\leq |h|_{p'} \int_{\Omega_k} \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)|_p\ dt \right) dx \\
&= |h|_{p'} \int_0^1 \left(\int_{\Omega_k} |\nabla u(x+th)|_p\ dx \right) dt \\
&\leq |h|_{p'} \int_0^1 \left(\int_{\Omega_k} |\nabla u(x+th)|_p^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&\leq |h|_{p'}\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\, \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Sia $M > 0$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|u\|_{1,p,\Omega} \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni h in $\mathbb{R}^d$ tale che $|h| \leq \delta$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Allora possiamo concludere che la famiglia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è relativamente compatta in $L^1(\Omega)$ per il teorema 2.3.3. Per quanto mostrato, per ogni k in $\mathbb{N}$ per ogni h in $\mathbb{R}^d$ tale che $|h| \leq \frac{1}{k}$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)} &= \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_k)} + \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega_k)} \\
&\leq 2c(d;p;\Omega) \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)} + |h|_{p'} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
&\leq \|u_n\|_{1,p,\Omega} \left[2c(d;p;\Omega) \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)} + |h|_{p'} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)}\right] \\
&\leq M \left[2c(d;p;\Omega) \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{(p^*)'}(\Omega)} + |h|_{p'} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)}\right].
\end{aligned}$$

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere k_0 tale che per ogni h in $\mathbb{R}^d$ tale che $|h| \leq \frac{1}{k_0}$ vale

$$|h|_{p'} \|\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

e inoltre

$$\mathscr{L}(\Omega \setminus \Omega_k)^{\frac{1}{(p^*)'}} \leq \frac{\varepsilon}{4Mc(d;p;\Omega)}.$$

Allora, troviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni h in $\mathbb{R}^d$ tale che $|h| \leq \frac{1}{k_0}$ vale che

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Infine, sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, cioè tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|u_n\|_{1,p,\Omega} \leq M.$$

Sia q in $[1, p^*)$. Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni h in $\mathbb{R}^d$ con $|h| \leq \delta$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon;$$

in tal caso, possiamo concludere che la famiglia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è relativamente compatta in $L^q(\Omega)$ per il teorema 2.3.3. Per la disuguaglianza di interpolazione esiste θ in $[0, 1]$ tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni h in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u_n - u_n\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)}^\theta \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{1-\theta} \\
&\leq \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)}^\theta \left[\|\tau_h u\|_{L^{p^*}} + \|u\|_{L^{p^*}}\right]^{1-\theta} \\
&\leq \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)}^\theta \left[2 \|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}\right]^{1-\theta} \\
&\leq \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)}^\theta \left[2c(d;p)M\right]^{1-\theta} \\
&= M' \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^1(\Omega)}^\theta,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di immersione (vedi 4.5.10). Questo è sufficiente a concludere che la famiglia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soddisfa la richiesta suddetta.

Caso 2: Supponiamo $p = d$. Sia q in $[p, +\infty)$. Sia $p_1 < d$ tale che $q < p_1^*$ (p_1^* è l'esponente di Sobolev relativo a p_1, come definito in 4.5.2); essendo Ω un aperto limitato (in particolare, $\mathscr{L}(\Omega) < +\infty$) una successione limitata in $W^{1,d}(\Omega)$ è limitata anche in $W^{1,p_1}(\Omega)$. Allora l'immersione $i : W^{1,p_1}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta per quanto mostrato nel primo caso. Concludiamo che una successione limitata in $W^{1,d}(\Omega)$ ammette una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$.

Caso 3: Supponiamo $p > d$; se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, per il teorema di Morrey (vedi 4.5.5), $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione puntualmente equi-limitata e equi-continua; essendo $\overline{\Omega}$ un insieme compatto in $\mathbb{R}^d$, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente ad una funzione u_∞; dunque abbiamo la tesi. □

Esempio 4.5.15. Dato un intero $d \geq 2$ e $M > 0$, sia $\mathcal{B}$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^d$; siano p in $[1, +\infty)$ e p^* l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2). Vogliamo mostrare che l'immersione $i : W^{1,p}(\mathcal{B}) \to L^{p^*}(\mathcal{B})$ non è compatta. Osserviamo che esiste una successione di punti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ed una successione di raggi $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che, se denotiamo con $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}(x_n; r_n)$, le palle $\{\mathcal{B}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono a due a due disgiunte e tutte contenute in $\mathcal{B}$. Sia u una funzione non identicamente nulla di classe $C_c^\infty(\mathcal{B})$; per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $\mathcal{B}_n$ definiamo

$$u_n(x) := \frac{1}{r_n^{\frac{d}{p}-1}} u\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right).$$

Se estendiamo u_n a 0 fuori da $\mathcal{B}_n$ per ogni n in $\mathbb{N}$, otteniamo una successione di funzioni in $C_c^\infty(\mathcal{B})$. Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathcal{B})}^p &= \int_{\mathcal{B}_n} \left[\frac{1}{r_n^{\frac{d}{p}}} \left|\nabla u\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)\right|_p\right]^p dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{r_n^d} |\nabla u(y)|_p^p r_n^d \, dy \\
&= \int_{\mathcal{B}} |\nabla u(y)|_p^p \, dy \\
&= \|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{B})}^p .
\end{aligned}$$

Analogamente, si trova che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_{L^p(\mathcal{B})}^p \, dx &= \int_{\mathcal{B}_n} \left|\frac{1}{r_n^{\frac{d}{p}-1}} u\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)\right|^p dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{r_n^{-p}} |u(y)|^p \, dy \\
&= r_n^p \|u\|_{L^p(\mathcal{B})}^p \\
&\leq \|u\|_{L^p(\mathcal{B})}^p .
\end{aligned}$$

Dunque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $W^{1,p}(\mathcal{B})$. Tuttavia, essendo le palle $\{\mathcal{B}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ a due a due disgiunte, per ogni $n \neq m$ vale che

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathcal{B})}^{p^*} &= \int_{\mathcal{B}_n} \left|\frac{1}{r_n^{\frac{d}{p}-1}} u\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)\right|^{p^*} dx + \int_{\mathcal{B}_m} \left|\frac{1}{r_m^{\frac{d}{p}-1}} u\left(\frac{x - x_m}{r_m}\right)\right|^{p^*} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} r_n^d \left|\frac{1}{r_n^{\frac{d}{p}-1}} u(y)\right|^{p^*} dy + \int_{\mathcal{B}} r_m^d \left|\frac{1}{r_m^{\frac{d}{p}-1}} u(y)\right|^{p^*} dy \\
&= \|u\|_{L^{p^*}(\mathcal{B})}^{p^*} \left[r_n^{d+p^*-\frac{dp^*}{p}} + r_m^{d+p^*-\frac{dp^*}{p}}\right] \\
&= 2\|u\|_{L^{p^*}(\mathcal{B})}^{p^*} ,
\end{aligned}$$

essendo $d + p^* - \frac{dp^*}{p} = 0$. Dunque $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può ammettere sottosuccessioni di Cauchy in $L^{p^*}(\mathcal{B})$, quindi non esistono sottosuccessioni convergenti in $L^{p^*}(\mathcal{B})$. Del resto, è facile mostrare che se $q < p^*$, allora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 0 in $L^q(\Omega)$.

4.6 Traccia per funzioni di Sobolev

4.6.1 Traccia nel caso modello

Nel seguito, dato un intero $d \geq 2$, denoteremo un punto in $\mathbb{R}^d$ come (x, y), con x in $\mathbb{R}^{d-1}$ e y in $\mathbb{R}$. Denoteremo

$$\mathbb{R}^d_+ := \{(x; y) \in \mathbb{R}^d \mid y > 0\}.$$

Data una funzione u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ vogliamo definire in qualche senso la sua restrizione all'iperpiano dato da

$$\partial\mathbb{R}^d_+ = \{(x; y) \in \mathbb{R}^d \mid y = 0\}.$$

Lemma 4.6.1. *Siano $d \geq 2$ e p in $[1, +\infty)$. Esiste una costante $c(d; p)$ dipendente soltanto da d, p tale che per ogni u in $C^1_c(\mathbb{R}^d)$ vale la stima seguente:*

$$\|u(\cdot; 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq c(d; p)\, \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d_+}.$$

Se p appartiene a $[1, d)$, poniamo $q := \frac{(d-1)p}{d-p}$. Esiste una costante $c(d; p)$ dipendente solo da d, p tale che per ogni u in $C^1_c(\mathbb{R}^d_+)$ vale che

$$\|u(\cdot; 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq c(d; p)\, \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d_+}.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo $p = 1$. Sia u una funzione di classe $C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Per ogni x in $\mathbb{R}^{d-1}$ vale che

$$u(x; 0) = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x; y)\, dy;$$

dunque, otteniamo che

$$|u(x; 0)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x; y)\right|\, dy.$$

Integrando, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x; 0)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x; y)\right|\, dy\right) dx = \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d_+)}.$$

Step 2: Supponiamo p in $(1, +\infty)$. Per ogni $r > 0$, poniamo $\varphi_r(\sigma) := |\sigma|^r \sigma$; osserviamo che φ_r è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e vale

$$\varphi_r'(\sigma) = (r + 1)\, |\sigma|^r.$$

Sia u una funzione di classe $C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Poniamo $v := \varphi_r \circ u$; osserviamo che v è una funzione di classe $C^1_c(\mathbb{R})$. Per quanto mostrato, vale che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x; 0)|\, dx \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d_+)}.$$

Nel nostro caso, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x;0)| \;\; dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x;0)|^{r+1} \;\; dx = \|u(\cdot;0)\|^{r+1}_{L^{r+1}(\mathbb{R}^{d-1})} .$$

Inoltre, applicando la disuguaglianza di Hölder (p' in $(1,+\infty)$ è l'esponente coniugato di p, come in 2.1.5), si trova che

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d_+)} &= \int_{\mathbb{R}^d_+} \left| \frac{\partial v}{\partial y}(x;y) \right| \;\; dxdy \\
&= (r+1) \int_{\mathbb{R}^d_+} |u(x;y)|^r \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right| \;\; dxdy \\
&\leq (r+1) \left(\int_{\mathbb{R}^d_+} |u(x;y)|^{rp'} \;\; dxdy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d_+} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right|^p \;\; dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (r+1) \|u\|^r_{L^{rp'}(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che vale

$$\|u(\cdot;0)\|^{r+1}_{L^{r+1}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq (r+1) \|u\|^r_{L^{rp'}(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$

Imponendo che $rp' = p$, da cui $r = p-1$, otteniamo che

$$\|u(\cdot;0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq p \|u\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \leq p \|u\|^p_{1,p,\mathbb{R}^d_+} .$$

Step 3: Sia p in $[1,d)$; osserviamo che se $p=1$ vale che $q=p=1$ e abbiamo già ottenuto la stima desiderata. Dunque, supponiamo p in $(1,d)$; in tal caso, osserviamo che q appartiene a (p,p^*), dove p^* è l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2). Data u in $C^1_c(\mathbb{R}^d)$ e $r>0$, ragionando come nel secondo step, troviamo che

$$\|u(\cdot;0)\|^{r+1}_{L^{r+1}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq (r+1) \|u\|^r_{L^{rp'}(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$

Imponendo che $rp' = p^* = \frac{dp}{d-p}$, si trova che $r = \frac{d(p-1)}{d-p}$ e quindi $r+1=q$. Allora abbiamo che

$$\|u(\cdot;0)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq q \|u\|^{q-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$

Per il teorema di immersione nel caso modello (vedi 4.5.10) esiste una costante $c(d;p)$ dipendente solo da d,p tale che

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot;0)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq q \|u\|^{q-1}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d_+)} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \\
&\leq qc(d;p)^q \|u\|^{q-1}_{1,p,\mathbb{R}^d_+} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \\
&\leq qc(d;p)^q \|u\|^q_{1,p,\mathbb{R}^d_+} .
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.6.2 (Traccia per funzioni di Sobolev in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$)**.**
Siano $d \geq 2$ un intero e p in $[1, +\infty)$. Esiste un'applicazione lineare $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ con le seguenti proprietà:

- *esiste una costante $c(p)$ dipendente da p tale che per ogni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ vale che*
$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq c(p) \, \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d_+} \, ;$$
- *vale una formula della divergenza, cioè per ogni $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ in $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ vale che*
$$\int_{\mathbb{R}^d_+} u div(\varphi) \; dxdy = -\int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \varphi > dxdy + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} [\mathrm{Tr}(u)] < \varphi, \nu > \; dx,$$
dove ν è la normale esterna a $\partial\mathbb{R}^d_+$, ovvero $\nu \equiv (0; \ldots; 0; 1)$);
- *coincide con la restrizione a $\partial\mathbb{R}^d_+$ per le funzioni continue in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ che si estendono con continuità fino in $\overline{\mathbb{R}^d_+}$.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathbb{X}$ l'insieme delle funzioni $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ ristrette al semispazio $\mathbb{R}^d_+$. Per ogni u in $\mathbb{X}$ definiamo
$$\mathrm{Tr}(u) := u_{\big|\partial\mathbb{R}^d_+}.$$
Per il lemma 4.6.1, la mappa
$$\mathrm{Tr} : \mathbb{X} \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$$
è ben definita ed è lineare. Inoltre, se dotiamo $\mathbb{X}$ della norma $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}^d_+}$, il lemma 4.6.1 garantisce che Tr è anche continua. Per il teorema 4.4.2, il sottospazio $\mathbb{X}$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Allora Tr si estende ad un'applicazione che denotiamo ancora con $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ che è lineare e continua.

Sia φ una funzione in $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che u appartenga al sottospazio $\mathbb{X}$. Allora, per la formula della divergenza classica vale
$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \mathrm{udiv}(\varphi) \; dxdy = -\int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \varphi > dxdy + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} [\mathrm{Tr}(u)] < \varphi, \nu > \; dx,$$
Dal momento che φ ha supporto compatto in $\mathbb{R}^d$, tutti gli integrali coinvolti sono su insiemi di misura finita. Ricordando che la convergenza in L^p implica la convergenza in L^1 su insiemi di misura finita, allora la formula si estende per densità a tutte le funzioni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$.

Supponiamo, infine, che u sia una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^d_+})$. Vogliamo mostrare che $\mathrm{Tr}(u)$ è la restrizione di u a $\partial\mathbb{R}^d_+$. Denotiamo con $\hat{u}$ l'estensione per parità di u a tutto $\mathbb{R}^d$ (vedi 4.4.4). Abbiamo mostrato che $\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ (vedi 4.4.5). Osserviamo che $\hat{u}$ è ancora una funzione continua. Approssimando $\hat{u}$ per convoluzione e con delle cut-off come nel teorema 4.3.3, si mostra che esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di classe $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ che converge a $\hat{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e che converge puntualmente ad $\hat{u}$ in tutti i punti in cui $\hat{u}$ è continua, cioè ovunque in $\mathbb{R}^d$. Essendo l'operatore Tr continuo, otteniamo che $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u)$. In conclusione otteniamo che $\mathrm{Tr}(u)$ è la restrizione di u a $\partial\mathbb{R}^d_+$. □

Osservazione 4.6.3. Nel teorema 4.6.2, supponiamo p in $[1, d)$ e poniamo $q := \frac{p(d-1)}{d-p}$; denotiamo ancora con $\mathbb{X}$ il sottospazio di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ formato dalla restrizione al semispazio $\mathbb{R}^d_+$ di funzioni di classe $C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Per il lemma 4.6.1, per ogni u in $\mathbb{X}$ vale che $\mathrm{Tr}(u)$ appartiene a $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$ ed esiste una costante $c(d;p)$ indipendente da u tale che

$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq c(d;p) \|u\|_{1,p,\mathbb{R}^d_+} .$$

Allora possiamo estendere per densità Tr ad un'applicazione lineare e continua $\mathrm{Tr}_1 : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^q(\mathbb{R}^{d-1})$. Ovviamente le due estensioni coincidono (data una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad u in L^p e a v in L^q, allora u e v coincidono quasi ovunque, come si mostra passando a sottosuccessioni che coincidono quasi ovunque).

Osservazione 4.6.4. Nel teorema 4.6.2, supponiamo $p > d$. Per il teorema di Morrey (vedi 4.5.5), le funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ sono $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d}\right)$-hölderiane, pertanto si estendono con continuità a $\partial\mathbb{R}^d_+$. Allora l'applicazione Tr è la restrizione su $\partial\mathbb{R}^d_+$.

Osservazione 4.6.5. Nel teorema 4.6.2, abbiamo definito la traccia di una funzione di Sobolev sull'iperpiano $\{y = 0\}$. Dato $y_0 > 0$, possiamo definire in maniera totalmente analoga la traccia di una funzione di Sobolev sull'iperpiano $\{y = y_0\}$. Tale applicazione gode ovviamente delle stesse proprietà enunciate nel teorema 4.6.2.

Proposizione 4.6.6. *Sia p in $(1, +\infty)$ Sia $y_0 \geq 0$ e denotiamo con $\mathrm{Tr}_{y_0} : W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ l'applicazione traccia sull'iperpiano $\{y = y_0\}$ in $\mathbb{R}^d$ (vedi 4.6.5). Per ogni $y_1, y_2 \geq 0$ per ogni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ vale la seguente disuguaglianza:*

$$\|\mathrm{Tr}_{y_2}(u) - \mathrm{Tr}_{y_1}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq |y_2 - y_1|^{\frac{1}{p'}} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} ,$$

dove p' in $(1, +\infty)$ è l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5).

Dimostrazione. Fissiamo $y_2 > y_1 \geq 0$.

Step 1: Supponiamo u di classe $C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Per ogni x in $\mathbb{R}^{d-1}$ vale che

$$\begin{aligned} |u(x;y_2) - u(x;y_1)| &= \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\ dy \right| \\ &\leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right|\ dy \\ &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right|^p\ dy \right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Elevando alla p e integrando in $\mathbb{R}^{d-1}$ si trova che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x;y_2) - u(x;y_1)|^p\ dx &\leq (y_2 - y_1)^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right|^p\ dy \right)\ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d_+} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x;y) \right|^p\ dxdy, \end{aligned}$$

da cui segue banalmente che

$$\|\mathrm{Tr}_{y_2}(u) - \mathrm{Tr}_{y_1}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$

Step 2: Siano u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ che converge ad u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ (vedi 4.4.2). Per la continuità della traccia (vedi 4.6.2), vale che $\{\mathrm{Tr}_{y_1}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathrm{Tr}_{y_2}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono rispettivamente a $\mathrm{Tr}_{y_1}(u)$ e $\mathrm{Tr}_{y_2}(u)$ in $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$. Per quanto mostrato nel primo step, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|\mathrm{Tr}_{y_2}(u_n) - \mathrm{Tr}_{y_1}(u_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq |y_2 - y_1|^{\frac{1}{p'}} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)}.$$

Passando al limite per n che tende a $+\infty$, si ottiene la disuguaglianza desiderata anche per u. $\square$

Teorema 4.6.7 (Dipendenza continua della traccia).
Siano $d \geq 2$ un intero, p in $(1,+\infty)$ (estremi esclusi) e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Supponiamo che

- *esiste una funzione u_∞ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ in $L^p(\mathbb{R}^d_+)$,*
- *esiste una costante M tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che*

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \leq M.$$

Allora u_∞ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ e $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ in $L^p(\mathbb{R}^{d-1})$. Se $p < d$ la convergenza è in $L^r(\mathbb{R}^{d-1})$ per ogni r in $\left[p, \frac{p(d-1)}{d-p}\right)$.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che u_∞ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$. Infatti, per la debole compattezza delle palle chiuse in $L^p(\mathbb{R}^d_+)$ (vedi 2.4.16), a meno di sottosuccessioni vale che $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in L^p ad una funzione $v_\infty : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d$. Poichè $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in L^p a u_∞, vale che u_∞ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ e $\nabla u_\infty = v_\infty$. Inoltre vale anche che

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \leq M.$$

Per ogni $k \geq 0$ denotiamo con Tr_k la traccia delle funzioni di Sobolev sull'iperpiano $\{y = k\}$. Per ogni n in $\mathbb{N}$, per ogni $k \geq 0$ vale

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \\
&\leq (\|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_k(u_n)\|_{L^p} + \|\mathrm{Tr}_k(u_n) - \mathrm{Tr}_k(u_\infty)\|_{L^p} + \|\mathrm{Tr}_k(u_\infty) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|_{L^p})^p \\
&\leq c(p)\left(\|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_k(u_n)\|^p + \|\mathrm{Tr}_k(u_n) - \mathrm{Tr}_k(u_\infty)\|^p + \|\mathrm{Tr}_k(u_\infty) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|^p\right),
\end{aligned}$$

per una certa costante $c(p)$ dipendente soltanto da p (infatti esiste una costante $c(p)$ tale che per ogni a, b, c in $\mathbb{R}$ vale $(a+b+c)^p \leq c(p)(a^p + b^p + c^p)$). Fissiamo $k_0 > 0$ e, integrando tutti in $(0, k_0)$, otteniamo le seguenti stime:

- $\displaystyle\int_0^{k_0} \|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} = k_0 \|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})};$
- per la proposizione 4.6.6, vale che

$$\begin{aligned}
\int_0^{k_0} \|\mathrm{Tr}_0(u_n) - \mathrm{Tr}_k(u_n)\|^p_{L^p}\, dk &\leq \int_0^{k_0} k^{\frac{p}{p'}} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial u}\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} dk \\
&\leq M^p \int_0^{k_0} k^{p-1}\, dk \\
&\leq M^p k_0^p;
\end{aligned}$$

- in maniera del tutto analoga, troviamo che
$$\int_0^{k_0} \|\mathrm{Tr}_k(u_\infty) - \mathrm{Tr}_0(u_\infty)\|^p \; dk \leq M^p k_0^p;$$
- nel lemma 4.6.1 abbiamo mostrato che per ogni funzione v in $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ per ogni $k > 0$ vale che
$$\|\mathrm{Tr}_k(v)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq p\, \|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$
Ovviamente, questa disuguaglianza si estende per densità a tutte le funzioni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$; nel nostro caso, abbiamo che
$$\begin{aligned}\int_0^{k_0} \|\mathrm{Tr}_k(u_n - u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \; dk &\leq k_0 p\, \|u_n - u_\infty\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \|\nabla(u_n - u_\infty)\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} \\ &\leq 2Mpk_0 \|u_n - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .\end{aligned}$$

In conclusione, troviamo che
$$k_0 \|\mathrm{Tr}(u_n) - \mathrm{Tr}(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq 2M^p k_0^p + 2Mpk_0 \|u_n - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} .$$
Otteniamo che
$$\|\mathrm{Tr}(u_n) - \mathrm{Tr}(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq 2M^p k_0^{p-1} + 2Mp \|u_n - u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^d_+)} ,$$
da cui segue che
$$\limsup_{n\to+\infty} \|\mathrm{Tr}(u_n) - \mathrm{Tr}(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq 2M^p k_0^{p-1}.$$
Questa disuguaglianza è valida per ogni $k_0 > 0$; essendo $p > 1$ e passando al limite per k_0 che tende a 0, otteniamo che
$$\limsup_{n\to+\infty} \|\mathrm{Tr}(u_n) - \mathrm{Tr}(u_\infty)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} = 0.$$
Supponiamo che $p < d$; precisiamo che se $q := \frac{p(d-1)}{p-d}$, per il lemma 4.6.3, abbiamo che $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$; del resto anche $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ appartiene a $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$. Per la disuguaglianza di interpolazione, per ogni r in $[p, q)$ vale che $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$. □

Esempio 4.6.8. Il teorema 4.6.7 è falso per $p = 1$ anche in dimensione 1. Infatti, per ogni n in $\mathbb{N}$ consideriamo la funzione
$$u_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ -nx + (n+1) & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right). \end{cases}$$
Ovviamente, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $u_\infty \equiv 0$ in $L^1((0, +\infty))$ e $\|\dot{u}_n\|_{L^1((0,+\infty))} = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Tuttavia, vale che
$$\lim_{n\to+\infty} u_n(0) = 1 \neq 0 = u_\infty(0).$$
Del resto, è facile mostrare che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata in $W^{1,p}((0, +\infty))$ per ogni p in $(1, +\infty)$.

4.6.2 Traccia per aperti regolari

La costruzione della traccia nel caso modello può essere generalizzata al caso di aperti di classe C^1. Presentiamo gli enunciati essenziali, di cui non riportiamo le dimostrazioni.

Nel seguito, supporremo che $d \geq 2$ sia un intero, p sia in $[1, +\infty)$, Ω sia un aperto di classe C^1 (vedi 4.4.9) in $\mathbb{R}^d$ tale che $\partial\Omega$ sia compatto.

Lemma 4.6.9. *Esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ vale che*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega} \,.$$

Inoltre, se $p < d$, posto $q := \frac{(d-1)p}{d-p}$, esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $C_c^1(\Omega)$ vale che

$$\|u\|_{L^(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega} \,.$$

Teorema 4.6.10 (Traccia per funzioni di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$)**.**
Esiste un'applicazione lineare $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- *esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega} \,;$$

- *vale una formula della divergenza, cioè per ogni $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che*
$$\int_\Omega u div(\varphi)\; dx = -\int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \varphi > dx + \int_{\partial\Omega} [\mathrm{Tr}(u)] < \varphi, \nu > \; d\sigma,$$
dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$;

- *coincide con la restrizione a $\partial\Omega$ per le funzioni continue in $W^{1,p}(\Omega)$ che si estendono con continuità in $\overline{\Omega}$.*

Teorema 4.6.11 (Dipendenza continua della traccia per aperti C^1)**.**
Supponiamo che p sia in $(1, +\infty)$. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e u_∞ una funzione in $L^p(\Omega)$ tali che

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ in $L^p(\Omega)$;*

- *esiste una costante M tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che*
$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M.$$

Allora $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ in $L^p(\partial\Omega)$. Inoltre, vale che

- *se $p < d$ la convergenza è in $L^r(\partial\Omega)$ per ogni r in $\left[1, \frac{p(d-1)}{d-p}\right)$;*

- *se $p = d$ la convergenza è in $L^r(\partial\Omega)$ per ogni r in $[1, +\infty)$;*

- *se $p > d$ la convergenza è uniforme in $\partial\Omega$.*

4.7 Lo spazio $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definizione 4.7.1 ($W_0^{m,p}(\Omega)$)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ un intero e p in $[1, +\infty]$. Diciamo che una funzione u è in $W_0^{m,p}(\Omega)$ se esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge ad u in $L^p(\Omega)$ e tale che $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$. In tal caso, denoteremo con $D^\alpha u$ il limite in L^p di $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 4.7.2. In maniera del tutto equivalente, possiamo definire $W_0^{m,p}(\Omega)$ (vedi 4.7.1 come il completamento di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$. Ricordiamo che per il teorema di Meyers-Serrin (vedi 4.3.6), lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Esempio 4.7.3. Siano p in $(1, +\infty)$ e $\Omega \coloneqq (0, 1)$. Dal teorema 4.2.8, deduciamo che

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \mid u(0) = \dot{u}(0) = u(1) = \dot{u}(1) = 0\},$$

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Dunque, i due spazi sono molto diversi.

Osservazione 4.7.4. Siano $d \geq 1$ un intero, p in $[1, +\infty)$, $m \geq 1$ un intero; per il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.3.3) vale che $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d) = W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Proposizione 4.7.5. *Siano $d \geq 2$ un intero, $m \geq 1$ un intero, p in $[1, +\infty)$ tale che $mp < d$. Poniamo $\Omega \coloneqq \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Allora $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 4.5.3), è sufficiente mostrare che ogni funzione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si approssima rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ con funzioni di classe $C_c^\infty(\Omega)$. Sia ψ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a valori in $[0, 1]$ con le seguenti proprietà:

- $\psi(x) = 0$ se $|x| \leq 1$;
- $\psi(x) = 1$ se $|x| \geq 2$.

Sia u in $C_c^\infty(\Omega)$; per ogni n in $\mathbb{N}$ poniamo

$$u_n(x) \coloneqq u(x)\psi(nx).$$

Ovviamente $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$. Sia α un multi-indice in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$; si ha che

$$D^\alpha u_n(x) = (D^\alpha u(x))\psi(nx) + \sum_{j=1}^{|\alpha|} g_{j,n}(x)n^j,$$

per certe funzioni $g_{j,n}$ di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, uniformemente limitate da una costante M indipendente da j e da n e tali che $g_{j,n}(x) = 0$ se $|x| \geq \frac{2}{n}$. Essendo $|\alpha|\, p < d$ si ha che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{j=1}^{|\alpha|} g_{j,n} n^j \right\|_{L^p(\Omega)} &= \lim_{n\to+\infty} \left\| \sum_{j=1}^{|\alpha|} g_{j,n} n^j \right\|_{L^p\left(\mathcal{B}\left(0;\frac{2}{n}\right)\right)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} \lim_{n\to+\infty} n^j \left\| g_{j,n} \right\|_{L^p\left(\mathcal{B}\left(0;\frac{2}{n}\right)\right)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{|\alpha|} \lim_{n\to+\infty} n^j \frac{M'}{n^{\frac{d}{p}}} = 0,
\end{aligned}$$

essendo $mp < d$ (la costante M' dipende da M e dal volume della palla d-dimensionale). Del resto, per il teorema di convergenza dominata, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |D^\alpha u(\psi(nx) - 1)|^p \ dx = 0.$$

Questo è sufficiente a concludere. □

Osservazione 4.7.6. Nonostante le proposizioni 4.7.4 e 4.7.5, generalmente gli spazi $W^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ sono molto diversi.

Lemma 4.7.7. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1, +\infty)$ e u una funzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sia $\hat{u}$ l'estensione di u a tutto $\mathbb{R}^d$, tale che $\hat{u}(x) = 0$ se x non è in Ω. Allora $\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Dimostrazione. Per definizione (vedi 4.7.1), esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni di classe $C_c^\infty(\Omega)$ che converge ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Estendendo tali funzioni a 0 in Ω^c, otteniamo una successione $\{\hat{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge a $\hat{u}$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora $\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. □

Teorema 4.7.8 (Immersioni a partire da $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$.

- *Supponiamo $p < d$: detto p^* l'esponente di Sobolev (vedi 4.5.2), esiste una costante $c(d;p)$ dipendente soltanto da d, p tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c(d;p) \|\nabla u\|_{1,p,\Omega}.$$

- *Supponiamo $p = d$: per ogni q in $[p, +\infty)$ esiste una costante $c(d;p;q)$ dipendente soltanto da d, p, q tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p;q) \|\nabla u\|_{1,p,\Omega}.$$

- *Supponiamo $p > d$: esiste una costante $c(d;p)$ dipendente solo da d, p tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(d;p) \|u\|_{1,p,\Omega};$$

  inoltre per ogni x, y in Ω vale che

$$|u(x) - u(y)| \leq c(d;p) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} |x - y|^{1-\frac{d}{p}}.$$

Supponiamo che Ω sia limitato.

- *Se $p < d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$
è compatta per ogni q in $[1, p^*)$.

- *Se $p = d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$
è compatta per ogni q in $[p, +\infty)$.

- *Se $p > d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$$
è compatta.

Dimostrazione. Le stime valgono se $\Omega = \mathbb{R}^d$ e u è una funzione di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (vedi il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg 4.5.3 e il teorema di Morrey 4.5.5); pertanto, il teorema vale per l'aperto Ω dato e per ogni funzione u di classe $C_c^\infty(\Omega)$. Per densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ (vedi 4.7.1), le stime si estendono a tutto $W_0^{1,p}(\Omega)$. Infine, dobbiamo mostrare che le immersioni sono compatte; nel lemma 4.7.7 abbiamo provato che se u è in $W^{1,p}(\Omega)$ e denotiamo a $\hat{u}$ l'estensione di u a 0 fuori da Ω, allora $\hat{u}$ è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$; allora la compattezza delle immersioni segue dal teorema di Rellich-Kondrakov (vedi 4.5.14). □

Teorema 4.7.9. *Siano $d \geq 2$ un intero, p in $[1, +\infty)$ e $\mathbb{R}_+^d$ il semispazio superiore. Per ogni funzione $u : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ denotiamo con $\hat{u}$ la sua estensione a 0 a tutto $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *u appartiene a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$;*
2. *$\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;*
3. *$\mathrm{Tr}(u) = 0$.*

Dimostrazione. **1 ⇒ 2** Per il lemma 4.7.7, vale in ogni aperto Ω contenuto in $\mathbb{R}^d$.

1 ⇒ 3 L'operatore $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \to L^p(\mathbb{R}^{d-1})$ è continuo ed è identicamente nullo in $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ perchè coincide con la restrizione all'iperpiano $\partial\mathbb{R}_+^d$ (vedi 4.6.2). Allora l'operatore traccia è identicamente nullo sulla chiusura di $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$, che coincide con $W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$.

2 ⇒ 1 Sia v una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che $v(x) = 0$ per quasi ogni x in $\mathbb{R}_-^d := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathbb{R}_+^d}$. Dobbiamo mostrare che si approssima con funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$. Dalla dimostrazione del teorema 4.3.3 si deduce che possiamo assumere che il supporto di u sia limitato. Sia ρ un mollificatore come in 2.2.1; nel lemma 4.3.1 abbiamo provato che $\{u * \rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una successione di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che converge ad u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Se scegliamo un mollificatore ρ supportato nella striscia $\{x_d \in (1, 2)\}$ contenuta in $\mathbb{R}^d$, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo che $u * \rho_\varepsilon$ è supportata in un sottoinsieme limitato del semispazio $\{x_d \geq \varepsilon\}$ (u ha supporto limitato). Infatti, dalla definizione di prodotto di convoluzione (vedi 2.2.2), per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$u * \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\ dy;$$

Poniamo
$$A_\varepsilon(x) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \frac{x_d - y_d}{\varepsilon} \in (1,2),\ y_d \geq 0 \right\}.$$
Osserviamo banalmente che
$$u * \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{A_\varepsilon(x)} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\ dy.$$
Del resto, è facile notare che
$$A_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid x_d - 2\varepsilon < y_d < x_d - \varepsilon,\ y_d > 0\},$$
pertanto è banalmente vuoto se $x_d < \varepsilon$. Questo è sufficiente a concludere.

3 $\Rightarrow$ **2** Sia u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d_+)$ tale che $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Dalla formula della divergenza (vedi 4.6.2), si deduce facilmente che per ogni φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ per ogni i in $\{1; \ldots ; d\}$ vale che
$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u\ dxdy = -\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\ dxdy + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} [\mathrm{Tr}(u)](x) \varphi(x;0)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\ dxdy,$$
essendo la traccia di u nulla per ipotesi. Allora, se poniamo $\nabla u(x) = 0$ per ogni x in $\mathbb{R}^d_-$, otteniamo che
$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u\ dxdy = -\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\ dxdy,$$
cioè $\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. □

Osservazione 4.7.10. Utilizzando i teoremi 4.6.10 e 4.6.11, si può generalizzare il risultato del teorema 4.7.9 a tutti gli aperti Ω di classe C^1 (vedi 4.4.9) tali che $\partial\Omega$ è compatto.

Corollario 4.7.11 (Disuguaglianza di Poincarè)**.**
Siano $d \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ e Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$ avente misura finita. Esiste una costante $c(d;p;\Omega)$ tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che
$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(d;p;\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Sia p fissato in $[1, +\infty)$. Procediamo per assurdo; supponiamo che la tesi sia falsa, ovvero che per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste u_n in $W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che
$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$
A meno di dividere normalizzare le funzioni, si può supporre che $\|u_n\|_{1,p,\Omega} = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Per il teorema di immersione compatta a partire da $W_0^{1,p}(\Omega)$, deduciamo che, a meno di passare a sottosuccessioni (non rinominate), $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad una funzione u in $L^p(\Omega)$. Del resto, è ovvio che
$$\lim_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_n\|_{L^p(\Omega)}}{n} = 0,$$
da cui si deduce che u è in $W^{1,p}(\Omega)$ e il suo gradiente è quasi certamente nullo. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), si può assumere che u coincida con una funzione costante in ogni componente connessa di Ω; poichè $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$, u è in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora u coincide con la funzione nulla. Tuttavia questo è assurdo perchè deve essere
$$1 = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{1,p,\Omega} = \|u\|_{1,p,\Omega} = 0.$$
□

Osservazione 4.7.12. Una disuguaglianza alla Poincarè vale anche in alcuni casi in cui Ω è un aperto di misura infinita. Supponiamo, per esempio, $\Omega := \mathbb{R} \times (0, 1)$. Data una funzione u in $C_c^\infty(\Omega)$, per ogni (x, y) in Ω vale che

$$u(x; y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y}(x; t)\ dt.$$

Per ogni p in $[1, +\infty)$ per ogni y in $(0, 1)$ deduciamo che vale la stima seguente:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(x; y)|^p\ dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x; t) \right|\ dt \right)^p\ dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x; t) \right|^p\ dt \right)\ dx \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Deduciamo che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

La disuguaglianza dimostrata si estende alla chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, che coincide esattamente con $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollario 4.7.13 (Disuguaglianza di Poincarè-Sobolev)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ di misura finita e p in $[1, d)$. Sia p^* l'esponente di Sobolev relativo a p. Per ogni q in $[1, p^*]$ esiste una costante $c(d; q; \Omega)$ dipendente soltanto da d, q, Ω tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d; q; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Essendo Ω un aperto di misura finita e utilizzando il teorema di immersione a partire da $W_0^{1,p}(\Omega)$, per ogni $q \leq p^*$ esistono delle costanti tali che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq c(q; p^*; \Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \\ &\leq c(d; p)c(q; p^*; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.7.14 (Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e p in $(1, +\infty)$. Supponiamo che Ω sia connesso, limitato e regolare (vedi 4.4.9). Per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$u_\Omega := \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx.$$

Esiste una costante $c(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c(d; p; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Sia u in $W^{1,p}(\Omega)$. A meno di sostituire u con $u - u_\Omega$, possiamo supporre $u_\Omega = 0$. Quindi, dobbiamo mostrare che esiste una costante $c(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ a media nulla vale

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le c(d; p; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Possiamo, inoltre, assumere che $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Infatti, se u è quasi certamente nulla, la disuguaglianza cercata è banalmente vera; altrimenti, possiamo dividere entrambi i membri per $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ e sfruttare il fatto che la disuguaglianza è 1-omogenea. Per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$, definiamo

$$F(u) := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} .$$

Poniamo

$$\mathbb{X} := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \;\middle|\; \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1, \int_\Omega u(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Se mostriamo che il funzionale F ha minimo in $\mathbb{X}$ e tale minimo m è strettamente positivo, poniamo

$$c(d; p; \Omega) := \frac{1}{m}$$

e concludiamo la dimostrazione.

Proviamo tramite il metodo diretto che F ha minimo in $\mathbb{X}$ (vedi 5.2.6). Mostriamo che i sottolivelli di F sono compatti in qualche senso e che F è un funzionale semicontinuo inferiormente. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{X}$ e $M > 0$ tale che

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \le M$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Essendo $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}$, deduciamo che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema di immersione compatta (vedi 4.5.14) e per la limitatezza di Ω possiamo dedurre che esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione u_∞ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ in $L^p(\Omega)$ (bisogna distinguere i casi $p < d$, $p = d$, $p > d$; tuttavia, la limitatezza di Ω permette di ridursi all'unico caso in cui $p < d$). Essendo p in $(1, +\infty)$, esiste una funzione $v_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^d$ in $L^p(\Omega)$ tale che, a meno di estrarre ulteriori sottosuccessioni, $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v_∞ debolmente in L^p (vedi 2.4.16). Come mostrato in 4.1.8, vale che u_∞ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u_\infty = v_\infty$. Essendo la funzione $\psi_p(x) := |x|^p$ convessa e il funzionale F fortemente semicontinuo inferiormente, allora F è debolmente semicontinuo inferiormente. Questo basta a garantire che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \ge F(u_\infty).$$

Osserviamo, infine, che u_∞ appartiene ad $\mathbb{X}$. Si ha

$$\|u_\infty\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1;$$

essendo Ω limitato, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_\Omega (u_n(x) - u_\infty(x))\, dx \right| \le \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u_\infty\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Per il teorema di Weierstrass (vedi 5.2.6), il funzionale F ammette minimo in $\mathbb{X}$. Dobbiamo mostrare che il valore minimo è strettamente positivo. Se esistesse u in $\mathbb{X}$

tale che $F(u) = 0$, allora avremmo che $\nabla u(x) = 0$ per quasi ogni x in Ω. Essendo Ω un aperto connesso, per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), u coincide quasi ovunque con una funzione costante. Tuttavia, questo è incompatibile con i vincoli imposti, cioè $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $u_\Omega = 0$. $\square$

Esempio 4.7.15. Se Ω non è un aperto connesso, non può valere una disuguaglianza alla Poincarè-Wirtinger (vedi 4.7.14). Basta considerare $\Omega := (-1, 0) \cup (0, 1)$ in $\mathbb{R}$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) := \mathbb{1}_{(-1,0)}$.

Corollario 4.7.16 (Disuguaglianza di Poincarè-Sobolev-Wirtinger)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $(1, d)$ e p^* l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2). Supponiamo che Ω sia connesso, limitato e regolare (vedi 4.4.9). Per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$u_\Omega := \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx.$$

Per ogni q in $[1, p^*]$ esiste una costante $c(d; q; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d; p; q; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Essendo Ω un aperto limitato, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza nel caso in cui $q = p^*$. Per il teorema di immersione per aperti regolari, esiste una costante $c(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c(d; p; \Omega) \left\{ \|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \right\}.$$

Per concludere basta osservare che per la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (vedi 4.7.14) esiste una costante $c'(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c'(d; p; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

$\square$

Capitolo 5

Introduzione al Calcolo delle Variazioni

Il calcolo delle variazioni è una branca dell'Analisi Matematica che si occupa dello studio dei problemi di minimo. Siano dati un insieme $\mathbb{X}$ e una funzione $F : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}$: vogliamo capire se F ammette minimo in $\mathbb{X}$, provando a determinare i punti di minimo e il valore di minimo. Possiamo tentare di rispondere a questo problema seguendo almeno due strade molto diverse, che illustriamo nel seguito.

5.1 Metodo indiretto

5.1.1 Motivazioni

Siano $\mathbb{X}$ un insieme ed $F : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione. Supponendo che il minimo esista, cerchiamo condizioni che i punti di minimo devono soddisfare. Se abbiamo trovato condizioni abbastanza stringenti, è lecito sperare che l'insieme dei potenziali punti di minimo sia abbastanza ristretto. Possiamo testare i candidati e mostrare direttamente che sono punti di minimo. Inoltre, nella ricerca delle condizioni necessarie che tali punti devono soddisfare, si possono anche svolgere passaggi puramente formali e non del tutto giustificati. Infatti, vogliamo farci un'idea di quali siano i punti di minimo e poi verificare effettivamente che lo sono.

Questa procedura, nota come metodo indiretto, corrisponde alla mentalità tipica dei matematici del XVIII-XIX secolo: è nata per studiare problemi derivanti dalla fisica e nessuno dubitava che i funzionali introdotti ammettessero minimo. Per la precisione, non c'era interesse per l'esistenza dei punti di minimo: si procedeva assumendo che esistessero e si provava a calcolarli.

Definizione 5.1.1 (Variazione prima)**.**
Siano $\mathbb{X}$ un insieme, $F : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ una funzione, x_0 un punto in $\mathbb{X}$ tale che $F(x_0)$ è reale e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{X}$ una qualsiasi applicazione tale che $\gamma(0) = x_0$. Definiamo la funzione $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \bar{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi(t) := F(\gamma(t))$. Supponiamo che φ sia derivabile in $t = 0$. Definiamo la variazione prima di F lungo γ in x_0 come

$$\delta F(x_0; \gamma) := \varphi'(0).$$

Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo per F in $\mathbb{X}$; in particolare, 0 è punto di minimo per φ; pertanto, deve valere che

$$\delta F(x_0; \gamma) = \varphi'(0) = 0.$$

Osservazione 5.1.2. La condizione che impone l'annullamento della variazione prima di un funzionale in un punto in ogni direzione in cui è definita è nota come equazione di Eulero-Lagrange ed è una condizione che i punti di minimo devono rispettare.

Mostreremo nei prossimi esempi che in alcuni casi è possibile calcolare molto più esplicitamente all'equazione di Eulero-Lagrange.

Definizione 5.1.3 (Derivata alla Gateaux)**.**
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio affine con giacitura $\mathbb{V}$, $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una funzione, x_0 un punto in $\mathbb{X}$ tale che $F(x_0)$ sia reale e v in $\mathbb{V}$. Definiamo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{X}$ tale che

$$\varphi(t) = F(x_0 + tv).$$

Supponiamo che sia ben definita la variazione prima di F in x_0 lungo v, cioè che esista

$$\delta F(x_0; v) \coloneqq \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}.$$

Diciamo che F è derivabile in x_0 nel senso di Gateaux se $\delta F(x_0; v)$ è ben definita per ogni v in $\mathbb{V}$.

Osservazione 5.1.4. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio affine con giacitura $\mathbb{V}$, $F : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ un funzionale, x_0 un punto in $\mathbb{X}$ tale che $F(x_0)$ sia reale. Supponiamo che F sia derivabile in x_0 nel senso di Gateaux (vedi 5.1.3) e che x_0 sia un punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Allora per ogni v in $\mathbb{V}$ vale che

$$\delta F(x_0; v) = 0.$$

5.1.2 Equazione di Eulero-Lagrange per funzionali integrali

Ci limitiamo allo studio dei funzionali integrali: in questo caso, infatti, è possibile ricavare formule abbastanza esplicite che legano i punti di minimo alla soluzione di certe equazioni differenziali. Nonostante i passaggi che svolgeremo non siano pienamente giustificati, è bene ricordare che l'intento è quello di identificare in qualche modo (non necessariamente rigoroso) i punti di minimo; poi, si verifica in maniera diretta che tali punti minimizzano effettivamente il funzionale.

Presentiamo il più classico esempio di minimizzazione di un funzionale integrale.

Esempio 5.1.5. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X} \coloneqq C^1(\overline{\Omega})$ (l'insieme delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$, di classe $C^1(\Omega)$ con tutte le derivate parziali che si estendono con continuità in $\overline{\Omega}$ e Sia $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua, detta lagrangiana (l'ipotesi di continuità può essere indebolita). Denotiamo con (x, s, p) in $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ le variabili di L. Supponiamo che

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega L(x; u; \nabla u)\, dx$$

sia ben definito per ogni u in $\mathbb{X}$. Supponiamo che L sia abbastanza regolare in modo che si possa derivare sotto il segno di integrale (per esempio è sufficiente che Ω sia limitato e che L sia di classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$). Sia u_0 in $\mathbb{X}$ fissato; essendo $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale, per ogni v in $\mathbb{X}$ possiamo calcolare la variazione prima di F in u_0 lungo la direzione v, ovvero

$$\begin{aligned}
\delta F(u_0; v) &= \left[\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\right]_{t=0} \\
&= \int_\Omega \left[\frac{d}{dt} L(x; u_0 + tv; \nabla u_0 + t\nabla v)\right]_{t=0} \, dx \\
&= \int_\Omega v L_s(x; u_0; \nabla u_0) + < \nabla v, \nabla_p L(x; u_0 \nabla u_0) > \, dx
\end{aligned}$$

Se u_0 è un punto di minimo, troviamo che

$$0 = \int_\Omega v L_s(x; u_0; \nabla u_0) + < \nabla v, \nabla_p L(x; u_0 \nabla u_0) > \, dx$$

per ogni v in $\mathbb{X}$, nota come prima forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Supponiamo che L sia di classe $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e che Ω sia un aperto su cui è possibile applicare il teorema della divergenza o, equivalentemente, la formula di Gauss-Green (non sono richieste troppo stringenti). Denotiamo con ν la normale esterna a $\partial\Omega$ e con $d\sigma$ la misura d'area su $\partial\Omega$.

Supponiamo in aggiunta che u_0 sia di classe $C^2(\overline{\Omega})$. Applicando la formula di Gauss-Green, otteniamo che

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega v L_s(x; u_0; \nabla u_0) + < \nabla v, \nabla_p L(x; u_0 \nabla u_0) > \, dx \\
&= \int_\Omega v L_s(x; u_0; \nabla u_0) \, dx \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} v < \nabla_p L(x; u_0 \nabla u_0), \nu > \, d\sigma - \int_\Omega v \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0)) \, dx \\
&= \int_\Omega v \left[L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0))\right] \, dx \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} v < \nabla_p L(x; u_0 \nabla u_0), \nu > \, d\sigma
\end{aligned}$$

per ogni v in $\mathbb{X}$. In particolare, troviamo che

$$0 = \int_\Omega v \left[L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0))\right] \, dx$$

per ogni v in $C_c^\infty(\Omega)$, che è nota come seconda forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Utilizzando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (vedi 4.1.6), si trova che

$$L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0)) = 0,$$

che è nota come forma differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale del secondo ordine che deve essere soddisfatta da u_0. Per la precisione, se denotiamo $x = (x_1; \ldots; x_n)$ e $p = (p_1; \ldots; p_n)$, l'equazione di

Eulero-Lagrange in forma differenziale diventa:

$$\begin{aligned}L_s(x; u_0(x); \nabla u_0(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} L_{p_i}(x; u_0(x); \nabla u_0(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} L_{p_i x_i}(x; u_0(x); \nabla u_0(x)) + L_{p_i s}(x; u_0(x); \nabla u_0(x)) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} L_{p_i p_j}(x; u_0(x); \nabla u_0(x)) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j}(x).\end{aligned}$$

Riprendendo la seconda formulazione integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange, troviamo che

$$0 = \int_{\partial\Omega} v < \nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0), \nu > \ d\sigma$$

per ogni funzione v in $\mathbb{X}$. Applicando ancora il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (vedi 4.1.6), troviamo che

$$< \nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0), \nu >= 0$$

per ogni x in $\partial\Omega$. Abbiamo ottenuto le condizioni al bordo di Neumann. Riassumendo, u_0 deve soddisfare il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ < \nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0), \nu >= 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Presentiamo una variante dell'esempio 5.1.5.

Esempio 5.1.6. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$; sia $w : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega})$; denotiamo con

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid u(x) = w(x) \ \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Sia $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una lagrangiana continua. Osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura

$$\mathbb{V} := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid u(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega\}.$$

Supponiamo che L sia di classe $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e che si possa derivare sotto il segno di integrale; supponiamo anche che Ω sia un aperto abbastanza regolare per cui si possa applicare il teorema della divergenza. Sia u_0 in $\mathbb{X}$ un punto di minimo per F; supponiamo che u_0 sia di classe $C^2(\overline{\Omega})$. Procedendo in maniera totalmente analoga all'esempio 5.1.5, si ottiene la seconda forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange, ovvero

$$0 = \int_{\Omega} v \left[L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0))\right] \ dx$$

per ogni v in $\mathbb{V}$. Applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, si deduce che

$$L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0)) = 0$$

per ogni x in Ω. Poichè u_0 appartiene ad $\mathbb{X}$, troviamo che deve risolvere il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} L_s(x; u_0; \nabla u_0) - \operatorname{div}(\nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_0(x) = w(x) & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le condizioni al bordo imposte sono note come condizioni di Dirichlet.

Osservazione 5.1.7. Ragionando in maniera del tutto analoga agli esempi 5.1.5 e 5.1.6 si può studiare il caso in cui la lagrangiana dipende anche da derivate di ordine superiore al primo.

Il caso uni-dimensionale

Vogliamo riesaminare gli esempi 5.1.5 e 5.1.6 nel caso speciale in cui $\Omega = (a, b)$ è un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. In entrambi gli esempi, l'unica modifica da apportare alla derivazione formale dell'equazione di Eulero-Lagrange è la seguente: occorre utilizzare la formula di integrazione per parti al posto della formula di Gauss-Green.

Esempio 5.1.8. Come nell'esempio 5.1.5, in cui minimizziamo

$$F(u) \coloneqq \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx$$

in $C^1([a, b])$, troviamo che se u_0 è un punto di minimo di classe $C^2([a, b])$ e L è abbastanza regolare (in modo da poter derivare sotto il segno di integrale e integrare per parti), u_0 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange nella seconda forma integrale, cioè

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b & v\left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0)\right]\ dx \\ & + v(b)L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - v(a)L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) \end{aligned}$$

per ogni v in $C^1([a, b])$. In particolare, troviamo che

$$\int_a^b v\left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0)\right]\ dx = 0$$

per ogni v in $C_c^\infty((a, b))$, che è la forma differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Riprendendo la seconda forma differenziale dell'equazione di Eulero-Lagrange, troviamo che

$$0 = v(b)L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - v(a)L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a))$$

per ogni v in $C^1([a, b])$. Scegliendo v tale che $v(a) = 1$ e $v(b) = 0$, si trova che

$$L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) = 0;$$

scegliendo v tale che $v(b) = 1$ e $v(a) = 0$, si trova che

$$L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) = 0.$$

Abbiamo ottenuto le condizioni al bordo di Neumann. Riassumendo, si ha che

$$\begin{cases} L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \dot{u}_0) = 0 & \text{in } (a, b), \\ L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) = L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) = 0. \end{cases}$$

Esempio 5.1.9. Nell'esempio 5.1.6, in cui minimizziamo

$$F(u) \coloneqq \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx$$

nell'insieme
$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a) = A\ u(b) = B\},$$
osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con giacitura
$$\mathbb{V} := \{v \in C^1([a,b]) \mid v(a) = 0\ v(b) = 0\}.$$
Se u_0 è un punto di minimo di classe $C^2([a,b])$ e L è abbastanza regolare (in modo da poter derivare sotto il segno di integrale e integrare per parti), u_0 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange nella seconda forma integrale, cioè
$$0 = \int_a^b v\left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0)\right]\ dx$$
per ogni v in $\mathbb{V}$. Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, vale che
$$L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0) = 0$$
per ogni x in (a,b). Ricordando che u_0 è in $\mathbb{X}$, devono valere le condizioni di Dirichlet, cioè
$$\begin{aligned} u_0(a) &= A, \\ u_0(b) &= B. \end{aligned}$$
Riassumendo, u è soluzione del seguente problema differenziale:
$$\begin{cases} L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \dot{u}_0) = 0 & \text{in } (a,b), \\ u_0(a) = A, \\ u_0(b) = B. \end{cases}$$

Esempio 5.1.10. Nello stesso contesto degli esempi 5.1.8 e 5.1.9, vogliamo minimizzare
$$F(u) := \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx$$
nell'insieme
$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a) = u(b)\};$$
osserviamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale. Se u_0 è un punto di minimo di classe $C^2([a,b])$ e L è abbastanza regolare (in modo da poter derivare sotto il segno di integrale e integrare per parti), u_0 soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange nella seconda forma integrale, cioè
$$\begin{aligned} 0 = &\int_a^b v\left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0)\right]\ dx \\ &+ v(b) L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - v(a) L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) \end{aligned}$$
per ogni v in $\mathbb{X}$. In particolare, troviamo che
$$0 = \int_a^b v\left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0)\right]\ dx$$
per ogni v in $C_c^\infty((a,b))$. Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, vale che
$$L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \nabla u_0) = 0$$

per ogni x in (a, b). Riprendendo la seconda forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange e ricordando che $v(b) = v(a)$, si trova che

$$0 = v(b)\left[L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a))\right];$$

scegliendo v in $\mathbb{X}$ tale che $v(b) = 1$, si trovano che

$$L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) = 0,$$

che sono condizioni al bordo periodiche. Riassumendo, u è soluzione del seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} L_s(x; u_0; \dot{u}_0) - L_p'(x; u_0; \dot{u}_0) = 0 & \text{in } (a, b), \\ L_p(b; u_0(b); \dot{u}_0(b)) - L_p(a; u_0(a); \dot{u}_0(a)) = 0. \end{cases}$$

Esempio 5.1.11 (Equazione di Eulero-Lagrange in forma Erdmann).
Nello stesso contesto degli esempi 5.1.8, 5.1.9 e 5.1.10, supponiamo che la lagrangiana L sia autonoma, cioè indipendente da x e studiamo il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_a^b L(u; \dot{u})\, dx,$$

definito in un sottoinsieme $\mathbb{X}$ di $C^1([a, b])$ che dipende dalle condizioni al bordo (eventualmente) prescritte. Sia u_0 un punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Supponiamo che per ogni v in $C_c^\infty((a, b))$ esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni t in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ vale che $u_0 + tv$ appartiene ad $\mathbb{X}$. Allora è ben definita la variazione prima di F in u_0 lungo la direzione v. Se L è di classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (non è una richiesta troppo restrittiva) e u_0 è di classe $C^2([a, b])$, otteniamo l'equazione di Eulero-Lagrange nella seconda forma integrale e, poi, in forma differenziale, cioè

$$L_p'(u_0; \dot{u}_0) = L_s(u_0; \dot{u}_0)$$

per ogni x in (a, b). Moltiplicando per $\dot{u}_0$ si trova che

$$\dot{u}_0 L_p'(u_0; \dot{u}_0) = \dot{u}_0 L_s(u_0; \dot{u}_0).$$

Osserviamo che vale

$$\dot{u}_0 L_p'(u_0; \dot{u}_0) = \left[\dot{u}_0 L_p(u_0; \dot{u}_0)\right]' - \ddot{u}_0 L_p(u_0; \dot{u}_0).$$

Allora, riordinando i termini, troviamo che

$$\left[\dot{u}_0 L_p(u_0; \dot{u}_0)\right]' = L_s(u_0; \dot{u}_0)\dot{u}_0 + L_p(u_0; \dot{u}_0)\ddot{u}_0 = \left[L(u_0; \dot{u}_0)\right]'.$$

Pertanto, esiste una costante c tale che

$$\dot{u}_0 L_p(u_0; \dot{u}_0) - L(u_0; \dot{u}_0) = c$$

per ogni x in (a, b). Abbiamo ottenuto l'equazione di Eulero-Lagrange in forma Erdmann, che è un'equazione del prim'ordine con una costante arbitraria. Osserviamo che l'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale e quella in forma Erdmann non sono equivalenti: se u_0 risolve quella in forma differenziale allora risolve quella in forma Erdmann; tuttavia, il viceversa vale solo nei punti in cui $\dot{u}_0 \neq 0$.

Esempio 5.1.12 (Equazione di Eulero-Lagrange in forma Du Bois-Reymond).
Come negli esempi 5.1.8, 5.1.9 e 5.1.10, studiamo il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx,$$

definito in un sottoinsieme $\mathbb{X}$ di $C^1([a, b])$ che dipende dalle condizioni al bordo (eventualmente) prescritte. Supponiamo che L sia di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$: in tal caso, possiamo derivare sotto il segno di integrale. Sia u_0 un punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Supponiamo che per ogni v in $C_c^\infty([a, b])$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni t in $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ $u_0 + tv$ sia in $\mathbb{X}$. Otteniamo l'equazione di Eulero-Lagrange nella prima forma integrale, cioè

$$0 = \delta F(u_0; v) = \int_a^b [L_s(x; u_0; \dot{u}_0)v + L_p(x; u_0; \dot{u}_0)\dot{v}]\ dx$$

per ogni v in $C_c^\infty((a, b))$. Se poniamo

$$\hat{L}(x) \coloneqq \int_a^x L_s(y; u_0; \dot{u}_0)\ dy,$$

possiamo integrare per parti e, sfruttando il fatto che v è nulla al bordo, otteniamo

$$\int_a^b \left[-\hat{L}(x) + L_p(x; u_0; \dot{u}_0)\right] \dot{v}\ dx = 0$$

per ogni v in $C_c^\infty((a, b))$. In questo passaggio di integrazione per parti, non abbiamo assunto ulteriori ipotesi di regolarità sulla lagrangiana L e, soprattutto, su u_0. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), esiste una costante c tale che

$$L_p(x; u_0(x); \dot{u}_0) - \int_a^x L_s(y; u_0(y); \dot{u}_0(y))\ dy = c$$

per ogni x in (a, b). Abbiamo ottenuto un'equazione del prim'ordine dipendente da una costante.

5.1.3 Tecniche di minimalità

Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ un funzionale. Procedendo per condizioni necessarie (cioè derivando l'equazione di Eulero-Lagrange in una delle varie forme descritte e discutendo le condizioni al bordo), si identifica un candidato punto di minimo x_0 per F in $\mathbb{X}$. Presentiamo due tecniche per mostrare che x_0 è effettivamente un punto di minimo.

Minimalità via convessità

Teorema 5.1.13 (Minimalità via convessità).
Siano $\mathbb{X}$ uno spazio affine di giacitura $\mathbb{V}$, $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ un funzionale convesso, x_0 un punto in $\mathbb{X}$ tale che $F(x_0)$ sia reale e F sia derivabile in x_0 nel senso di Gateaux (vedi 5.1.3). Supponiamo che per ogni v in $\mathbb{V}$ valga

$$\delta F(x_0; v) = 0.$$

Allora x_0 è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Inoltre, x_0 è l'unico punto di minimo se F è strettamente convesso.

Dimostrazione. Sia x un altro punto in $\mathbb{X}$. Consideriamo la funzione

$$\varphi(t) = F(x_0 + t(x - x_0));$$

per le ipotesi su F, φ è ben definita ed è convessa. Dal momento che è ben definita la variazione prima di F in x_0 lungo la direzione $x - x_0$, per la disuguaglianza di convessità vale che

$$F(x) \geq \varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0) = \varphi(0) + \delta F(x_0; x - x_0) = F(x_0),$$

essendo $\delta F(x_0; x - x_0) = 0$. La prima disuguaglianza è stretta se F è strettamente convesso; in tal caso, x_0 è l'unico punto di minimo. □

Esempio 5.1.14. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{X}$ un sottospazio affine di $C^1(\overline{\Omega})$ (dipendente dalla scelta delle condizioni al bordo che imponiamo) di giacitura $\mathbb{V}$. Supponiamo che il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega L(x; u; \nabla u)\ dx$$

sia ben definito in $\mathbb{X}$. Supponiamo che L sia abbastanza regolare da poter derivare sotto il segno di integrale; sia u_0 un punto in $\mathbb{X}$ che risolve l'equazione di Eulero-Lagrange nella prima forma integrale (vedi 5.1.5), cioè

$$0 = \delta F(u_0; v) = \int_\Omega \left[L_s(x; u_0; \dot{u}_0)v + < \nabla_p L(x; \dot{u}_0; \nabla u_0), \nabla v >\right]\ dx$$

per ogni funzione v in $\mathbb{V}$. Supponiamo che per ogni x in Ω la funzione $L(x; \cdot; \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia convessa in $(s; p)$. Allora u_0 è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Osserviamo innanzitutto che per ogni x in Ω, per ogni s_0, s_1 in $\mathbb{R}$, per ogni p_0, p_1 in $\mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza di convessità

$$L(x; s_0 + s_1; p_0 + p_1) \geq L(x; s_0; p_0) + s_1 L_s(x; s_0; p_0) + < p_1, \nabla_p L(x; s_0; p_0) > .$$

Essendo $\mathbb{X}$ uno spazio affine, se u è un altro elemento di $\mathbb{X}$, osserviamo che $v := u_0 - u$ appartiene a $\mathbb{V}$. Per ipotesi, vale che $\delta F(u_0; v) = 0$. Allora, abbiamo che

$$\begin{aligned}
F(u) &= F(u_0 + v) \\
&= \int_\Omega L(x; u_0 + v; \nabla u_0 + \nabla v)\ dx \\
&\geq \int_\Omega L(x; u_0; \nabla u_0)\ dx + \left[\int_\Omega L_s(x; u_0; \nabla u_0)v + < \nabla v, \nabla_p L(x; u_0; \nabla u_0) >\right]\ dx \\
&= F(u_0) + \delta F(u_0; v) \\
&= F(u_0).
\end{aligned}$$

Pertanto, u_0 è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$.

Supponiamo in aggiunta che $\mathbb{X}$ sia il sottoinsieme delle funzioni $C^1(\overline{\Omega})$ che coincidono con una funzione w in $C^1(\overline{\Omega})$ su $\partial\Omega$ e che per ogni $(x; s)$ in $\Omega \times \mathbb{R}$ la funzione $L(x; s; \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia strettamente convessa. Allora u_0 è l'unico punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Sia u un altro punto in $\mathbb{X}$; se $u \neq v$, esiste aperto in cui $\nabla u \neq \nabla v$ (altrimenti u e v

coincidono in Ω, perchè coincidono in $\partial\Omega$ per ipotesi). Allora, ragionando in maniera analoga, si trova che

$$F(u) > \int_\Omega L(x; u_0; \nabla u_0)\ dx + \delta F(u_0; u - u_0) = F(u).$$

Pertanto, u_0 è anche l'unico punto di minimo per F in $\mathbb{X}$.

Esempio 5.1.15. Siano (a, b) un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Denotiamo

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([a, b]) \mid u(a) = A\ u(b) = B\}.$$

Sia u_0 la retta che unisce i punti $(a; A)$ e $(b; B)$. Allora u_0 minimizza il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \psi(\dot{u})\ dx$$

nell'insieme $\mathbb{X}$. Inoltre, se ψ è strettamente convessa, la retta è l'unico punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Essendo ψ convessa, per ogni p in $\mathbb{R}$ esiste $\mu(p)$ in $\mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(p + p_1) \geq \psi(p) + \mu(p)p_1$$

per ogni p_1 in $\mathbb{R}$. Sia u in $\mathbb{X}$ un'altra funzione; poiché $\dot{u}_0$ è costante, esiste una costante μ tale che

$$\begin{aligned}
F(u) &= \int_a^b \psi(\dot{u}_0 + (\dot{u} - \dot{u}_0))\ dx \\
&\geq \int_a^b \psi(u_0)\ dx + \int_a^b \mu(\dot{u} - \dot{u}_0)\ dx \\
&= F(u_0) + \mu[u(b) - u_0(b) - (u(a) - u_0(a))] \\
&= F(u_0),
\end{aligned}$$

dal momento che u e u_0 assumono lo stesso valore al bordo. Se ψ è strettamente convessa e $u \neq u_0$ esiste un punto x in (a, b) in cui $\dot{u}(x) \neq \dot{u}_0(x)$ (altrimenti $u = u_0$, dal momento che assumono lo stesso valore al bordo); per continuità, esiste un intorno di x in cui vale $\dot{u}(z) \neq \dot{u}_0(z)$. Allora la disuguaglianza di convessità è stretta almeno in un insieme di misura positiva e quindi $F(u) > F(u_0)$.

Osservazione 5.1.16. Sia $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una lagrangiana continua. Sia $\mathbb{X}$ lo spazio delle funzioni continue tra $[a, b]$ e $\mathbb{R}$ e di classe C^1 a tratti. Definiamo

$$F(u) := \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx$$

per ogni u in $\mathbb{X}$. Osserviamo che la definizione di F è ovviamente ben posta. Sia u una funzione in $\mathbb{X}$; per convoluzione (vedi 2.2.3) è possibile costruire una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $C^\infty([a, b])$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u quasi ovunque in $[a, b]$;
- $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\dot{u}$ quasi ovunque in $[a, b]$;

- per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[a,b]$ vale che

$$|u_n(x)| + |\dot{u}_n(x)| \leq \max_{[a,b]}\{|u|\} + \max_{[a,b]}\{|\dot{u}|\}.$$

Allora, essendo L continua, per il teorema di convergenza dominata, si trova che

$$F(u) = \int_a^b L(x;u;\dot{u})\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b L(x;u_n;\dot{u}_n)\ dx = \lim_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Questo è sufficiente a mostrare la seguente uguaglianza:

$$\inf\{F(u) \mid u \in \mathbb{X}\} = \inf\{F(u) \mid u \in C^\infty([a,b])\}.$$

Esempio 5.1.17. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per ogni u in $C^1([a,b])$, definiamo

$$F(u) \coloneqq \int_a^b (f(x) - u(x))^2\ dx + \int_a^b (\dot{u}(x))^2\ dx.$$

Vogliamo minimizzare F in $C^1([a,b])$. Procedendo come nell'esempio 5.1.5, troviamo che se u_0 è un punto di minimo ed è di classe $C^2([a,b])$, allora u_0 deve risolvere il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \ddot{u}_0(x) = u_0(x) - f(x) & \text{in } (a,b), \\ \dot{u}_0(a) = \dot{u}_0(b) = 0. \end{cases}$$

Supponiamo che tale problema ammetta soluzione, che denotiamo ancora con u_0. Come mostrato nell'esempio 5.1.14, essendo la lagrangiana convessa nella coppia (s,p) e strettamente convessa in p, u_0 è l'unico punto di minimo per il funzionale F in $C^1([a,b])$. Vogliamo concludere che per ogni x in $[a,b]$ vale che

$$\min_{[a,b]}\{f\} \leq u_0(x) \leq \max_{[a,b]}\{f\}.$$

Sia $m \coloneqq \min_{[a,b]}\{f\}$. Supponiamo che esista x_0 in (a,b) tale che $u_0(x_0) < m$. Definiamo

$$\alpha \coloneqq \inf\left\{x \in (a,x_0] \mid u(y) < m\ \forall y \in (x,x_0]\right\},$$

$$\beta \coloneqq \sup\left\{x \in [x_0,b) \mid u(y) < m\ \forall y \in [x_0,x)\right\}.$$

Per continuità, vale che $u(\alpha) = u(\beta) = m$. Allora, la funzione

$$\hat{u}(x) \coloneqq \begin{cases} m & \text{in } [\alpha,\beta], \\ u(x) & \text{in } [a,b] \setminus [\alpha,\beta], \end{cases}$$

è continua ed è C^1 a tratti. Osserviamo che

$$\begin{aligned} F(\hat{u}) = &\int_a^\alpha \left[(f(x) - \hat{u}(x))^2 + (\hat{u}(x)')^2\right]\ dx \\ &+ \int_\alpha^\beta \left[(f(x) - \hat{u}(x))^2 + (\hat{u}(x)')^2\right]\ dx \\ &+ \int_\beta^b \left[(f(x) - \hat{u}(x))^2 + (\hat{u}(x)')^2\right]\ dx \\ < F(u_0). \end{aligned}$$

Questo mostra che
$$\inf\{F(u) \mid u \in C^0([a,b]) \text{ e } C^1 \text{ a tratti}\} < \min\{F(u) \mid u \in C^1([a,b])\},$$
contro quanto osservato in 5.1.16. In maniera del tutto analoga, si mostra che per ogni x in $[a,b]$ vale che
$$u(x) \geq \max_{[a,b]}\{f\}.$$

Minimalità via funzionale ausiliario

Teorema 5.1.18 (Minimalità via funzionale ausiliario)**.**
Siano $\mathbb{X}$ un insieme, $F, G : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ due funzionali e x_0 un punto in $\mathbb{X}$. Supponiamo che

- *$F(x) \geq G(x)$ per ogni x in $\mathbb{X}$;*
- *x_0 è punto di minimo per G in $\mathbb{X}$;*
- *$F(x_0) = G(x_0)$.*

Allora x_0 è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Per ogni x in $\mathbb{X}$ vale
$$F(x) \geq G(x) \geq G(x_0) = F(x_0).$$
□

Esempio 5.1.19. Sia $\psi(p) \coloneqq (p^2-1)^2$ il "doppio pozzo". Consideriamo il funzionale
$$F(u) \coloneqq \int_a^b \psi(\dot{u})\, dx$$
e studiamo il problema di minimo in $\mathbb{X} \coloneqq \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a) = A\ u(b) = B\}$. Poniamo
$$\Delta \coloneqq \frac{B-A}{b-a}.$$
Osserviamo che ψ è convessa se x appartiene a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$. Supponiamo che Δ appartenga all'intervallo $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; mostriamo che la retta u_0 che congiunge i punti $(a; A)$, (b, B) minimizza F in $\mathbb{X}$. Consideriamo la funzione
$$\hat{\psi}(p) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{in } [-1,1], \\ \psi(x) & \text{in } [-1,1]^c; \end{cases}$$
definiamo
$$\hat{F}(u) \coloneqq \int_a^b \hat{\psi}(\dot{u})\, dx.$$
Essendo $\hat{\psi}$ una funzione convessa, la retta u_0 minimizza $\hat{F}$ in $\mathbb{X}$. Inoltre, è banale osservare che $\hat{F}$ soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.18; allora la retta u_0 minimizza F in $\mathbb{X}$.

Supponiamo che Δ appartenga a $(-1,1)$. In tal caso, F non ha minimo in $\mathbb{X}$ e l'estremo inferiore è 0. Infatti, essendo $|\Delta| < 1$, è possibile trovare una funzione v continua, affine a tratti con pendenze $+1$ e -1 tale che $v(a) = A$ e $v(b) = B$; possiamo anche assumere che v abbiamo un unico punto di non derivabilità, diciamo s. Allora, si deduce che $F(u) = 0$. Possiamo ovviamente scegliere una successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $C^\infty([a,b])$ con le seguenti proprietà:

- per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[a, b]$ tale che $|x - s| \geq 2^{-n}$ vale che
$$v_n(x) = v(x);$$
- per ogni n in $\mathbb{N}$ per ogni x in $[a, b]$ tale che $|x - s| \leq 2^{-n}$ vale che
$$-1 \leq \dot{v}_n(x) \leq 1.$$

Sotto queste ipotesi, è ovvio che
$$\lim_{n \to +\infty} F(v_n) = F(v) = 0.$$
Dunque, l'estremo inferiore di F in $\mathbb{X}$ è 0; inoltre, 0 non è un minimo a causa delle condizioni al bordo.

Vogliamo minimizzare F in
$$\mathbb{Y} := \left\{ u \in \mathbb{X} \;\middle|\; \dot{u}(x) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$
Supponiamo che Δ appartenga a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$; sia θ la retta passante per $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ e tangente al grafico di ψ. Definiamo
$$\hat{\psi}(p) := \begin{cases} \Theta(x) & \text{in } \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \psi(x) & \text{in } \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right); \end{cases}$$
definiamo
$$\hat{F}(u) := \int_a^b \hat{\psi}(\dot{u})\ dx.$$
Essendo $\hat{\psi}$ una funzione convessa, la retta u_0 minimizza $\hat{F}$ in $\mathbb{X}$. Inoltre, è banale osservare che $\hat{F}$ soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.18 (è fondamentale aver posto il vincolo sulla derivata); allora la retta u_0 minimizza F in $\mathbb{X}$.

5.1.4 Variazione interna

Negli esempi 5.1.5 e 5.1.6, abbiamo considerato un funzionale
$$F(u) := \int_\Omega L(x; u; \nabla u)\ dx$$
definito su un certo sottospazio affine $\mathbb{X}$ di $C^1(\overline{\Omega})$ (a seconda delle condizioni al bordo) la cui giacitura contiene $C_c^\infty(\Omega)$. Se u_0 minimizza F in $\mathbb{X}$ e v una funzione $C_c^\infty(\Omega)$, abbiamo considerato la variazione del funzionale lungo la retta passante per u_0 e in direzione v, ovvero
$$0 = \left[\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\right]_{t=0}.$$
In altri termini, abbiamo perturbato verticalmente il grafico di u_0 (per questo diciamo che abbiamo considerato la variazione esterna) e, assumendo qualche blanda ipotesi di regolarità, abbiamo ricavato condizioni necessarie ragionevoli.

Tuttavia, la classe delle rette è ben lontana da esaurire tutti i possibili cammini in $\mathbb{X}$ passanti per u_0. Infatti, possiamo perturbare orizzontalmente il grafico di u_0, ovvero considerare la variazione interna del funzionale. Presentiamo il concetto di variazione interna tramite un esempio.

Esempio 5.1.20. Siano (a, b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{X}$ l'insieme delle funzioni $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ aventi al più un punto di discontinuità di (a, b) (dipendente da u) e di classe C^1 nella chiusura dei due intervalli in cui è diviso (a, b). Osserviamo che $\mathbb{X}$ non è uno spazio affine. Sia $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua; possiamo ben definire

$$F(u) \coloneqq \int_a^b L(x; u; \dot{u})\, dx$$

per ogni u in $\mathbb{X}$. Supponiamo che u_0 minimizzi il funzionale F in $\mathbb{X}$: u_0 ha al più un punto di discontinuità, diciamo in c. Per ogni v in $C_c^\infty([a, b])$ per ogni t in $\mathbb{R}$, $u_0 + tv$ appartiene a $\mathbb{X}$. Pertanto possiamo calcolare la variazione esterna di F in u_0 lungo v. Ragionando esattamente come nell'esempio 5.1.5 e assumendo che L e u_0 siano di classe C^2, si trova che u_0 deve soddisfare separatamente i seguenti problemi differenziali:

$$\begin{cases} L_p'(x; u_0(x); \dot{u}_0(x)) = L_s(x; u_0(x); \dot{u}_0(x)) & \text{se } x \in (a, c), \\ L_p(a; u_0(a)^+; \dot{u}_0(a)^+) = L_p(c; u_0(c)^-; \dot{u}_0(c)^-) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_p'(x; u_0(x); \dot{u}_0(x)) = L_s(x; u_0(x); \dot{u}_0(x)) & \text{se } x \in (c, b), \\ L_p(c; u_0(c)^+; \dot{u}_0(c)^+) = L_p(b; u_0(b)^-; \dot{u}_0(b)^-) = 0. \end{cases}$$

Possiamo aspettarci di ottenere un'altra condizione nel punto di discontinuità di u_0: a questo proposito, data una funzione η in $C_c^\infty((a, b))$, consideriamo la variazione interna di F in u_0 nella direzione η. Per ogni t in $\mathbb{R}$ definiamo la funzione $\Phi_t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_t(x) \coloneqq x + t\eta(x).$$

Se t è abbastanza piccolo, Φ_t è un diffeomorfismo di $[a, b]$ in $[a, b]$. Data la funzione u_0, se t è abbastanza piccolo, possiamo ben definire la funzione

$$u_t \coloneqq u_0 \circ \Phi_t^{-1}.$$

La variazione interna di F nel punto u è definita come

$$\left.\frac{d}{dt} F(u_t)\right|_{t=0}.$$

Vogliamo svolgere questi conti:

$$\begin{aligned} F(u_t) &= \int_a^b L(y; u_t(y); \dot{u}_t(y))\, dy = \\ &= \int_a^b L\left(y; u(\Phi_t^{-1}(y)); \dot{u}(\Phi_t^{-1}(y)) \frac{1}{\Phi_t'(\Phi_t^{-1}(y))}\right) dy \\ &= \int_a^b L\left(\Phi_t(x); u(x); \dot{u}(x) \frac{1}{\Phi_t'(x)}\right) \Phi_t'(x)\, dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = \Phi_t(x)$ e $dy = \Phi_t'(x)dx$. Osserviamo che vale

$$\Phi_t'(x) = 1 + t\dot{\eta}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x) = \eta(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x) = \dot\eta(x).$$

Essendo L abbastanza regolare da poter derivare sotto il segno di integrale, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[L\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\Phi_t'(x)\right]\bigg|_{t=0} dx \\
&= \int_a^b L\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\Phi_t'(x)\bigg|_{t=0} dx \\
&\quad + \int_a^b \left[L_x\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x)\right]\Phi_t'(x)\bigg|_{t=0} dx \\
&\quad + \int_a^b L_p\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\left(-\frac{\dot u(x)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x)}{\Phi_t'(x)^2}\right)\bigg|_{t=0} dx \\
&= \int_a^b \left[L(x;u;\dot u)\dot\eta + L_x(x;u;\dot u)\eta - L_p(x;u;\dot u)\dot u\dot\eta\right]\, dx \\
&= \int_a^b \left[L_x\eta + (L - L_p\dot u)\dot\eta\right]\, dx.
\end{aligned}$$

Essendo u_0 discontinua nel punto c, possiamo integrare per parti spezzando l'integrale:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} &= \int_a^b \left[L_x\eta + (L - L_p\dot u)\dot\eta\right]\, dx \\
&= \int_a^c \left[L_x\eta + (L - L_p\dot u)\dot\eta\right]\, dx + \int_c^b \left[L_x\eta + (L - L_p\dot u)\dot\eta\right]\, dx \\
&= \int_a^c \left(L_x - \frac{d}{dx}(L - L_p\dot u)\right) dx - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_a^{c-} \\
&\quad + \int_c^b \left(L_x - \frac{d}{dx}(L - L_p\dot u)\right) dx - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b} \\
&= \int_a^b \left(L_x - \frac{d}{dx}(L - L_p\dot u)\right) dx - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_a^{c-} - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b} \\
&= \int_a^b \dot u\left(\frac{d}{dx}L_p - L_s\right)\, dx - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_a^{c-} - \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b}.
\end{aligned}$$

Essendo u_0 un punto di minimo, abbiamo già mostrato che risolve l'equazione di Eulero-Lagrange separatamente in (a, c) e (c, b); inoltre abbiamo trovato delle condizioni al bordo di Neumann. Pertanto, otteniamo che

$$0 = \frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} = \Big[(L - L_p\dot u)\eta\Big]_{c+}^{c-}$$

per ogni funzione η in $C_c^\infty((a, b))$. Quindi, possiamo facilmente concludere che la funzione

$$L(x; u; \dot u) - L_p(x; u; \dot u)\dot u$$

è continua nel punto c.

5.2 Metodo diretto

5.2.1 Motivazioni

Siano $\mathbb{X}$ un insieme ed $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Vogliamo affrontare il problema della minimizzazione di F in maniera radicalmente diversa rispetto alla via proposta dal metodo indiretto. Innanzitutto, cerchiamo di provare che il minimo esiste mediante un teorema astratto; in un secondo momento, proveremo a calcolarlo. A differenza dell'approccio tipico del metodo indiretto, dovremo essere rigorosi nelle assunzioni e giustificare tutti i passaggi formali che svolgeremo.

Questa procedura, nota come metodo diretto, corrisponde alla mentalità tipica dei matematici del XX secolo, in cui si sviluppa interesse riguardo a come mostrare in astratto l'esistenza dei minimi per certi funzionali, senza calcolarli esplicitamente.

5.2.2 Teorema di Weierstrass

Vogliamo descrivere un contesto generale in cui è possibile ottenere l'esistenza del minimo di certi funzionali. Precisiamo che quello che presentiamo non è l'unico approccio possibile.

Definizione 5.2.1 (Nozione di convergenza).
Sia $\mathbb{X}$ un insieme e sia $\mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{X}$. Una nozione di convergenza è un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{X}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$.

Osservazione 5.2.2. Nella definizione 5.2.1 sostanzialmente dichiariamo quali sono le successioni in $\mathbb{X}$ convergenti e quali sono i loro limiti. Non introduciamo alcuna proprietà aggiuntiva, come l'unicità del limite o la proprietà di passaggio alle sottosuccessioni.

Definizione 5.2.3 (Compattezza e semicontinuità).
Sia $\mathbb{X}$ un insieme dotato di una nozione di convergenza.

- Un sottoinsieme K di $\mathbb{X}$ si dice compatto rispetto alla nozione di convergenza se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in K esiste una sottosuccessione e un punto x_∞ in K tale che $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x_∞ rispetto alla nozione di convergenza in $\mathbb{X}$.

- Una funzione $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ si dice semicontinua inferiormente se per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge ad x_∞ in $\mathbb{X}$ vale che
$$\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty).$$

Teorema 5.2.4 (Teorema di Weierstrass).
Siano $\mathbb{X}$ un insieme non vuoto con una nozione di convergenza e $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Supponiamo che $\mathbb{X}$ sia compatto e F sia semicontinua inferiormente (vedi 5.2.3). Allora F ammette minimo in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Siano $I \coloneqq \inf\{F(x) \mid x \in \mathbb{X}\}$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{X}$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = I.$$

Per compattezza, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed un punto x_∞ in $\mathbb{X}$ tale che $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x_∞ rispetto alla nozione di convergenza in $\mathbb{X}$. Essendo F semicontinua inferiormente, vale che

$$I \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = I.$$

Quindi $F(x_\infty) = I$, ovvero x_∞ minimizza F in $\mathbb{X}$. □

Definizione 5.2.5 (Coercività)**.**
Siano $\mathbb{X}$ un insieme dotato di una nozione di convergenza e $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Si dice che F è coerciva se esiste un insieme compatto K in $\mathbb{X}$ tale che

$$\inf\{F(x) \mid x \in K\} = \inf\{F(x) \mid x \in \mathbb{X}\}.$$

Teorema 5.2.6 (Teorema di Weierstrass generalizzato)**.**
Siano $\mathbb{X}$ un insieme dotato di una nozione di convergenza e $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente e coerciva (vedi 5.2.3 e 5.2.5). Allora F ammette minimo in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia K in $\mathbb{X}$ un insieme compatto tale che

$$\inf\{F(x) \mid x \in K\} = \inf\{F(x) \mid x \in \mathbb{X}\}.$$

Per il teorema di Weierstrass (vedi 5.2.4), la restrizione di F a K ammette minimo in K; pertanto, F ammette minimo in $\mathbb{X}$. □

5.2.3 Esempio di applicazione del metodo diretto

Presentiamo il metodo diretto attraverso alcuni esempi.

Esempio 5.2.7. Siano (a, b) un intervallo limitato e $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R})$. Denotiamo con

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([a, b]) \mid u(a) = A,\ u(b) = B\}$$

e definiamo il funzionale $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2}[\dot{u}(x)]^2 + g(x; u(x))\right]\, dx.$$

Innanzitutto osserviamo che F è ben definito. Vogliamo mostrare che ammette minimo in $\mathbb{X}$.

Formulazione debole: Consideriamo l'insieme

$$\hat{X} := \{u \in W^{1,2}((a, b)) \mid u(a) = A,\ u(b) = B\}.$$

Osserviamo che le condizioni al bordo prescritte hanno significato, perchè le funzioni in $W^{1,2}((a, b))$ sono uniformemente continue, quindi si estendono con continuità in $[a, b]$. Definiamo il funzionale $\hat{F} : \hat{X} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\hat{F}(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2}[\dot{u}(x)]^2 + g(x; u(x))\right]\, dx.$$

Ovviamente il funzionale $\hat{F}$ è ben definito ed estende F.

Compattezza: Vogliamo mostrare che i sottolivelli di $\hat{F}$ sono relativamente compatti rispetto a qualche nozione di convergenza. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\hat{X}$ tale che $\hat{F}(u_n) \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$. In particolare, deduciamo esiste una costante M' tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2((a,b))} \leq M'.$$

Per il criterio di compattezza debole in L^2 (vedi 2.4.21), esistono una sottosuccessione $\{\dot{u}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed una funzione v_∞ tale che $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in L^2 a v_∞ nel senso specificato in 2.4.16. Inoltre, per quanto mostrato in 4.2.7, per ogni x, y in $[a, b]$ per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$|u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)| \leq \|\dot{u}_{n_k}\|_{L^2((a,b))} |x-y|^{\frac{1}{2}} \leq M' |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

In particolare, deduciamo che la famiglia $\{u_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è equi-continua. Inoltre, per ogni x in $[a, b]$ per ogni k in $\mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}|u_{n_k}(x)| &\leq |u_{n_k}(a)| + |u_{n_k}(x) - u_{n_k}(a)| \\ &\leq A + M' |x-a|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq A + M'(b-a)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dunque, la famiglia $\{u_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ è puntualmente equi-limitata. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di sottosuccessioni, non rinominate, esiste una funzione u_∞ tale che $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ uniformemente in $[a, b]$. Come mostrato in 4.1.8, possiamo concludere che u_∞ appartiene a $W^{1,2}((a, b))$ e $\dot{u}_\infty = v_\infty$. Infine, osserviamo che u_∞ rispetta le condizioni al bordo imposte perchè è limite uniforme di funzioni che le rispettano; quindi u_∞ appartiene ad $\hat{\mathbb{X}}$. Abbiamo mostrato che i sottolivelli di $\hat{F}$ sono relativamente compatti rispetto alla convergenza uniforme sulle funzioni e debole in L^2 sulle derivate.

Semicontinuità inferiore: Dobbiamo mostrare che $\hat{F}$ è semicontinua inferiormente rispetto alla stessa nozione di convergenza; in altri termini, dobbiamo mostrare che se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\hat{\mathbb{X}}$ e u_∞ è una funzione in $\mathbb{X}$ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ uniformemente in $[a, b]$ e $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\dot{u}_\infty$ debolmente in L^2 (vedi 2.4.16), allora vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty).$$

Essendo g una funzione continua, per l'ipotesi di convergenza uniforme vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(x; u_n(x))\, dx = \int_a^b g(x; u_\infty(x))\, dx.$$

Quindi, è sufficiente mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \int_a^b [\dot{u}_n(x)]^2\, dx \geq \frac{1}{2} \int_a^b [\dot{u}_\infty(x)]^2\, dx.$$

Questo fatto è stato verificato in 1.1.21.

Regolarità: Per il teorema di Weierstrass nella forma 5.2.6, deduciamo che $\hat{F}$ ammette minimo in $\hat{X}$. Sia u_0 un punto di minimo; vogliamo mostrare che u_0 appartiene ad $\mathbb{X}$, quindi minimizza il funzionale F in $\mathbb{X}$. Sia v una funzione di classe $C_c^\infty((a, b))$.

Calcoliamo la variazione prima di $\hat{F}$ in u_0 lungo la direzione v. Essendo g abbastanza regolare da poter derivare sotto il segno di integrale, abbiamo che

$$\frac{d}{dt}\hat{F}(u_0+tv)\bigg|_{t=0} = \int_a^b \dot{u}_0\dot{v}\ dx + \int_a^b g_s(x;u_0)v(x)\ dx.$$

Essendo u_0 un punto di minimo globale per $\hat{F}$ in $\hat{\mathbb{X}}$ vale che

$$0 = \int_a^b \dot{u}_0\dot{v}\ dx + \int_a^b g_s(x;u_0)v\ dx.$$

Riarrangiando i termini, troviamo che

$$\int_a^b \dot{u}_0\dot{v}\ dx = -\int_a^b g_s(x;u_0)v\ dx.$$

In altri termini, abbiamo mostrato che $\dot{u}_0$ appartiene a $W^{1,2}((a,b))$, quindi u_0 appartiene a $W^{2,2}((a,b))$ e che

$$\ddot{u}_0(x) = g_s(x;u_0(x));$$

questa è l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (infatti tutte le derivate sono intese in senso debole). Essendo u_0 continua e g di classe C^1, deduciamo che $\ddot{u}_0$ è una funzione continua; in particolare, u_0 è di classe C^2 (vedi 4.2.3), quindi appartiene ad $\mathbb{X}$. Deduciamo anche che u_0 risolve l'equazione

$$\ddot{u}_0(x) = g_s(x;u_0(x))$$

in (a,b) nel senso classico (in cui tutte le derivate hanno il significato usuale). Precisiamo anche che se assumiamo che g è di classe C^∞, allora anche u_0 è di classe $C^\infty((a,b))$.

Generalità sui teoremi di compattezza e semicontinuità

Esempio 5.2.8. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni. Consideriamo il funzionale $F : W^{1,p}((a,b)) \to [-\infty,+\infty]$ tale che

$$F(u) := \int_a^b \left[\psi(\dot{u}) + g(x;u)\right]\ dx,$$

definito in qualche spazio di Sobolev. Cerchiamo ipotesi ragionevoli su ψ e g affinchè il funzionale sia ben definito e si possa ottenere l'esistenza del minimo mediante il metodo diretto. Sicuramente dobbiamo assumere che g e ψ siano funzioni boreliane.

Assumiamo le seguenti ipotesi su ψ:

- convessa;
- esiste p in $(1,+\infty)$ e $C, D > 0$ tale che

$$\psi(x) \geq C\,|x|^p - D.$$

Assumiamo le seguenti ipotesi su g:

- continua in $(x;s)$;

- esistono q in $(1,p)$ e $E > 0$ tali che per ogni $(x;s)$ in $[a,b] \times \mathbb{R}$ vale che
$$g(x;s) \geq -E\,|s|^q\,.$$

Innanzitutto osserviamo che sotto queste ipotesi, il funzionale F è ben definito nell'insieme
$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,p}((a,b)) \mid u(a) = A,\ u(b) = B\}$$
ed è a valori in $(-\infty, +\infty]$. Sia data u in $W^{1,p}(\Omega)$: per 4.2.7, per ogni x in $[a,b]$ vale che
$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq |u(a)| + |u(x) - u(a)|\\ &\leq A + \|\dot{u}\|_{L^p((a,b))}\,|x-a|^{\frac{1}{p'}}\\ &\leq A + \|\dot{u}\|_{L^p((a,b))}\,|b-a|^{\frac{1}{p'}}\,,\end{aligned}$$
dove p' è l'esponente coniugato di p (vedi 2.1.5). Allora vale che
$$\begin{aligned}\psi(\dot{u}) + g(x;u) &\geq C\,|\dot{u}(x)|^p - D - E\,|u(x)|^q\\ &\geq C\,|\dot{u}(x)|^p - E'\,\|\dot{u}\|^q_{L^p((a,b))} - D',\end{aligned}$$
per certe costanti D', E'. Integrando, otteniamo che se u appartiene a $W^{1,p}((a,b))$ vale che
$$\int_a^b [\psi(\dot{u}) + g(x;u)]\,dx \geq C'\,\|\dot{u}\|^p_{L^p((a,b))} - E''\,\|\dot{u}\|^q_{L^p((a,b))} - D'',$$
per certe costanti C', D'', E''. Essendo la funzione $C'\xi^p - E''\xi^q - D''$ limitata dal basso (infatti $p > q$), l'integrale è ben definito a valori in $(-\infty, +\infty]$.

Vogliamo ottenere un teorema di compattezza. Siano dati $M > 0$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}((a,b))$ tale che $F(u_n) \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$. Vogliamo mostrare che, a meno di sottosuccessioni (non rinominate), esiste una funzione u_∞ in $W^{1,p}((a,b))$ tale che

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ uniformemente in $[a,b]$,
- $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in L^p (vedi 2.4.16) a $\dot{u}_\infty$.

Per le stime effettuate, deduciamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che
$$M \geq F(u_n) \geq C'\,\|\dot{u}\|^p_{L^p((a,b))} - E''\,\|\dot{u}\|^q_{L^p((a,b))} - D''.$$
Essendo $p > q$, deduciamo che esiste $M' > 0$ tale che
$$\|\dot{u}_n\|_{L^p((a,b))} \leq M'$$
per ogni n in $\mathbb{N}$. Dunque, a meno di sottosuccessioni, non rinominate, $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in L^p ad una funzione v_∞ (vedi 2.4.16). Dalle stime effettuate, si deduce anche che la famiglia $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è equi-continua ed equi-limitata (vedi 4.2.7); per il teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di ulteriori sottosuccessioni, non rinominate, possiamo assumere che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[a,b]$ ad una funzione u_∞. Inoltre, $u_\infty(a) = A$ e $u_\infty(b) = B$; come mostrato in 4.1.8, deduciamo che u_∞ appartiene a $W^{1,p}((a,b))$ e che $\dot{u}_\infty = v_\infty$. Allora u_∞ appartiene ad $\mathbb{X}$.

Vogliamo ottenere un teorema di semicontinuità inferiore. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{X}$ e u_∞ è una funzione in $\mathbb{X}$ tale che

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ uniformemente in $[a,b]$;
- $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\dot{u}_\infty$ debolmente in L^p (vedi 2.4.16).

Vogliamo mostrare che
$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty).$$
Essendo ψ una funzione convessa, il funzionale
$$G(w) := \int_a^b \psi(w)\, dx$$
è convesso in $L^p((a,b))$; inoltre G è fortemente semicontinuo inferiormente, cioè se $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a w_∞ in L^p, allora
$$\liminf_{n\to+\infty} G(u_n) \geq G(u_\infty).$$
Infatti, estratta una sottosuccessione che realizza il limite inferiore, si può supporre che questa converga a u_∞ puntualmente quasi ovunque in (a,b); allora la disuguaglianza segue dal lemma di Fatou. Come mostrato in 1.1.34, G è un funzionale debolmente semicontinuo inferiormente. Quindi, se $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\dot{u}_\infty$ debolmente in L^p (vedi 2.4.16), allora vale che
$$\liminf G(\dot{u}_n) \geq G(\dot{u}_\infty).$$
Del resto, essendo g continua e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente uniformemente a u_∞, vale che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(x; u_n(x))\, dx = \int_a^b g(x; u_\infty(x))\, dx.$$
Questo è sufficiente a concludere che F è semicontinuo inferiormente. Precisiamo che potremmo ottenere lo stesso risultato anche assumendo che g sia soltanto semicontinua inferiormente rispetto alla variabile s e uniformemente limitata dal basso. In tal caso, la disuguaglianza
$$\liminf_{n\to+\infty} \int_a^b g(x; u_n(x))\, dx \geq \int_a^b g(x; u_\infty(x))\, dx$$
è una conseguenza immediata del lemma di Fatou e della semicontinuità di g in s.

In ogni caso, il teorema di Weierstrass (vedi 5.2.6) garantisce l'esistenza del minimo per il funzionale F nell'insieme $\mathbb{X}$.

Esempio 5.2.9. Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 (vedi 4.4.9) e limitato; sia p in $(1,+\infty)$. Sia $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana, limitata dal basso; supponiamo anche che per quasi ogni x in Ω la funzione $g(x;\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia semicontinua inferiormente. Sia u_0 una funzione fissata in $W^{1,p}(\Omega)$; poniamo
$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u_0)\}.$$
Definiamo il funzionale $F : W^{1,p}(\Omega) \to (-\infty,+\infty]$ tale che
$$F(u) := \int_\Omega \Big[|\nabla u(x)|_p^p + g(x; u(x)) \Big]\, dx;$$
vogliamo mostrare che F ammette minimo in $\mathbb{X}$.

Osserviamo innanzitutto che F è ben definito in $W^{1,p}(\Omega)$. Dobbiamo mostrare che i sottolivelli di F sono compatti e che F è semicontinua inferiormente in qualche senso. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{X}$ e $M > 0$ tale che

$$F(u_n) \leq M$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Essendo g limitata dal basso e Ω limitato, esiste una costante M' tale che

$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}^p \leq M'$$

per ogni n in $\mathbb{N}$. Come mostrato in 2.4.16, esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $v_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tale che $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v_∞ debolmente in L^p. Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $u_n - u_0$ è in $W_0^{1,p}(\Omega)$ (vedi 4.7.9). Per la disuguaglianza di Poincarè (vedi 4.7.11) esiste una costante c tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_0\|_{L^p(\Omega)} &\leq c\,\|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq c\,\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} + c\,\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq c(M')^{\frac{1}{p}} + \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

In particolare, deduciamo che esiste una costante M'' tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M''$. Pertanto, abbiamo ottenuto che la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Essendo Ω regolare e limitato, per il teorema di immersione compatta (vedi 4.5.14), possiamo dedurre che esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione u_∞ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ in $L^p(\Omega)$. Precisiamo che se $p > d$ la convergenza è uniforme, se $p < d$ la convergenza è in $L^{p^*}(\Omega)$, dove p^* è l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 4.5.2); in ogni caso, essendo Ω un aperto limitato, si deduce che vale la convergenza in L^p. Come mostrato in 4.1.8, otteniamo che u_∞ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e che $\nabla u_\infty = v_\infty$. Per la dipendenza continua della traccia (vedi 4.6.7), vale che $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ in $L^p(\partial\Omega)$; dunque u_∞ appartiene ad $\mathbb{X}$. Dobbiamo mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty).$$

Essendo $\psi(x) := |x|^p$ una funzione convessa e ricordando che $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ∇u_∞ debolmente in L^p, per quanto mostrato in 1.1.34, vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n(x)|_p^p \; dx \geq \int_\Omega |\nabla u_\infty(x)|_p^p \; dx.$$

Dunque, basta mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x; u_n(x)) \; dx \geq \int_\Omega g(x; u_\infty(x)) \; dx.$$

A meno di passare a ulteriori sottosuccessioni, si può assumere che il limite inferiore sia un limite. Dal momento che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ in $L^p(\Omega)$, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad u_∞ quasi certamente in Ω. Per le ipotesi su

g, possiamo applicare il lemma di Fatou e otteniamo

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega g(x;u_n(x))\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega g(x;u_{n_k}(x))\,dx\\ &\geq \int_\Omega \liminf_{k\to+\infty} g(x;u_{n_k}(x))\,dx\\ &= \int_\Omega g(x;u_\infty(x)).\end{aligned}$$

Concludiamo che F ammette minimo in $\mathbb{X}$ grazie al teorema di Weierstrass nella forma 5.2.6. Supponiamo che g sia di classe $C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ e che sia abbastanza regolare da poter derivare sotto il segno di integrale. Detto u_0 un punto di minimo del funzionale F in $\mathbb{X}$, sia v una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$. Possiamo calcolare la variazione prima di F in u_0 lungo la direzione v, ovvero

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(u_0+tv)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \left[|\nabla u_0(x)+t\nabla v(x)|_p^p + g(x;u_0(x)+tv(x))\right]\,dx\right]_{t=0}\\ &= \int_\Omega p\left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^{p-1}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\,dx + \int_\Omega v(x)g_p(x;u_0(x))\,dx.\end{aligned}$$

Essendo u_0 punto di minimo, troviamo che

$$\int_\Omega p\left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)^{p-1}\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\,dx + \int_\Omega v(x)g_p(x;u_0(x))\,dx = 0$$

per ogni v in $C_c^\infty(\Omega)$. Dunque, u_0 risolve in forma molto debole l'equazione di Eulero-Lagrange. A differenza del caso unidimensionale, non riusciamo a dedurre facilmente che u_0 è regolare. In ogni caso, affronteremo questo problema nel seguito.

5.2.4 Moltiplicatori di Lagrange

Siano dati due funzionali F, G definiti su un insieme $\mathbb{X}$ a valori in $(-\infty,+\infty]$. Vogliamo minimizzare F nel sottoinsieme di $\mathbb{X}$ vincolato a G, cioè in

$$\tilde{\mathbb{X}} := \{u\in\mathbb{X} \mid G(u)=0\}.$$

Si tratta di una generalizzazione della classe di problemi che in dimensione finita è possibile affrontare tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Supponendo che F, G sia derivabili alla Gateaux (vedi 5.1.3) e che u_0 minimizzi F in $\tilde{\mathbb{X}}$, si può dimostrare vale una delle seguenti alternative:

- $\delta G(u_0;v)=0$ per ogni direzione v ammissibile;
- esiste λ in $\mathbb{R}$ tale che
$$\delta F(u_0;v) = \lambda\delta G(u_0;v)$$
per ogni direzione v ammissibile (λ è detto moltiplicatore di Lagrange).

In ogni caso, non vogliamo sviluppare questa teoria. Ci limitiamo a mostrare un esempio in cui siamo in grado di dare una dimostrazione dettagliata.

Esempio 5.2.10. Sia $(0, l)$ un intervallo limitato in $\mathbb{R}$; definiamo i funzionali

$$F(u) := \int_0^l \dot{u}(x)^2 \, dx,$$

$$G(u) := \int_0^l u(x)^2 \, dx.$$

Vogliamo minimizzare F nell'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}((0,l)) \mid G(u) = 1, \; u(0) = u(l) = 0\}.$$

L'esistenza di tale minimo segue dall'applicazione del metodo diretto: è sufficiente procedere come nell'esempio 5.2.7 e osservare se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $W^{1,2}((0,l))$ che converge a u_∞ uniformemente in $[0,l]$, allora vale che

$$\lim_{n\to+\infty} G(u_n) = G(u_\infty).$$

Sia u_0 un punto di minimo. Vogliamo considerare delle curve in $\mathbb{X}$ e calcolare la derivata direzionale di F in u_0 lungo tali curve. Per ogni v in $C_c^\infty(\Omega)$ in L^2 a u_0 possiamo considerare la curva

$$u_t := \frac{u_0 + tv}{\|u_0 + tv\|_{L^2((0,l))}}.$$

Dal momento che $\|u_0\|_{L^2((0,l))} = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che la curva u_t è ben definita in $(-\delta, \delta)$ ed è contenuta in $\mathbb{X}$; inoltre, al tempo $t = 0$ coincide con u_0. Essendo u_0 minimo globale per F in $\mathbb{X}$, si trova facilmente che

$$0 = \frac{d}{dt} F(u_t)\Big|_{t=0} = \int_0^l 2\dot{u}_0(x)\dot{v}(x) \, dx - \|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))} \int_0^l 2u_0(x)v(x) \, dx;$$

dunque, per ogni v in $C_c^\infty((0,l))$ vale che

$$\int_0^l \dot{u}_0(x)\dot{v}(x) \, dx = \|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))} \int_0^l u_0(x)v(x) \, dx.$$

Osserviamo che abbiamo mostrato che esiste λ in $\mathbb{R}$ tale che per ogni funzione test v in $C_c^\infty((0,l))$ vale che

$$\delta F(u_0; v) = \lambda \delta G(u_0; v).$$

In particolare, otteniamo che $\dot{u}_0$ appartiene a $W^{1,2}((0,l))$ e vale che

$$\ddot{u}_0 = -\|\dot{u}_0\|_{L^2((0,l))} u_0,$$

dove tutte le derivate sono intese in senso debole. Essendo u_0 una funzione continua, deduciamo che $\ddot{u}_0$ è continua; dunque u_0 è di classe $C^2((0,l))$; ragionando per bootstrap, si deduce che u_0 è di classe $C^\infty((0,l))$ e risolve il seguente problema differenziale in senso classico:

$$\begin{cases} \ddot{u}_0(x) = -\|\dot{u}_0\|_{L^2((0,l))} u_0(x) & \text{se } x \in (0,l), \\ u(0) = u(l) = 0, \\ \|u_0\|_{L^2((0,l))} = 1. \end{cases}$$

Se poniamo $\lambda := \|\dot{u}_0\|_{L^2((0,l))}$, è immediato trovare che u_0 deve essere della forma

$$u_0(x) := a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Imponendo le condizioni al bordo e ricordando che $\|u_0\|_{L^2((0,l))} = 1$, si trova che

$$a = 0,$$

$$b \neq 0,$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$$

per qualche k intero. Dunque, esistono k in $\mathbb{N}$ e b in $\mathbb{R}$ tali che

$$u_0(x) = b\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Imponendo che $\|u_0\|_{L^2((0,l))} = 1$, troviamo che $b = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Osserviamo che la condizione

$$\frac{k^2\pi^2}{l^2} = \lambda = \|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))}$$

è verificata per ogni k in $\mathbb{N}$. Tuttavia, il valore di k che rende minimo $\|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))}$ è ovviamente $k = 1$. Concludiamo che vale

$$u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right).$$

Se denotiamo con $P(l)$ il valore minimo di F in $\mathbb{X}$, deduciamo anche che

$$P(l) = \frac{\pi}{l}.$$

Pertanto, per ogni funzione u in $W_0^{1,2}((0,l))$ è immediato dedurre che

$$P(l)\,\|u_0\|^2_{L^2((0,l))} \leq \|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))} = \|\dot{u}_0\|^2_{L^2((0,l))}.$$

Abbiamo ottenuto un caso particolare della disuguaglianza di Poincarè (vedi 4.7.11).

5.2.5 Approccio variazionale alle equazioni differenziali

Vogliamo mostrare che un certo problema differenziale ammette soluzione. Introduciamo un problema di minimo di cui l'equazione data è l'equazione di Eulero-Lagrange.

Esempio 5.2.11. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = g(u(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ u(a) = A, \\ u(b) = B. \end{cases}$$

Vogliamo mostrare che ammette soluzione. Innanzitutto, osserviamo che non è un problema di Cauchy, perchè abbiamo imposto condizioni al bordo di Dirichlet; pertanto, non possiamo utilizzare il teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz. Questo problema differenziale è legato ad un problema di minimo nella maniera che segue. Sia $G : \mathbb{R} \to R$ una primitiva di g; introduciamo la lagrangiana $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$L(x; s; p) := \frac{1}{2}p^2 + G(s);$$

definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b L(x; u; u')\ dx = \int_a^b \left[\frac{1}{2}[\dot{u}(x)]^2 + G(u(x))\right]\ dx.$$

Se mostriamo che tale funzionale ammette minimo nello spazio

$$\mathbb{X} := u \in W^{1,2}((a,b)) \mid u(a) = A,\ u(b) = B\},$$

allora concludiamo che il problema ha soluzione. Infatti, se u_0 minimizza F in $\mathbb{X}$, per ogni funzione test v in $C_c^\infty((a,b))$ vale che

$$0 = \frac{d}{dt}F(u_0 + tv)\bigg|_{t=0}.$$

In altri termini, vale che

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left\{\int_a^b \left[\frac{1}{2}(u_0' + tv')^2 + G(u_0 + tv)\right]\ dx\right\}_{t=0} \\
&= \int_a^b [u_0'(x)v'(x) + G'(u_0(x))v(x)]\ dx \\
&= \int_a^b [u_0'(x)v'(x) + g(u_0(x))v(x)],
\end{aligned}$$

dove abbiamo derivato sotto il segno di integrale (osserviamo che, essendo g continua, G è di classe $C^1(\mathbb{R})$; inoltre u_0 è una funzione continua in $[a,b]$, quindi è limitata; dunque, è possibile derivare sotto il segno di integrale). Abbiamo mostrato che u_0 risolve l'equazione di Eulero-Lagrange in una forma molto debole. Per definizione (vedi 4.1.1), abbiamo che u_0' appartiene a $W^{1,2}((a,b))$ e in (a,b) vale l'equazione

$$u_0''(x) = g(u_0(x)),$$

dove tutte le derivate sono intese in senso debole. Essendo u_0 e g continue, abbiamo che u_0'' è una funzione continua; pertanto u_0 è di classe $C^2((a,b))$ e la derivata in senso classico coincide con quella in senso debole. Dunque u_0 risolve il problema differenziale iniziale. Precisiamo anche che, se g è di classe $C^k(\mathbb{R})$, allora si trova che u_0 è di classe $C^{k+2}((a,b))$. Pertanto, dobbiamo soltanto dare condizioni su g per poter dedurre l'esistenza del minimo di F in $\mathbb{X}$ tramite il metodo diretto. Per quanto mostrato esplicitamente nell'esempio 5.2.8, è sufficiente che g ammetta una primitiva G tale che esistono due costanti positive C, D e q in $[1,2)$ tale che per ogni s in $\mathbb{R}$ vale che

$$G(s) \geq -C - D\,|s|^2\,;$$

questa condizione è verificata se g è dispari oppure se è limitata dal basso: se G è la primitiva tale che $G(0) = 0$, nel primo caso G è non negativa, nel secondo caso, esiste una costante positiva C tale che per ogni s in $\mathbb{R}$ vale che

$$G(s) \geq -C\,|s|\,.$$

Ammettiamo che il problema differenziale abbia soluzione. Vogliamo studiare l'unicità di tale soluzione. Supponiamo che g sia una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$ e che sia crescente (anche non strettamente). Allora la lagrangiana L è convessa nella coppia $(s; p)$ (basta calcolare la matrice hessiana) ed è strettamente convessa nella variabile p. Sia u una soluzione del problema differenziale; vogliamo mostrare che u minimizza il funzionale F in $\mathbb{X}$. Data un'altra funzione w in $\mathbb{X}$, poniamo $v := w - u$ e osserviamo che $v(a) = v(b) = 0$; per la convessità di L vale che

$$\begin{aligned}
F(w) &= F(u+v) \\
&= \int_a^b L(u + (w-u); u' + (w' - u'))\ dx \\
&\geq \int_a^b [L(u;u') + L_s(u;u')v + L_p(u;u')v']\ dx \\
&= F(u) + \int_a^b [u'v' + g(u)v]\ dx;
\end{aligned}$$

osserviamo che se v non è la funzione identicamente nulla, allora $v'(x) \neq 0$ in un insieme di misura positiva: se così non fosse, avremmo che v è costante per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), quindi $v(x) = 0$ per ogni x in (a,b). Allora, dalla stretta convessità rispetto alla variabile p segue che la disuguaglianza è stretta. Se mostriamo che

$$\int_a^b [u'v' + g(u)v]\ dx = 0,$$

concludiamo che u è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$ e che tale punto di minimo è anche unico. Integrando per parti (vedi 4.2.9), vale che

$$\int_a^b [u'v' + g(u)v]\ dx = \int_a^b [-\ddot{u}v + g(u)v]\ dx = 0.$$

Allora, otteniamo che la soluzione del problema differenziale è unica.

Supponendo soltanto g crescente, possiamo ottenere l'unicità della soluzione anche in altro modo. Siano u, v due soluzioni del problema differenziale. Osserviamo che

$$\ddot{u} - \ddot{v} = g(u) - g(v)$$

in (a,b); moltiplicando per $u - v$, troviamo che

$$(\ddot{u} - \ddot{v})(u-v) = (g(u) - g(v))(u-v) \geq 0$$

in (a,b), perchè g è crescente. Essendo $u - v$ di classe $C^2((a,b))$ possiamo integrare per parti e otteniamo che

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_a^b (\ddot{u} - \ddot{v})(u-v)\ dx \\
&- \int_a^b (u'-v')^2\ dx + \Big[(u-v)(u'-v')\Big]_0^1 \\
&= -\int_a^b (u'-v')^2\ dx,
\end{aligned}$$

dal momento che $u - v$ si annulla in a e in b. Concludiamo che $u - v$ è una funzione costante, quindi vale identicamente 0.

Esempio 5.2.12. Dato $\lambda > 0$ consideriamo il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = -\lambda \sin(u(x)) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione identicamente nulla risolve il problema dato per ogni $\lambda > 0$. Introduciamo il funzionale

$$F_\lambda(u) := \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\dot{u}(x)^2 + \lambda \cos(u(x)) \right] dx.$$

Ragionando come nell'esempio 5.2.11, si mostra che per ogni $\lambda > 0$ il funzionale F_λ ammette minimo nell'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}((0,\pi)) \mid u(0) = u(\pi) = 0\};$$

detto u_λ un punto di minimo, si ha che u_λ è di classe $C^{\infty_c}((0,\pi))$ e risolve il problema differenziale dato. Tuttavia, se λ è abbastanza grande, è facile mostrare l'esistenza di funzioni u in $\mathbb{X}$ tali che $F_\lambda(u) < 0$; in particolare, u_λ non può essere la funzione identicamente nulla. Questo esempio mostra che in generale non c'è unicità della soluzione per problemi differenziali con dato al bordo di Dirichlet.

Presentiamo alcune varianti dell'esempio 5.2.11, limitandoci a discutere come trasformare i problemi differenziali in problemi di minimo.

Esempio 5.2.13. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = g(u(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ u(a) = A, \\ \dot{u}(b) = 0. \end{cases}$$

Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una primitiva di g. Introduciamo la lagrangiana $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$L(s;p) := \frac{1}{2}p^2 + G(s)$$

e definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b L(u;\dot{u})\ dx.$$

Poniamo

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}((a,b)) \mid u(a) = A\}.$$

Assumendo che il funzionale F sia ben definito in $\mathbb{X}$, possiamo mostrare che ammette minimo tramite il metodo diretto (bisogna adattare l'esempio 5.2.7). Supponiamo di aver trovato un punto di minimo u_0 in $\mathbb{X}$. Come precisato in 5.2.11, si mostra che per ogni v in $C_c^\infty((a,b))$ vale che

$$\int_a^b \dot{u}_0(x)\dot{v}(x)\ dx = -\int_a^b g(u_0(x))v(x)\ dx;$$

allora si trova che u_0 è di classe $C^2((a,b))$ e risolve l'equazione differenziale

$$u_0''(x) = g(u(x))$$

per ogni x in (a,b). Scegliendo v in $C^\infty((a,b))$ tale che $v(a)=0$ e $v(b)=1$, possiamo calcolare la variazione prima di F in u_0 nella direzione v. Si trova facilmente che deve valere $\dot{u}_0(b)=0$, che è la condizione di Neumann che non abbiamo imposto all'inizio.

Esempio 5.2.14. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = g(u(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ \dot{u}(a) = 0, \\ \dot{u}(b) = 0. \end{cases}$$

Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una primitiva di g. Introduciamo la lagrangiana $L:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che

$$L(s;p) := \frac{1}{2}p^2 + G(s)$$

e definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b L(u;\dot{u})\,dx.$$

Vogliamo minimizzare F in $W^{1,2}((a,b))$ senza imporre ulteriori condizioni. Assumendo che il funzionale F sia ben definito, il problema dell'esistenza del minimo può essere affrontato tramite il metodo diretto, come nell'esempio 5.2.11: l'unica reale differenza è che non avendo condizioni al bordo imposte, bisogna utilizzare il teorema della media integrale per ottenere una stima puntuale a partire da una stima sul funzionale (in particolare, questo è possibile per alcune funzioni g; tuttavia, non vogliamo discutere dettagliatamente questo argomento). Supponiamo che u_0 sia un punto di minimo in $W^{1,2}((a,b))$. Ragionando come nell'esempio 5.2.11, si mostra che u_0 è di classe $C^2((a,b))$ e risolve in (a,b) l'equazione

$$u''(x) = g(u(x)).$$

Procedendo come nell'esempio 5.2.13, si mostra che $\dot{u}_0(a) = \dot{u}_0(b) = 0$.

Esempio 5.2.15. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = g(u(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ u(a) = A, \\ \dot{u}(b) = B. \end{cases}$$

Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una primitiva di g. Sia λ un parametro reale. Introduciamo la lagrangiana $L:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che

$$L(s;p) := \frac{1}{2}p^2 + \lambda p + G(s)$$

e definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b L(u;\dot{u})\,dx.$$

Vogliamo minimizzare F nell'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}((a,b)) \mid u(a) = A\}$$

senza ulteriori condizioni sull'estremo b. Ragionando come nell'esempio 5.2.11, si può mostrare che sotto certe ipotesi di regolarità di g (che non vogliamo discutere) tale funzionale ammette minimo in $\mathbb{X}$ tramite il metodo diretto. Sia u_0 un punto di minimo. Data v una funzione test in $C_c^\infty((a,b))$, ragionando come in 5.2.11, si trova che

$$\int_a^b [\dot{u}_0(x) + \lambda]\dot{v}(x)\ dx = \int_a^b v(x)g(u_0(x))\ dx;$$

essendo v di classe $C_c^\infty((a,b))$, si trova che

$$\int_a^b \dot{u}_0(x)\dot{v}(x)\ dx = \int_a^b v(x)g(u_0(x))\ dx;$$

otteniamo che u_0 è di classe $C^2((a,b))$ e risolve in tale intervallo l'equazione

$$u_0''(x) = g(u_0(x)).$$

Se scegliamo v di classe $C_c^\infty((a,b))$ tale che $v(a) = 0$ e $v(b) = 1$, troviamo che

$$\dot{u}_0(b) + \lambda = 0,$$

che è la condizione di Neumann nell'estremo b. Allora, per ottenere che u_0 soddisfa il problema differenziale dato, bisogna imporre $\lambda = -B$.

Esempio 5.2.16. Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^0(\mathbb{R})$. Consideriamo il problema seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = g(u(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ \dot{u}(a) = A, \\ \dot{u}(b) = B. \end{cases}$$

Abbiamo condizioni di Neumann non omogenee: possiamo procedere in due modi.

Primo approccio: Sia $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x$ tale che $\varphi'(a) = A$ e $\varphi'(b) = B$. Sia u una soluzione del problema dato; consideriamo la funzione

$$v(x) := u(x) - \varphi(x).$$

Osserviamo che v risolve il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \ddot{v}(x) = \ddot{u}(x) - 2\alpha = g(u(x)) - 2\alpha = g(v(x) + \varphi(x)) - 2\alpha & \text{se } x \in (a,b), \\ \dot{v}(a) = 0, \\ \dot{v}(b) = 0. \end{cases}$$

Con questo cambio di variabile, abbiamo mostrato che v risolve un problema differenziale con condizioni di Neumann omogenee, del tipo discusso nell'esempio 5.2.14. In particolare, se G è una primitiva di g, dovremo minimizzare il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2}\dot{u}(x)^2 + G(v(x) + \varphi(x)) - 2\alpha u(x)\right]\ dx$$

nell'insieme $W^{1,2}((a,b))$ senza ulteriori condizioni.

Secondo approccio: Sia $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ una funzione lineare tale che $\varphi(a) = A$ e $\varphi(b) = B$. Sia G una primitiva di g; introduciamo la lagrangiana

$$L(x; s; p) := \frac{1}{2}p^2 - (\alpha x + \beta)p + G(s) - \alpha s.$$

Minimizzando il funzionale

$$F(u) := \int_a^b L(x; u; \dot{u})\ dx,$$

si trova che i punti di minimo (se esistono) risolvono il problema differenziale dato e rispettano le condizioni al bordo imposte.

5.3 Regolarità L^2 per problemi con condizioni al bordo di Dirichlet

Dato un intero $d \geq 2$, denoteremo con $S(d; d; \mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche a coefficienti reali. Inoltre, dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^d$ e una funzione u in $W^{1,2}(\Omega)$, faremo riferimento a ∇u come ad un vettore riga.

5.3.1 Soluzione debole per alcuni problemi differenziali

Definizione 5.3.1 (Ellitticità)**.**
Siano $d \geq 2$, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ una funzione e $\nu > 0$. Diremo che A è uniformemente ellittica con coefficiente di ellitticità ν se per ogni x in Ω per ogni ξ in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$[\xi]^t A(x)[\xi] \geq \nu \left|\xi\right|^2.$$

Osservazione 5.3.2. Nelle notazioni della definizione 5.3.1, se A è uniformemente ellittica con coefficiente di ellitticità ν, allora $A_{(i;i)}(x) \geq \nu$ per ogni x in Ω per ogni i in $\{1; \ldots; d\}$.

Definizione 5.3.3 (Equazione lineare)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $A : \Omega \to S(d, d, \mathbb{R})$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzioni boreliane. Sia u una funzione in $W^{1,2}(\Omega)$; si dice che u è soluzione debole in Ω dell'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la formula

$$\int_\Omega < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) >\ dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx,$$

assumendo che tutti gli integrali sono ben definiti. L'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

è detta lineare; l'equazione è detta ellittica A è uniformemente ellittica.

Definizione 5.3.4 (Equazione semi-lineare)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $A : \Omega \to S(d, d, \mathbb{R})$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funzioni boreliane. Sia $G : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una primitiva di g rispetto ad s, cioè per ogni $(x; p)$ in $\Omega \times \mathbb{R}^d$ vale

$$\frac{\partial G}{\partial s}(x; \cdot; p) = g(x; \cdot; p).$$

Sia u una funzione in $W^{1,2}(\Omega)$; si dice che u è soluzione debole in Ω dell'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u; \nabla u)$$

se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la formula

$$\int_\Omega < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_\Omega G(x; u(x); \nabla u(x))\varphi(x)\ dx,$$

assumendo che tutti gli integrali sono ben definiti. L'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u; \nabla u)$$

è detta semi-lineare.

Osservazione 5.3.5. Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 (vedi 4.4.9) e limitato. Siano $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ come nella definizione 5.3.3. Supponiamo che A sia in $L^\infty(\Omega)$ e che f sia in $L^2(\Omega)$. Definiamo il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega \left[\frac{1}{2} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla u(x) > + u(x)f(x)\right]\ dx.$$

Sia data u_0 una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$. Poniamo

$$\mathbb{X} \coloneqq \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}(u_0)\}.$$

Si può mostrare come nell'esempio 5.2.9 che il funzionale F è ben definito in $\mathbb{X}$ ammette minimo in $\mathbb{X}$. Sia w_0 un punto di minimo: vogliamo studiarne la regolarità. Osserviamo che per ogni funzione φ di classe $C_c^\infty(\Omega)$ è ben definita la variazione prima di F in w_0 lungo la direzione φ. Infatti, possiamo calcolare

$$0 = \frac{d}{dt}F(w_0 + t\varphi)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega \left[< A(x)[\nabla w_0(x)]^t, \nabla\varphi(x) > + \varphi(x)f(x)\right]\ dx.$$

Dunque, w_0 è soluzione debole (vedi 5.3.3) dell'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

e verifica le condizioni al bordo di Dirichlet, cioè $\operatorname{Tr}(w_0) = \operatorname{Tr}(u_0)$.

Esempio 5.3.6. Data un'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f,$$

con le stesse notazioni della definizione 5.3.3, è particolarmente significativo il caso in cui A è la matrice identità. In tal caso, l'equazione diventa

$$\Delta u = f,$$

intendendo che una funzione u_0 in $W^{1,2}(\Omega)$ la risolve in Ω se

$$\int_\Omega < [\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx$$

per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$. Supponiamo che f sia in $L^2(\Omega)$ e che sia assegnata una funzione u_0 in $W^{1,2}(\Omega)$; introduciamo l'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u_0)\}$$

e definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left|\nabla u(x)\right|^2 + f(x)u(x)\right]\ dx.$$

Si verifica come nell'esempio 5.2.9 che F ammette minimo in $\mathbb{X}$ e, ragionando come in 5.3.5, si deduce che se w_0 è punto di minimo, allora risolve l'equazione

$$\Delta w_0 = f$$

in senso debole.

Osservazione 5.3.7. Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ regolare (vedi 4.4.9) e limitato. Siano $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ ed $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come nella definizione 5.3.4 (g non dipende da p). Supponiamo che A sia in L^∞ e che g sia continua e limitata. Per ogni x in Ω poniamo

$$G(x; s) := \int_0^s g(x; t)\ dt.$$

Supponiamo che G sia limitata. Definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla u(x) > + G(x; u(x))\right]\ dx.$$

Sia data u_0 una funzione in $W^{1,2}(\Omega)$. Poniamo

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u_0)\}.$$

Si può mostrare come nell'esempio 5.2.9 che il funzionale F è ben definito in $\mathbb{X}$ e ammette minimo in $\mathbb{X}$. Sia w_0 un punto di minimo: vogliamo studiarne la regolarità. Osserviamo che per ogni funzione φ di classe $C_c^\infty(\Omega)$ è ben definita la variazione prima di F in w_0 lungo la direzione φ. Infatti, possiamo calcolare

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}F(w_0 + t\varphi)\bigg|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \left[< A(x)[\nabla w_0(x)]^t, \nabla\varphi(x) > + \varphi(x)g(x; w_0(x))\right]\ dx, \end{aligned}$$

ricordando che è possibile derivare sotto il segno di integrale perchè g e G sono limitate e G è C^1 in s. Dunque, w_0 è soluzione debole (vedi 5.3.3) dell'equazione semi-lineare

$$\mathrm{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u)$$

e verifica la condizioni al bordo di Dirichlet, cioè $\mathrm{Tr}(w_0) = \mathrm{Tr}(u_0)$.

Esistenza di soluzioni deboli alla Lax-Milgram

Nelle notazioni della definizione 5.3.3, abbiamo mostrato che l'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

ammette soluzione debole formulando un problema di minimo la cui soluzione si rivela equivalente (vedi 5.3.5) al problema iniziale. Tuttavia, possiamo ottenere l'esistenza delle soluzioni deboli utilizzando un approccio diverso.

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 (vedi 4.4.9), $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ in $L^\infty(\Omega)$ e f in $L^2(\Omega)$. Supponiamo che A sia uniformemente ellittica con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Consideriamo l'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f;$$

vogliamo mostrare che ammette soluzione in senso debole in Ω (vedi 5.3.3).

Per ogni u, v in $H_0^1(\Omega)$, definiamo

$$<< u, v >>:= \int_\Omega < A[\nabla u]^t, \nabla v > \ dx.$$

Vogliamo mostrare che $H_0^1(\Omega)$ dotato di $<< \cdot, \cdot >>$ è uno spazio di Hilbert. Ovviamente $<< \cdot, \cdot >>$ è una forma bilineare simmetrica (infatti A è simmetrica); è definita positiva perchè per ogni u in $H_0^1(\Omega)$ vale che

$$<< u, u >>= \int_\Omega [\nabla u] A [\nabla u]^t \ dx \geq \nu \left\| \nabla u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

e vale 0 se e solo se $\nabla u = 0$ quasi ovunque in Ω (è fondamentale che A sia uniformemente ellittica); per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7), u coincide con una funzione costante in ogni componente connessa di Ω; essendo u a traccia nulla su $\partial\Omega$, u è nulla (vedi 4.6.10). Dunque $<< \cdot, \cdot >>$ è un prodotto scalare definito positivo; osserviamo che, per la disuguaglianza di Poincarè, esiste una costante $c(\Omega)$ dipendente da Ω tale che per ogni u in $H_0^1(\Omega)$ vale che

$$\left\| u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

In particolare, deduciamo che

$$<< u, u >>\geq \nu \left\| \nabla u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\nu}{c(\Omega)^2} \left\| u \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Dunque, se $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare $<< \cdot, \cdot >>$, allora $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla norma $\left\| \cdot \right\|_{1,2,\Omega}$; pertanto esiste u_∞ in $H_0^1(\Omega)$ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ in $\left\| \cdot \right\|_{1,2,\Omega}$. Essendo A in $L^\infty(\Omega)$, si ha che

$$<< \nabla u, \nabla u >>\leq \left\| \nabla u \right\|^2_{L^2(\Omega)} \left\| A \right\|_{L^\infty(\Omega)};$$

allora, è chiaro che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ anche rispetto alla norma indotta da $< \cdot, \cdot >$. Questo è sufficiente a concludere che $(H_0^1(\Omega); << \cdot, \cdot >>)$ è uno spazio di Hilbert.

Consideriamo il funzionale $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tale che

$$L(\varphi) := -\int_\Omega f\varphi \ dx.$$

L è ovviamente lineare; mostriamo che è continuo rispetto alla norma indotta da $<< \cdot, \cdot >>$:

$$\begin{aligned}\left| -\int_\Omega f\varphi \, dx \right| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} c(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \frac{c(\Omega)}{\sqrt{\nu}} \sqrt{<< u, u >>}.\end{aligned}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, applicato allo spazio $(H_0^1(\Omega); << \cdot, \cdot >>)$, esiste una u in $H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni φ in $H_0^1(\Omega)$ vale che

$$<< u, \varphi >>= L(\varphi),$$

ovvero

$$\int_\Omega < A[\nabla u]^t, \nabla\varphi > \, dx = -\int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Regolarità via stime in spazi di Sobolev di ordine alto

Supponiamo che u sia una funzione di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che risolve l'equazione lineare (vedi 5.3.3) o semi-lineare (vedi 5.3.4) in senso classico su un aperto Ω. Utilizzando la formula della divergenza, si verifica banalmente che soddisfa tali equazioni anche in senso debole.

Proposizione 5.3.8. *Siano $d \geq 1$ un intero e u in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, f in $L^2(\mathbb{R}^d)$, $A : \mathbb{R}^d \to S(d; d; \mathbb{R})$ di classe $C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che A sia uniformemente ellittica con coefficiente di ellitticità ν (vedi 5.3.1). Supponiamo che*

$$div(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso classico su $\mathbb{R}^d$. Allora vale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d}{\nu} \left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right].$$

Dimostrazione. Sappiamo che u risolve l'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

nel senso debole (vedi 5.3.3) in $\mathbb{R}^d$. Allora, per ogni funzione test φ di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) \, dx.$$

Fissato k in $\{1; \ldots; d\}$, scegliamo come funzione test $\varphi := u_{x_k x_k}$; otteniamo che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla u_{x_k x_k}(x) > \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) u_{x_k x_k}(x) \, dx.$$

Vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) u_{x_k x_k}(x) \, dx \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|u_{x_k x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Commutando l'ordine di derivazione, integrando per parti e utilizzando le ipotesi su A, otteniamo che

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^d} < A[\nabla u]^t, \nabla u_{x_k x_k} > \ dx &= \int_{\mathbb{R}^d} < (A[\nabla u)_{x_k}]^t, \nabla u_{x_k} > \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} < A_{x_k}[\nabla u]^t, \nabla u_{x_k} > \ dx + \int_{\mathbb{R}^d} < A[\nabla u_{x_k}]^t, \nabla u_{x_k} > \ dx \\
&\geq - \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \nu \|\nabla u_{x_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} .
\end{aligned}$$

Pertanto, otteniamo che

$$\nu \|\nabla u_{x_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} ,$$

da cui segue che

$$\|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\nu} \left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right] .$$

Essendo k in $\{1; \ldots ; d\}$, otteniamo la disuguaglianza desiderata. □

Corollario 5.3.9. *Siano $d \geq 1$, Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$, f in $L^\infty(\Omega)$, u in $C^\infty(\Omega)$ e $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ di classe $C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ uniformemente ellittica in Ω con coefficiente di ellitticità ν (vedi 5.3.1). Supponiamo che u sia soluzione dell'equazione*

$$div(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso classico in Ω. Siano Ω' e Ω'' aperti in Ω tali che Ω' è relativamente compatto in Ω'' e Ω'' è relativamente compatto in Ω. Allora esiste una costante $c(\nu; \Omega'; \Omega'')$, dipendente soltanto da ν, Ω' e Ω'' tale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq c(\nu; \Omega'; \Omega'') \left[\|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|A\|_{1,\infty,\Omega''} \|u\|_{1,2,\Omega''} \right] .$$

Dimostrazione. Sia θ una funzione $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $\theta(x) = 1$ in Ω' e $\theta(x) = 0$ in Ω''. Se definiamo $v := u\theta$, si osserva facilmente che v risolve l'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla v]^t) = f\theta + u\operatorname{div}(A[\nabla \theta]^t) + 2 < \nabla u, A[\nabla \theta]^t >:= \hat{f}$$

in senso classico su tutto $\mathbb{R}^d$. Pertanto, per la proposizione 5.3.8 vale che

$$\begin{aligned}
\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} &= \left\|D^2 v\right\|_{L^2(\Omega')} \\
&\leq \left\|D^2 v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \frac{d}{\nu} \left[\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right] \\
&= \frac{d}{\nu} \left[\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega'')} + \|\nabla A\|_{C^0(\Omega'')} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')} \right] \\
&\leq \frac{d}{\nu} \left[\|f\|_{L^2(\Omega'')} + c(\theta) \|A\|_{1,\infty,\Omega''} \|u\|_{1,2,\Omega''} \right] ,
\end{aligned}$$

per una opportuna costante $c(\theta)$ dipendente soltanto da θ. □

Proposizione 5.3.10. *Siano $d \geq 1$ un intero, u in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, f in $L^\infty(\mathbb{R}^d_+)$, $A : \mathbb{R}^d \to S(d; d; \mathbb{R})$ di classe $C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ uniformemente ellittica nel supporto di u con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Supponiamo che u sia soluzione in senso classico del problema differenziale*

$$\begin{cases} div(A(x;y)[\nabla u(x;y)]^t) = f(x;y) & se\ (x;y) \in \mathbb{R}^d_+, \\ u(x;0) = 0 & se\ x \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{cases}$$

Esiste una costante $c(d;\nu)$ dipendente da d, ν tale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \leq c(d;\nu) \left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|A\|_{1,\infty,\mathbb{R}^d_+} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\right].$$

Dimostrazione. Sappiamo che u risolve l'equazione

$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso debole (vedi 5.3.3) in $\mathbb{R}^d_+$; allora, per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ vale che

$$-\int_{\mathbb{R}^d_+} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \ dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} f(x)\varphi(x)\ dx.$$

Per densità, l'uguaglianza si estende a tutte le funzioni test φ in $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$. Fissiamo un intero k in $\{1; \ldots; d-1\}$; essendo u di classe $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e nulla sull'iperpiano $\{x_d = 0\}$, deduciamo che $u_{x_k x_k}$ ha traccia nulla sull'iperpiano $\{x_d = 0\}$. Pertanto, $u_{x_k x_k}$ appartiene ad $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ (vedi 4.7.9). Dunque, vale che

$$-\int_{\mathbb{R}^d_+} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla u_{x_k x_k}(x) > \ dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} f(x) u_{x_k x_k}(x)\ dx.$$

Procedendo in maniera totalmente analoga alla proposizione 5.3.8, troviamo che

$$\|\nabla u_{x_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \leq \frac{1}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d_+)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\right].$$

Dunque, otteniamo una stima sulla norma L^2 di tutte le derivate seconde di u eccetto $u_{x_d x_d}$. Tuttavia, osserviamo che nell'intersezione tra il supporto di u e $\mathbb{R}^d_+$ vale la stima

$$u_{x_d x_d} = \frac{1}{A_{d;d}}\left[\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial A_{d;i}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{d-1} \frac{\partial (A\nabla u)_i}{\partial x_i}\right];$$

dunque, vale ovviamente che

$$\|u_{x_d x_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \leq c(d;\nu)\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|A\|_{1,\infty,\mathbb{R}^d_+} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\right]$$

per una opportuna costante $c(d;\nu)$. Questo è sufficiente a concludere. □

5.3.2 Metodo delle traslazioni di Nirenberg

Definizione 5.3.11 (Derivata discreta in $\mathbb{R}^d$)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero e h un vettore in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Per ogni $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiamo

$$D^h u(x) := \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

Proposizione 5.3.12 (Proprietà di D^h)**.**
Dati $d \geq 1$ un intero e h un vettore non nullo in $\mathbb{R}^d$, l'operatore D^h definito in 5.3.11 gode delle seguenti proprietà:

- *è lineare;*
- *date $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funzioni qualsiasi, vale che*
$$D^h(uv)(x) = u(x)D^h v(x) + v(x+h)D^h u(x);$$
- *se u è in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e φ è una funzione $L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ vale la formula di integrazione per parti:*
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)D^h u(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)D^{-h}\varphi(x)\ dx;$$
la stessa formula vale se u, φ sono in $L^2(\mathbb{R}^d)$;
- *se u è una funzione che ammette i-esima derivata debole in senso W (vedi 4.1.1), allora vale*
$$\frac{\partial D^h u}{\partial x_i} = D^h \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Dimostrazione. 1. L'operatore D^h è ovviamente lineare.

2. Date $u, v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funzioni qualsiasi, vale che
$$\begin{aligned} D^h(uv)(x) &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{|h|} \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{|h|} + \frac{v(x+h)u(x) - v(x)u(x)}{|h|} \\ &= v(x+h)D^h u(x) + u(x)D^h v(x). \end{aligned}$$

3. Siano u in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ e φ in $L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Vale che
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)D^h u(x)\ dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}\ dx \\ &= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(x+h)\ dx - \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(x)\ dx \\ &= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-h)u(y)\ dy - \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)u(y)\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{|h|}u(x)\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)D^{-h}\varphi(x)\ dx. \end{aligned}$$
Del resto, se u, φ sono in $L^2(\mathbb{R}^d)$ si può ragionare in maniera totalmente analoga.

4. Se u ammette derivata debole rispetto alla variabile x_i in senso W, allora vale che
$$\begin{aligned} \frac{\partial D^h u}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{|h|}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h) - \frac{1}{|h|}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \\ &= D^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.3.13. Siano $d \geq 1$ e per ogni i in $\{1; \dots; d\}$ indichiamo con e_i l'i-esimo vettore della base canonica. Dato $\varepsilon \neq 0$ possiamo definire l'operatore $D^{\varepsilon e_i}$ tale che per ogni funzione $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ vale che

$$D^{\varepsilon e_i} u(x) := \frac{u(x + \varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}.$$

La proposizione 5.3.12 rimane ovviamente valida con l'unica modifica che se u appartiene ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ e φ è una funzione in $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ allora la formula di integrazione per parti è

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\varepsilon e_i} u(x)\ dx = -\int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^{-\varepsilon e_i} \varphi(x)\ dx.$$

Teorema 5.3.14. *Siano $d \geq 1$ un intero, i in $\{1; \dots; d\}$ e u una funzione in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Allora la derivata W debole di u rispetto alla variabile x_i è ben definita e appartiene ad $L^2(\mathbb{R}^d)$ se e solo se esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $\varepsilon \neq 0$ vale che*

$$\|D^{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M.$$

In tal caso, per ogni $\varepsilon \neq 0$ vale anche che

$$\|D^{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M.$$

Dimostrazione. **Step 1**: Supponiamo che la derivata $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in senso W di u sia ben definita e appartenga ad $L^2(\mathbb{R}^d)$. Sia $\varepsilon > 0$ fissato; dobbiamo mostrare che

$$\|D^{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Possiamo anche supporre che u sia di classe $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Infatti, se dimostriamo la disuguaglianza in questo caso, si estende per densità a tutte le funzioni u che ammettono derivata debole i-esima in senso W. Poniamo $h := \varepsilon e_i$; per ogni x in $\mathbb{R}^d$, poniamo

$$\psi(t) := u(x + th).$$

Segue che

$$\begin{aligned}
|u(x+h) - u(x)| &= |\psi(1) - \psi(0)| \\
&= \left| \int_0^1 \psi'(t)\ dt \right| \\
&= \left| \int_0^1 < \nabla u(x+th), h > \ dt \right| \\
&= |\varepsilon| \left| \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th)\ dt \right| \\
&\leq |\varepsilon| \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th) \right|\ dt \\
&\leq |\varepsilon| \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th) \right|^2\ dt \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Elevando al quadrato e integrando in $\mathbb{R}^d$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |u(x+h) - u(x)|^2 \ dx &\leq |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th) \ dt \right| \right) \ dx \\ &= |\varepsilon|^2 \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th) \ dx \right| \right) \ dt \\ &= |\varepsilon|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \right|^2 \ dy.\end{aligned}$$

Per concludere è sufficiente dividere per $|\varepsilon|^2$.

Step 2: Supponiamo che la successione $\{D^{\frac{e_i}{n}} u\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia limitata in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Come mostrato in 2.4.16, esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione v tali che $\{D^{\frac{e_i}{n}} u\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v debolmente in L^2. Sia data φ una funzione test in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Come mostrato in 5.3.13, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\frac{e_i}{n}} u(x) \ dx = - \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^{-\frac{e_i}{n}} \varphi(x) \ dx.$$

Osserviamo che dalla convergenza debole in L^2 segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D^{\frac{e_i}{n}} u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\varphi(x) \ dx.$$

Essendo φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, la successione $\{D^{-\frac{e_i}{n}} \varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}^d$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$; essendo tutti gli integrali su un insieme limitato, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) D^{-\frac{e_i}{n}} \varphi(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \ dx.$$

Questo è sufficiente a concludere che v è l'i-esima derivata di u in senso W. Infine, essendo la norma L^2 debolmente semicontinua inferiormente (vedi 1.1.21), otteniamo che

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \left\| D^{\frac{e_i}{n}} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M.$$

Per quanto mostrato nel primo step, abbiamo che

$$\limsup_{n\to+\infty} \left\| D^{\frac{e_i}{n}} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \left\| D^{\frac{e_i}{n}} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)};$$

per quanto mostrato in 1.1.21, deduciamo anche che $\{D^{\frac{e_i}{n}} u\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ rispetto alla norma di L^2. □

5.3.3 Regolarità via traslazioni di Nirenberg

Vogliamo riottenere i risultati sulla regolarità utilizzando il metodo delle traslazioni di Nirenberg.

Teorema 5.3.15 (Regolarità L^2 su $\mathbb{R}^d$).
Siano $d \geq 1$ un intero, f una funzione in $L^2(\mathbb{R}^d)$, u una funzione in $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $A : \mathbb{R}^d \to S(d; d; \mathbb{R})$ una funzione in $L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ con jacobiano limitato e uniformemente

ellittica in $\mathbb{R}^d$ con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Supponiamo che u sia soluzione debole (vedi 5.3.3) in $\mathbb{R}^d$ dell'equazione

$$div(A[\nabla u]^t) = f.$$

Allora u appartiene a $H^2(\mathbb{R}^d)$ e vale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right].$$

Dimostrazione. Per definizione di soluzione debole (vedi 5.3.3), per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \ dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\ dx.$$

Per densità, l'uguaglianza si estende ad ogni funzione φ in $H_0^1(\mathbb{R}^d)$, che coincide con $H^1(\mathbb{R}^d)$ (vedi 4.7.4). Fissiamo k in $\{1;\dots;d\}$ e sia $\varepsilon \neq 0$; poniamo $h \coloneqq \varepsilon e_i$. Per la proposizione 5.3.12 deduciamo che $D^{-h}(D^h u)$ è una funzione in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Per quanto detto, vale che

$$-\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla[D^{-h}(D^h u)](x)) > \ dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)[D^{-h}(D^h u)](x)\ dx.$$

Osserviamo che per il teorema 5.3.14 vale che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)[D^{-h}(D^h u)](x)\ dx &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\left\|D^{-h}(D^h u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\left\|\nabla(D^h u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Osserviamo che, per le ipotesi introdotte, $A(x)$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L \leq \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)}$. Per la formula di integrazione per parti tra funzioni in L^2 (vedi 5.3.12) abbiamo anche che

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla[D^{-h}(D^h u)](x)) > \ dx\\ &\quad= -\int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, D^{-h}(\nabla(D^h u(x))) > \ dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^d} < D^h(A(x)[\nabla u(x)]^t), \nabla(D^h u(x)) > \ dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^d} < A(x)D^h([\nabla u)(x)]^t, \nabla(D^h u(x)) > \ dx\\ &\qquad\quad+ \int_{\mathbb{R}^d} < D^h A(x)[\nabla u(x+h)]^t, \nabla(D^h u(x)) > \ dx\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^d} < A(x)[\nabla(D^h u(x))]^t, \nabla(D^h u(x)) > \ dx\\ &\qquad\quad+ \int_{\mathbb{R}^d} < D^h A(x)[\nabla u(x+h)]^t, \nabla(D^h u(x)) > \ dx\\ &\quad\geq \nu\left\|\nabla(D^h u)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\left\|\nabla(D^h u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Abbiamo trovato che

$$\begin{aligned}\nu \left\|\nabla(D^h u)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\|\nabla(D^h u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\|\nabla D^h u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\left\|D^h(\nabla u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\|\nabla D^h u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right].$$

Per il teorema 5.3.14, deduciamo che esistono tutte le derivate W deboli di ordine 2 di u che che coinvolgono una derivazione rispetto ad x_k; inoltre, vale che

$$\left\|\frac{\partial \nabla u}{\partial x_k}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right];$$

dal teorema 5.3.14 deduciamo che u appartiene a $H^2(\mathbb{R}^d)$ e vale

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{d}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right].$$

□

Corollario 5.3.16. *Siano $d \geq 1$, Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$, f in $L^2(\Omega)$, u in $H^1_{loc}(\Omega)$ (cioè u è in $L^2_{loc}(\Omega)$ e le derivate deboli in senso W di u sono ben definite e sono in $L^2_{loc}(\Omega)$) e $A : \Omega \to S(d; d; \mathbb{R})$ di classe $C^1(\Omega)$ uniformemente ellittica in Ω con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Supponiamo che u sia soluzione dell'equazione*

$$div(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso debole in Ω (vedi 5.3.3). Siano Ω' e Ω'' aperti in Ω tali che Ω' è relativamente compatto in Ω'' e Ω'' è relativamente compatto in Ω. Allora u appartiene a $H^2_{loc}(\Omega)$ ed esiste una costante $c(\nu; \Omega'; \Omega'')$, dipendente soltanto da ν, Ω' e Ω'' tale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega')} \leq c(\nu; \Omega'; \Omega'')\left[\|f\|_{L^2(\Omega'')} + \|A\|_{1,\infty,\Omega''} \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

Dimostrazione. Sia θ una funzione $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $\theta(x) = 1$ in Ω' e $\theta(x) = 0$ in Ω''. Se definiamo $v := u\theta$, vogliamo mostrare che v risolve l'equazione

$$\text{div}(A[\nabla v]^t) = f\theta + u\text{div}(A[\nabla\theta]^t) + 2 < \nabla u, A[\nabla\theta]^t >:= \hat{f}$$

in senso debole su tutto $\mathbb{R}^d$. Innanzitutto ricordiamo che v è una funzione in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ (vedi 4.4.11); inoltre, v e ∇v sono supportate in Ω'', che è limitato. Data una funzione test in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} < A[\nabla v]^t, \nabla\varphi > \ dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left[< A[\theta\nabla u]^t, \nabla\varphi > + < A[u\nabla]^t\theta, \nabla\varphi >\right] \ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} < A[\nabla u]^t, \nabla(\theta\varphi) > \ dx - \int_{\mathbb{R}^d} < A[\nabla u]^t, \varphi\nabla\theta > \ dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} < Au[\nabla\theta]^t, \nabla\varphi > \ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta\varphi) \ dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi < A[\nabla u]^t, \nabla\theta > \ dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(Au[\nabla\theta]^t)\varphi \ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\theta f) \ dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi < \nabla u, A[\nabla\theta]^t > \ dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^d} \left[u\mathrm{div}(A[\nabla\theta]^t) + < \nabla u, A[\nabla\theta]^t >\right] \varphi \ dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\hat{f} \ dx,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che tutti gli integrali sono in Ω'', $Au[\nabla\theta]^t$ appartiene a $W^{1,2}(\Omega'')$ (vedi 4.4.11) e A è una matrice simmetrica.

Possiamo applicare la proposizione 5.3.8 e otteniamo che v è una funzione in $H^2(\mathbb{R}^d)$ e vale la stima seguente:

$$\begin{aligned}
\left\|D^2 v\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{d}{\nu}\left[\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right] \\
&= \frac{d}{\nu}\left[\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega'')} + \|\nabla A\|_{C^0(\Omega'')} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')}\right] \\
&\leq \frac{d}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\Omega'')} + c(\theta)\|A\|_{1,\infty,\Omega''} \|u\|_{1,2,\Omega''}\right],
\end{aligned}$$

per una opportuna costante $c(\theta)$ dipendente soltanto da θ. Concludiamo osservando che v in particolare appartiene a $H^2(\Omega'')$, in Ω'' coincide con la funzione u e dunque vale la stima

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\Omega'')} \leq \frac{d}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\Omega'')} + c(\theta)\|A\|_{1,\infty,\Omega''} \|u\|_{1,2,\Omega''}\right].$$

Pertanto, otteniamo che u appartiene ad $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Lemma 5.3.17 (Regolarità L^2 su $\mathbb{R}^d_+$)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, f una funzione in $L^2(\mathbb{R}^d_+)$, u una funzione in $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ e $A : \mathbb{R}^d_+ \to S(d;d;\mathbb{R})$ una funzione in $L^\infty(\mathbb{R}^d_+) \cap C^1(\mathbb{R}^d_+)$ con jacobiano limitato e uniformemente ellittica in Ω con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Supponiamo che u sia soluzione debole (vedi 5.3.3) in $\mathbb{R}^d_+$ dell'equazione

$$div(A[\nabla u]^t) = f.$$

Allora u appartiene a $H^2(\mathbb{R}^d_+)$ e vale che

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;\nu)\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}^d)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right]$$

per una opportuna costante dipendente solo da d, ν.

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ vale che

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} < A(x)[\nabla u(x)]^t, \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_{\mathbb{R}_+^d} f(x)\varphi(x)\ dx;$$

l'uguaglianza si estende ovviamente a tutte le funzioni test φ in $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$. Siano i in $\{1;\dots;d-1\}$, $\varepsilon > 0$ ed e_i l'i-esimo vettore della base canonica; poniamo $h := \varepsilon e_i$. Si osserva facilmente che, essendo u in $H_0^1(\mathbb{R}^d)$, anche $D^{-h}(D^h u)$ è in $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$. Ragionando esattamente come nel teorema 5.3.15, si mostra esiste una costante dipendente soltanto da ν e da d tale che

$$\left\|D^h(\nabla u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \le \frac{1}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}_+^d)}\|u\|_{1,2,\mathbb{R}_+^d}\right].$$

Per il teorema 5.3.14, otteniamo che u ammette tutte le derivate W deboli seconde di ordine eccetto $u_{x_d x_d}$ e che vale la stima

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} \le \frac{1}{\nu}\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \|\nabla A\|_{C^0(\mathbb{R}_+^d)}\|u\|_{1,2,\mathbb{R}_+^d}\right]$$

per ogni $(i;j)$ in $\{1;\dots;d\}^2 \setminus \{(d;d)\}$.

Potendo integrare alcuni termini per parti, osserviamo che per ogni φ in $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^d} f\varphi\ dx &= -\int_{\mathbb{R}_+^d} < A[\nabla u]^t, \nabla\varphi > \ dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}_+^d}\left(A_{i;j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\ dx \\
&= \sum_{i=1}^d\left(\sum_{j=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}_+^d} D^{x_j}\left(A_{i;j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\ dx\right) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}_+^d} D^{x_d}\left(A_{i;d}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\ dx - \int_{\mathbb{R}_+^d} A_{d;d}\frac{\partial u}{\partial x_d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\ dx.
\end{aligned}$$

Riordinando i termini e passando e ricordando le stime effettuate, si trova che esiste una costante $c(d;\nu)$ dipendente solo da d,ν tale che per ogni φ in $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ vale che

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+^d} A_{d;d}\frac{\partial u}{\partial x_d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\ dx\right| \le c(d;\nu)\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \|A\|_{1,+\infty,\mathbb{R}_+^d}\|u\|_{1,2,\mathbb{R}_+^d}\right]\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}.$$

Osserviamo che vale

$$\int_{\mathbb{R}_+^d}\frac{\partial u}{\partial x_d}A_{d;d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\ dx = \int_{\mathbb{R}_+^d}\frac{\partial u}{\partial x_d}\frac{\partial(A_{d;d}\varphi)}{\partial x_d}\ dx - \int_{\mathbb{R}_+^d}\frac{\partial u}{\partial x_d}\frac{\partial A_{d;d}}{\partial x_d}\varphi\ dx.$$

Dunque, a meno di rinominare la costante $c(d;\nu)$, otteniamo che per ogni φ in $H_0^1(\mathbb{R}_+^d)$ vale che

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+^d}\frac{\partial u}{\partial x_d}\frac{\partial(A_{d;d}\varphi)}{\partial x_d}\ dx\right| \le c(d;\nu)\left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)} + \|A\|_{1,+\infty,\mathbb{R}_+^d}\|u\|_{1,2,\mathbb{R}_+^d}\right]\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+^d)}.$$

Se definiamo $\Gamma : H_0^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Gamma(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial (A_{d;d}\varphi)}{\partial x_d}\, dx,$$

le stime effettuate garantiscono che Γ è lipschitziano; essendo ovviamente lineare, si estende per densità ad un funzionale lineare continuo definito su L^2. Per il teorema di rappresentazione di Riesz (vedi 3.2.4), deduciamo che esiste v in $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ tale che per ogni φ in $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$ vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial (A_{d;d}\varphi)}{\partial x_d}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} v\varphi\, dx.$$

Essendo $A_{d;d}(x) \geq \nu > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}^d_+$, se φ è in $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$ allora $\frac{\varphi}{A_{d;d}}$ è in $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$. Pertanto, per ogni φ in $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$ vale che

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{\partial u}{\partial x_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_d}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{v}{A_{d;d}} \varphi\, dx.$$

In altri termini, $-\frac{v}{A_{d;d}}$ è la derivata W debole di u di ordine $x_d x_d$. Essendo l'isomorfismo di Riesz una isometria (vedi 3.2.4), vale ovviamente che

$$\left\| \frac{v}{A_{d;d}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \leq \frac{c(d;\nu)}{\nu} \left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|A\|_{1,\infty,\mathbb{R}^d_+} \|u\|_{1,2,\mathbb{R}^d_+} \right].$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Lemma 5.3.18. *Siano $d \geq 2$ un intero, Ω_1, Ω_2 due aperti limitati in $\mathbb{R}^d$, $\Phi : \overline{\Omega_1} \to \overline{\Omega_2}$ con le seguenti proprietà:*

- *è invertibile;*
- *Φ e Φ^{-1} sono rispettivamente in $C^1(\overline{\Omega_1})$ e $C^1(\overline{\Omega_2})$;*
- *tutte le derivate di Φ e Φ^{-1} sono limitate rispettivamente in $\overline{\Omega_1}$ e $\overline{\Omega_2}$.*

Sia $A : \Omega_1 \to S(d;d;\mathbb{R})$ di classe $C^1(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ con jacobiano limitato e uniformemente ellittica in Ω_1 con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Sia f in $L^2(\Omega_1)$ e sia u una funzione in $H^1(\Omega_1)$ soluzione dell'equazione

$$div(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso debole (vedi 5.3.3) in Ω_1. Se poniamo $v := u(\Phi^{-1})$, allora v appartiene a $H^1(\Omega_2)$ e risolve l'equazione

$$div(B[\nabla v]^t) = g$$

in senso debole in Ω_2, avendo posto

$$g := \left|\det(J\Phi^{-1})\right| f(\Phi^{-1}),$$

$$B := [J\Phi(\Phi^{-1})]A(\Phi^{-1})[J\Phi(\Phi^{-1})]^t \frac{1}{|\det(J\Phi(\Phi^{-1}))|}.$$

Inoltre, valgono le seguenti conclusioni:

- *la matrice B è uniformemente ellittica in Ω_2 ed esiste una costante $\mu(\Phi) > 0$ tale che B ha coefficiente di ellitticità $\nu\mu(\Phi)$;*
- *se Φ e Φ^{-1} sono di classe C^2 si ha che g e B sono di classe C^1;*
- *esiste una costante $c(\Phi)$ tale che*

$$\|g\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(\Phi)\,\|f\|_{L^2(\Omega_1)}\,,$$

$$\|B\|_{1,\infty,\Omega_2} \leq c(\Phi)\,\|A\|_{1,\infty,\Omega_1}\,.$$

Dimostrazione. Come mostrato in 4.3.11, la funzione v è in $H^1(\Omega_2)$ e vale la formula

$$\nabla v = [\nabla u(\Phi^{-1})]J\Phi^{-1}.$$

Osserviamo che $J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ sono invertibili in ogni punto e per ogni y in Ω_2 vale la formula

$$[J\Phi(\Phi^{-1}(y))][J\Phi^{-1}(y)] = Id.$$

Pertanto B è ben definita e se Φ e Φ^{-1} sono di classe C^2 ovviamente g e B sono di classe C^1. Verifichiamo che per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega_2)$ vale che

$$\int_{\Omega_2} < B[\nabla v]^t, \nabla\varphi > \ dy = -\int_{\Omega_2} g\varphi\ dy.$$

Ponendo $x := \Phi^{-1}(y)$ e $dx = |\det(J\Phi^{-1}(y))|\ dy$, otteniamo che

$$\int_{\Omega_2} g\varphi\ dy = \int_{\Omega_2} f(\Phi^{-1})\left|\det(J\Phi^{-1})\right|\varphi\ dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi\circ\Phi)\ dx.$$

Analogamente, otteniamo che

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2} < B[\nabla v]^t, \nabla\varphi > \ dy\\
&= \int_{\Omega_2} < \frac{[J\Phi(\Phi^{-1})]A(\Phi^{-1})[J\Phi(\Phi^{-1})]^t}{|\det(J\Phi(\Phi^{-1}))|}[J\Phi^{-1}]^t[\nabla u(\Phi^{-1})]^t, \nabla\varphi > \ dy\\
&= \int_{\Omega_2} [\nabla\varphi]\frac{[J\Phi(\Phi^{-1})]A(\Phi^{-1})[J\Phi(\Phi^{-1})]^t}{|\det(J\Phi(\Phi^{-1}))|}[J\Phi^{-1}]^t[\nabla u(\Phi^{-1})]^t\ dy\\
&= \int_{\Omega_2} [\nabla\varphi][J\Phi(\Phi^{-1})]A(\Phi^{-1})[J\Phi^{-1}J\Phi(\Phi^{-1})]^t[\nabla u(\Phi^{-1})]^t \det(J\Phi^{-1})\ dy\\
&= \int_{\Omega_1} [\nabla\varphi(\Phi)][J\Phi]A[\nabla u]^t\ dx\\
&= \int_{\Omega_1} [\nabla(\varphi\circ\Phi)]A[\nabla u]^t\ dx\\
&= \int_{\Omega_1} < A[\nabla u]^t, \nabla(\varphi\circ\Phi) > \ dx.
\end{aligned}$$

Osservando che, $\varphi \circ \Phi$ è una funzione di classe $C_c^1(\Omega_1)$ e che u soddisfa l'equazione $\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ in Ω_1, allora vale che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} < B[\nabla v]^t, \nabla\varphi > \ dy &= \int_{\Omega_1} < A[\nabla u]^t, \nabla(\varphi\circ\Phi) > \ dx \\ &= -\int_{\Omega_1} f(\varphi\circ\Phi)\ dx \\ &= -\int_{\Omega_2} g\varphi\ dy.\end{aligned}$$

Infine mostriamo che la matrice B è uniformemente ellittica in Ω_2. Infatti, dati ξ in $\mathbb{R}^d$ e y in Ω_2, vale che

$$\begin{aligned}[\xi]^t B(x)[\xi] &= \left|\det(J\Phi^{-1}(y))\right|^{-1} [(J\Phi(\Phi^{-1}(y)))\xi]^t A(\Phi^{-1}(y))[(J\Phi(\Phi^{-1}(y)))\xi] \\ &\geq c_1\nu\left|(J\Phi(\Phi^{-1}(y)))\xi\right|^2 \\ &\geq c_1c_2\nu\left|\xi\right|^2,\end{aligned}$$

dove c_1 è una costante positiva che limita dal basso in Ω_1 il determinante dello jacobiano di Φ e c_2 è una costante positiva che limita dal basso la funzione continua $\Theta : \Omega_2 \times \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| = 1\} \to [0, +\infty)$ tale che

$$\Theta(y;\xi) := \left|(J\Phi(\Phi^{-1}(y)))\xi\right|;$$

infatti Θ assume minimo strettamente positivo perchè $J\Phi(\Phi^{-1}(y))$ è una matrice invertibile per ogni y in Ω_2. Per concludere, essendo $\det(J\Phi^{-1})$ e $J\Phi(\Phi^{-1})$ funzioni limitate in Ω_2 vale ovviamente che

$$\|g\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(\Phi)\|f\|_{L^2(\Omega_1)},$$

$$\|B\|_{1,\infty,\Omega_2} \leq c(\Phi)\|A\|_{1,\infty,\Omega_1},$$

per una certa costante $c(\Phi)$ dipendente soltanto da Φ. □

Teorema 5.3.19 (Regolarità L^2 fino al bordo)**.**
Siano $d \geq 2$ un intero, Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ di classe C^2 (vedi 4.4.9), f in $L^2(\Omega)$, $A : \Omega \to S(d;d;\mathbb{R})$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$ uniformemente ellittica in Ω con coefficiente di ellitticità $\nu > 0$ (vedi 5.3.1). Sia u una funzione in $H_0^1(\Omega)$ che risolve l'equazione

$$div(A[\nabla u]^t) = f$$

in senso debole (vedi 5.3.3) in Ω. Allora u appartiene ad $H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $c(d;\nu;\Omega)$ dipendente soltanto da d, ν, Ω tale che

$$\left\|D^2u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(d;\nu;\Omega)\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}\right].$$

Dimostrazione. Denotiamo, come sempre, $Q := \mathcal{B}_{d-1}(0;1)\times(-1,1)$, $Q_+ := \mathcal{B}_{d-1}(0;1)\times(0,1)$ e $Q_0 := \mathcal{B}_{d-1}\times\{0\}$. Per le ipotesi su Ω (vedi 4.4.9), esistono degli aperti limitati $\{\mathcal{U}_1;\ldots;\mathcal{U}_n\}$ che ricoprono $\partial\Omega$ e delle mappe $\{\Phi_1;\ldots;\Phi_n\}$ tali che per ogni i in $\{1;\ldots;n\}$ vale che con le seguenti proprietà:

- $\Phi_i : \overline{\mathcal{U}_i} \to \overline{Q}$ è invertibile;

- Φ_i e Φ_i^{-1} sono rispettivamente di classe $C^2(\overline{\mathcal{U}_i})$ e $C^2(\overline{Q})$;
- $\Phi_i(\mathcal{U}_i \cap \Omega) = Q_+$ e $\Phi_i(\mathcal{U}_i \cap \partial\Omega) = Q_0$.

Se poniamo $\mathcal{U}_0 := \Omega$, possiamo introdurre una partizione dell'unità $\{\psi_0; \psi_1; \ldots; \psi_n\}$ come nel lemma 4.4.10. Ricordiamo che per ogni x in $\overline{\Omega}$ vale che

$$\sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) = 1;$$

inoltre, essendo Ω limitato, per ogni i in $\{0; \ldots; n\}$ vale che ψ_i è in $C_c^\infty(\mathcal{U}_i)$. Procedendo come nella dimostrazione del corollario 5.3.16, si mostra che per ogni i in $\{0; \ldots; n\}$ la funzione $v_i := u_{|\mathcal{U}_i \cap \Omega}\psi_i$ è in $H^1(\mathcal{U}_i \cap \Omega)$ e risolve l'equazione lineare

$$\operatorname{div}(A[\nabla v_i]^t) = f\psi_i + u\operatorname{div}(A[\nabla \psi_i]^t) + 2 < \nabla u, A[\nabla \psi_i]^t >:= \hat{f}_i$$

in senso debole in $\mathcal{U}_i \cap \Omega$. Ovviamente esiste una costante $p_i(\Omega) > 0$ tale che

$$\left\|\hat{f}_i\right\|_{L^2(\mathcal{U}_i \cap \Omega)} \leq p_i \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Osserviamo anche che esiste un aperto Ω_0 relativamente compatto in Ω che contiene il supporto di $\hat{f}_0$. Per il corollario 5.3.16, deduciamo che v_0 è in $H^2(\Omega_0)$ ed esiste una costante $c_0(d; \nu; \Omega)$ tale che

$$\begin{aligned}\left\|D^2 v_0\right\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq c_0(d; \nu; \Omega)\left[\left\|\hat{f}_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}\right] \\ &\leq p_0(\Omega)c_0(d; \nu; \Omega)\left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega}\|u\|_{1,2,\Omega}\right].\end{aligned}$$

Sia i in $\{1; \ldots; n\}$; per il teorema 4.3.11, $v_i \circ \Phi_i^{-1}$ appartiene a $H^1(Q_+)$ ed esiste una costante l_i tale che

$$\left\|v_i \circ \Phi_i^{-1}\right\|_{1,2,Q_+} \leq l_i \|v_i\|_{1,2,\mathcal{U}_i \cap Q}.$$

A meno di rinominare la costante, si può anche supporre che

$$\left\|v_i \circ \Phi_i^{-1}\right\|_{1,2,Q_+} \leq l_i \|u\|_{1,2,\mathcal{U}_i \cap \Omega} \leq l_i \|u\|_{1,2,\Omega}.$$

Per il lemma 5.3.18, esistono $B_i : Q_+ \to S(d; d; \mathbb{R})$ di classe $C^1(Q_+) \cap L^\infty(Q_+)$ con jacobiano limitato e $g_i : Q_+ \to \mathbb{R}$ in $L^2(Q_+)$ tali che $v_i \circ \Phi_i^{-1}$ soddisfa l'equazione

$$\operatorname{div}(B[\nabla(v_i \circ \Phi_i^{-1}]^t) = g_i$$

in senso debole in Q_+; inoltre, esiste una costante positiva $c(\Phi_i)$ tale che

$$\|g_i\|_{L^2(Q_+)} \leq c(\Phi_i)\left\|\hat{f}_i\right\|_{L^2(\mathcal{U}_i \cap \Omega)} \leq p_i(\Omega)c(\Phi_i)\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\|B_i\|_{1,\infty,Q_+} \leq c(\Phi_i)\|A\|_{1,\infty,\Omega \cap \mathcal{U}_i} \leq c(\Phi_i)\|A\|_{1,\infty,\Omega};$$

inoltre esiste $\mu(\Phi_i) > 0$ tale che la matrice B_i è uniformemente ellittica in Q_+ con coefficiente di ellitticità $\nu\mu(\Phi_i)$. Per il lemma 5.3.17, vale che $v_i \circ \Phi_i$ appartiene ad $H^2(Q_+)$ ed esiste una costante $c(\nu; \Phi_i; d)$ tale che

$$\left\|D^2(v_i \circ \Phi_i^{-1})\right\|_{L^2(Q_+)} \leq c(\nu; \Phi_i; d)\left[\|g\|_{L^2(Q_+)} + \|B_i\|_{1,\infty,Q_+}\left\|v_i \circ \Phi_i^{-1}\right\|_{1,2,Q_+}\right].$$

A meno di rinominare le costanti, troviamo che

$$\left\| D^2(v_i \circ \Phi_i^{-1}) \right\|_{L^2(Q_+)} \leq c(\nu; \Phi_i; d) \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega} \|u\|_{1,2,\Omega} \right].$$

Per il teorema 4.3.11, deduciamo che v_i appartiene ad $H^2(\Omega_i)$ ed esiste una costante $c(\Phi_i)$ tale che

$$\left\| D^2 v_i \right\|_{L^2(\mathcal{U}_i \cap \Omega)} \leq c(\Phi_i) \left\| v_i \circ \Phi_i^{-1} \right\|_{2,2,Q_+}.$$

A meno di rinominare le costanti, deduciamo che

$$\left\| D^2 v_i \right\|_{L^2(\mathcal{U}_i \cap \Omega)} \leq c(\nu; \Phi_i; d) \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega} \|u\|_{1,2,\Omega} \right].$$

Per il lemma 4.4.11, per ogni i in $\{1; \ldots; n\}$ l'estensione di v_i a 0 su tutto Ω è ancora una funzione in $H^2(\Omega)$ e vale che

$$\|v_i\|_{2,2,\Omega} = \|v_i\|_{2,2,\Omega \cap \mathcal{U}_i}.$$

Ricordiamo che

$$u = \sum_{i=0}^{n} v_i;$$

pertanto u è in $H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $c(d; \nu; \Omega)$ tale che

$$\left\| D^2 u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(d; \nu; \Omega) \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|A\|_{1,\infty,\Omega} \|u\|_{1,2,\Omega} \right].$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 5.3.20. Nelle ipotesi del teorema 5.3.15, del corollario 5.3.16 oppure del teorema 5.3.19, otteniamo che u ammette derivate deboli del second'ordine almeno in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Data φ in $C_c^\infty(\Omega)$, vale che

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = -\int_\Omega < A\nabla u, \nabla\varphi > \, dx = \int_\Omega \varphi \mathrm{div}(A\nabla u) \, dx.$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (vedi 4.1.6), possiamo concludere che per quasi ogni x in Ω vale che

$$\mathrm{div}(A\nabla u(x)) = f(x).$$

Osservazione 5.3.21. Il teorema 5.3.15 ammette la seguente generalizzazione almeno nel caso in cui $A \equiv Id$. Siano $m \geq 1$ un intero, u in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ ed f in $H^m(\mathbb{R}^d)$ tali che u risolve l'equazione

$$\Delta u = f$$

in senso debole su $\mathbb{R}^d$. Allora u è in $H^{m+2}(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una costante $c(d; m)$ tale che

$$\left\| D^{m+2} u \right\|_{m+2,2,\mathbb{R}^d} \leq c(d; m) \|f\|_{m,2,\mathbb{R}^d}.$$

In particolare, se f è $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e tutte le derivate sono in $L^2(\mathbb{R}^d)$, per il teorema di immersione di Sobolev (vedi 4.5.9), u è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Il corollario 5.3.16 ammette la seguente generalizzazione, almeno nel caso in cui $A \equiv Id$. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 0$ un intero, f una funzione in $H^m_{\text{loc}}(\Omega)$ e u una funzione in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che risolve l'equazione

$$\Delta u = f$$

in senso debole su Ω. Allora u appartiene ad $H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega)$. In particolare, se f è di classe $C^\infty(\Omega)$, dal teorema di immersione di Sobolev (vedi 4.5.9) si deduce che u è di classe $C^\infty(\Omega)$.

Il teorema 5.3.19 ammette la seguente generalizzazione, almeno nel caso in cui $A \equiv Id$. Siano $m \geq 1$ un intero, Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ di classe C^{m+2} (vedi 4.4.9), f una funzione in $H^m(\Omega)$ e u una funzione in $H^1_0(\Omega)$ che risolve l'equazione

$$\Delta u = f$$

in senso debole su Ω. Allora u appartiene a $H^{m+2}(\Omega)$. In particolare, se Ω è un aperto limitato di classe C^∞ (cioè è di classe C^m per ogni $m \geq 1$, come in 4.4.9) e f è in $C^\infty(\Omega)$ con tutte le derivate in $L^2(\Omega)$, deduciamo che u è in $C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 5.3.22. La teoria della regolarità sviluppata per equazioni ellittiche lineari si estende anche al caso semi-lineare nel modo seguente.

- Siano A una matrice uniformemente ellittica in $\mathbb{R}^d$, di classe $C^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ con jacobiano limitato, $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana e u una funzione in $H^1(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che $g(\cdot; u; \nabla u)$ sia in $L^2(\mathbb{R}^d)$ e che u risolva l'equazione semi-lineare
$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u; \nabla u)$$
in senso debole su $\mathbb{R}^d$ (vedi 5.3.4). Allora u è in $H^2(\mathbb{R}^d)$.

  Infatti, basta porre $f \coloneqq g(\cdot; u; \nabla u)$, osservare che f appartiene ad $L^2(\mathbb{R}^d)$ e applicare il teorema 5.3.15.

- Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, A una matrice uniformemente ellittica in Ω di classe $C^1(\Omega)$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana e u una funzione in $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Supponiamo che $g(\cdot; u; \nabla u)$ sia in $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e che u risolva l'equazione semi-lineare
$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u; \nabla u)$$
in senso debole su Ω (vedi 5.3.4). Allora u è in $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

  Infatti, basta porre $f \coloneqq g(\cdot; u; \nabla u)$, osservare che f appartiene ad $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e applicare il corollario 5.3.16.

- Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^d$ di classe C^2, A una matrice uniformemente ellittica in Ω, di classe $C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con jacobiano limitato, $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana e u una funzione in $H^1_0(\Omega)$. Supponiamo che $g(\cdot; u; \nabla u)$ sia in $L^2(\mathbb{R}^d)$ e che u risolva l'equazione semi-lineare
$$\operatorname{div}(A[\nabla u]^t) = g(\cdot; u; \nabla u)$$
in senso debole su Ω (vedi 5.3.4). Allora u è in $H^2(\Omega)$. Infatti, basta porre $f \coloneqq g(\cdot; u; \nabla u)$, osservare che f appartiene ad $L^2(\Omega)$ e applicare il teorema 5.3.19.

5.4 Appendice: l'inverter del laplaciano con Dirichlet boundary conditions

Siano $d \geq 2$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ f in $L^2(\Omega)$. Supponiamo che Ω sia limitato e di classe C^2. Definiamo il funzionale

$$G_f(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f(x)u(x)\right] dx.$$

Innanzitutto osserviamo che G_f è ben definito in $H_0^1(\Omega)$. Inoltre, per la disuguaglianza di Poincarè (vedi 4.7.11 se $d \geq 2$), esiste una costante $c(d;\Omega)$ dipendente soltanto da d e da Ω tale che

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c(d;\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

per ogni u in $H_0^1(\Omega)$. Deduciamo che per ogni u in $H_0^1(\Omega)$ vale la disuguaglianza

$$G_f(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - c(d;\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Vogliamo mostrare che G_f ammette minimo in $H_0^1(\Omega)$ tramite il metodo diretto. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $H_0^1(\Omega)$ tale che $|G_f(u_n)| \leq M$ per ogni n in $\mathbb{N}$; deduciamo che esiste una costante M' tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq M'$. Per la debole compattezza delle palle chiuse in L^2 (vedi 2.4.16), esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $v_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tale che $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v_∞ debolmente in L^2. In particolare, la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Essendo Ω limitato, per il teorema di immersione compatta (vedi 4.5.14), esistono una ulteriore sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione u_∞ tale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ in L^2. Come mostrato in 3.2.9, si verifica che u_∞ è in $W^{1,2}(\Omega)$ e $\nabla u_\infty = v_\infty$. Per la dipendenza continua delle tracce (se $d = 1$ segue dalla convergenza uniforme, se $d \geq 2$ vedi 4.6.11), si ha che u_∞ ha traccia nulla su $\partial\Omega$; pertanto u_∞ appartiene ad $H_0^1(\Omega)$ (vedi 4.7.9). Per le ipotesi di convergenza e la debole semicontinuità inferiore della norma (vedi 1.1.21), è immediato verificare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_n(x)|^2 + f(x)u_n(x)\right] dx \geq \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u_\infty(x)|^2 + f(x)u_\infty(x)\right] dx.$$

Pertanto, il teorema di Weierstrass (vedi 5.2.6) garantisce l'esistenza del minimo per il funzionale G_f in $H_0^1(\Omega)$; denotiamo con u_f un punto di minimo. Data φ una funzione test in $C_c^\infty(\Omega)$, possiamo calcolare la variazione prima di G_f in u_f lungo la direzione φ; essendo u_f minimo globale vale che

$$0 = \frac{d}{dt}F(u_f + t\varphi)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega [< \nabla u(x), \nabla\varphi(x) > + f(x)\varphi(x)]\, dx.$$

Dunque u_f risolve l'equazione lineare

$$\Delta u = f$$

in senso debole (vedi 5.3.3) su Ω. Per il teorema 5.3.19, u_f appartiene a $H^2(\Omega)$ ed esiste una costante $c(\Omega)$ dipendente soltanto da Ω tale che

$$\left\|D^2 u_f\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{1,2,\Omega}\right\}.$$

Supponiamo che v sia un'altra soluzione dell'equazione

$$\Delta u = f$$

in senso debole sull'aperto Ω. Per differenza, si deduce che per ogni φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega < \nabla u_f - \nabla v, \nabla\varphi > \; dx = 0;$$

per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 4.1.7) possiamo concludere che $\nabla(u_f - v)$ coincide quasi ovunque con un vettore costante; allora $u_f - v$ è una funzione affine e dovendo appartenere a $H_0^1(\Omega)$, per caratterizzazione della traccia (vedi 4.6.10), vale che $u_f - v = 0$ quasi ovunque in Ω. Questo è sufficiente a dedurre che, G_f ammette un unico punto di minimo in $H_0^1(\Omega)$.

Per quanto mostrato, possiamo ben definire l'operatore $\Psi : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ che associa ad f in $L^2(\Omega)$ la funzione u_f in $H_0^1(\Omega)$ che minimizza il funzionale G_f in tale spazio. Avendo caratterizzato u_f come l'unica funzione in $H_0^1(\Omega)$ che risolve l'equazione lineare

$$\Delta u = f$$

in senso debole in Ω, l'operatore Ψ è ovviamente lineare.

Vogliamo mostrare che Ψ è un operatore compatto (vedi 1.2.1). Sia data $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in norma L^2 da una costante M. Per ogni n in $\mathbb{N}$ denotiamo con $u_n := u_{f_n}$. Dobbiamo mostrare che a meno di sottosuccessioni (non rinominate) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette ammette limite in $H_0^1(\Omega)$. Osserviamo che per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le stime seguenti:

$$0 = G_{f_n}(0) \geq G_{f_n}(u_n) \geq \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - c(\Omega)\,\|f_n\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

da cui segue che

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)\,\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega)M.$$

Per la disuguaglianza di Poincarè e il teorema di immersione compatta (vedi 4.5.14), a meno di sottosuccessioni (non rinominate), $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una funzione u_∞ in $L^2(\Omega)$. Utilizzando la disuguaglianza di Poincarè e il teorema 5.3.19, deduciamo che esiste una costante M' tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\left\|D^2 u_n\right\| \leq M'.$$

Per il teorema di immersione compatta (vedi 4.5.14), a meno di ulteriori sottosuccessioni (non rinominate), $\{\nabla u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad una funzione $v_\infty : \Omega \to \mathbb{R}^d$ in L^2. Per quanto mostrato in 3.2.9, si ha che u_∞ appartiene a $H^1(\Omega)$ e $\nabla u_\infty = v_\infty$. Per la dipendenza continua delle tracce (vedi 4.6.11), si ha che u_∞ ha traccia nulla su $\partial\Omega$; dunque u_∞ appartiene a $H_0^1(\Omega)$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u_∞ in $W^{1,2}$. Questo è sufficiente a mostrare che Ψ è un operatore compatto.

Denotiamo ancora con $\Psi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore introdotto; ovviamente rimane un operatore compatto. Vogliamo mostrare che Ψ è simmetrico come operatore su $L^2(\Omega)$. Siano dati f, g in $L^2(\Omega)$; dobbiamo provare che

$$\int_\Omega f(x)u_g(x)\; dx = \int_\Omega u_f(x)g(x)\; dx.$$

Per caratterizzazione di u_f e u_g, per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega < \nabla u_f(x), \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x)\ dx,$$

$$\int_\Omega < \nabla u_g(x), \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\ dx;$$

le uguaglianze si estendono banalmente ad ogni funzione test in $H_0^1(\Omega)$. Ricordando che u_f e u_g sono in $H_0^1(\Omega)$, deduciamo che

$$\int_\Omega f(x)u_g(x)\ dx = -\int_\Omega < \nabla u_f(x), \nabla u_g(x) > \ dx = \int_\Omega g(x)u_f(x)\ dx.$$

Possiamo applicare il teorema spettrale (vedi 3.4.10) e otteniamo che esiste una base di Hilbert di $L^2(\Omega)$ che denotiamo con $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formata da autovettori per l'operatore Ψ. In particolare, per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un numero reale λ_n tale che $u_{e_n} = \lambda_n e_n$. Deduciamo che e_n è in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e che per ogni φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\lambda_n \int_\Omega < \nabla e_n(x), \nabla\varphi(x) > \ dx = -\int_\Omega e_n(x)\varphi(x)\ dx;$$

osservando che $\lambda_n \neq 0$ (altrimenti $e_n = 0$, come segue da 4.1.6), vale che

$$\lambda_n \int_\Omega < \nabla e_n(x), \nabla e_n(x) > \ dx = -\int_\Omega e_n(x)^2\ dx;$$

essendo e_n unitario, si deduce che

$$\frac{1}{\lambda_n} = -\left\|\nabla e_n\right\|^2_{L^2(\Omega)};$$

otteniamo che e_n risolve in senso debole in Ω l'equazione lineare

$$\Delta e_n = -\left\|\nabla e_n\right\|^2_{L^2(\Omega)} e_n;$$

per quanto osservato in 5.3.20, l'uguaglianza vale per quasi ogni x in Ω. Si dice che $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base di autovettori per l'inverso del laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet in L^2.

Tutte le affermazioni dimostrate sono valide anche se Ω è un intervallo limitato in $\mathbb{R}$ (la dimostrazione data risulta notevolmente semplificata). Supponiamo $\Omega = (0,\pi)$; in tal caso, è facile mostrare che se e_n è un autovettore per il laplaciano, allora risolve l'equazione

$$e_n'' = -\left\|\dot{e}_n\right\|^2_{L^2((0,\pi))} e_n$$

in senso classico in $(0,\pi)$ e vale $e_n(0) = e_n(\pi) = 0$; in particolare, è di classe $C^\infty(\Omega)$. Si mostra facilmente che le uniche soluzioni di tale problema sono le funzioni

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx);$$

per quanto provato, questa è una base di Hilbert di $L^2((0,\pi))$ (è una delle basi di Fourier).

Vogliamo dare un'ulteriore caratterizzazione dello spazio $H_0^1(\Omega)$. Data u in $L^2(\Omega)$, denotiamo con $u_n :=< u, e_n >$. Mostriamo che

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n^2} u_n^2 < +\infty \right\}.$$

Innanzitutto osserviamo che $\{\nabla e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortogonale di vettori in $L^2(\Omega)$. Infatti, essendo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenuto in $H_0^1(\Omega)$, per ogni n, m vale che

$$\int_\Omega < \nabla e_n, \nabla e_m > \; dx = -\int_\Omega e_n e_m \; dx$$

che vale 1 se $n \neq m$, 0 se $n = m$. Dunque, se $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$ è una funzione in $L^2(\Omega)$, vale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega < v, \nabla e_n > \; dx \right)^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 ,$$

come mostrato in 3.2.3 e 3.3.5.

Data u in $H_0^1(\Omega)$, per ogni n in $\mathbb{N}$ valgono le seguenti uguaglianze

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla e_n > \; dx = -\int_\Omega u \Delta e_n \; dx = -\frac{1}{\lambda_n} \int_\Omega u e_n \; dx = -\frac{u_n}{\lambda};$$

segue che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n^2}{\lambda_n^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega < \nabla u, \nabla e_n > \; dx \right)^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

Viceversa, supponiamo che u sia una funzione in $L^2(\Omega)$ tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n^2}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

Per ogni n in $\mathbb{N}$ poniamo

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} u_i e_i.$$

Osserviamo che la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^2(\Omega)$. Inoltre, per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\nabla S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \nabla e_i.$$

Osserviamo che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 \|\nabla e_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n^2}{\lambda_n^2} < +\infty.$$

Per il lemma 3.3.3, la successione $\{\nabla S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un limite v in $L^2(\Omega)$. Per quanto mostrato in 4.1.8, si ha che u è in $H^1(\Omega)$ e $\nabla u = v$. Inoltre u ha traccia nulla su $\partial\Omega$ perchè la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $H_0^1(\Omega)$ e converge ad u in norma $\|\cdot\|_{1,2,\Omega}$ (vedi 4.6.11).

Questa caratterizzazione fornisce lo spunto per introdurre la seguente definizione. Sia s in $(0,1]$. Nelle notazioni introdotte, definiamo lo spazio

$$H^s(\Omega) \coloneqq \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n^2}{|\lambda_n|^{2s}} < +\infty. \right\}.$$

Per quanto mostrato, nel caso in cui $s = 1$, si ottiene lo spazio di Sobolev classico $W_0^{1,2}(\Omega)$. In tutti gli altri casi, si dice che $H^s(\Omega)$ è uno spazio di Sobolev frazionario.