IN SUPREMÆ DIGNITATIS
1343

Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Appunti del corso di

Calcolo delle Variazioni

Frutto della libera rielaborazione delle lezione tenute
dal professor Giovanni Alberti durante l'Anno Accademico 2018/2019

Marco Inversi

Data ultima modifica: 1/03/2020

Indice

Notazione

Definizione 0.0.1 (Aperto regolare)**.**
Diremo che un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è di classe C^k se $\partial\Omega \neq \emptyset$ ed è localmente il grafico di una funzione di classe C^k (in altri termini, richiediamo che $\partial\Omega$ sia una varietà di classe C^k di dimensione $n-1$).

Dato Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, utilizzeremo la seguente notazione:

- $C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ indica l'insieme delle funzioni di classe C^k su Ω a valori in $\mathbb{R}^m$;
- $C^k_c(\Omega;\mathbb{R}^m)$ indica l'insieme delle funzioni di classe C^k su Ω a valori in $\mathbb{R}^m$ aventi supporto compatto in Ω;
- $C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ indica l'insieme delle funzioni di classe C^k su Ω a valori in $\mathbb{R}^m$ uniformemente continue con tutte le derivate uniformemente continue, cioè che ammettono un'estensione continua a $\overline{\Omega}$;
- data u_0 in $C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$, $C^k_{u_0}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ indica l'insieme delle funzioni $f \in C^{k-1}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m) \cap C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ tali che
$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u_0}{\partial x^\alpha}(x)$$
per ogni $x \in \partial\Omega$ per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tale che $|\alpha| \leq k-1$;
- $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ indica lo spazio delle funzioni in L^p rispetto alla misura di Lebesgue su Ω a valori in $\mathbb{R}^m$;
- $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ indica lo spazio di Sobolev delle funzioni da Ω in $\mathbb{R}^m$ con sommabilità p (sulle funzioni e sulle derivate);
- data $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $W^{1,p}_{u_0}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ è il sottospazio di $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ delle funzioni aventi traccia u_0 sul bordo di Ω.

Se omettiamo l'indicazione dello spazio di arrivo, si sottintende che sia $\mathbb{R}$.

Capitolo 1

Metodo indiretto

1.1 Introduzione

Siano $\mathbb{X}$ un insieme e $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione; supponiamo che F ammetta minimo in x_0. Vogliamo determinare condizioni necessarie su x_0. Ovviamente, in questa generalità non si può dire nulla.

Esempio 1.1.1. Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ e x_0 è un punto di minimo, allora x_0 è un punto stazionario, cioè risolve l'equazione

$$\nabla F(x_0) = 0.$$

In generale non vale l'implicazione inversa, cioè non è detto che tutti i punti stazionari siano punti di minimo. Tuttavia, ciò è vero se F è anche convessa. In tal caso vale che

$$x_0 \in \arg\min F \iff \nabla F(x_0) = 0.$$

In dimensione infinita valgono risultati analoghi, a patto di introdurre un contesto ragionevole in cui ambientare il problema.

Nel seguito assumeremo che $\mathbb{X}$ sia uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento $\mathbb{V}$ e che $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ sia una funzione.

Definizione 1.1.2 (Derivata direzionale).
Siano $u \in \mathbb{X}$ e $v \in \mathbb{V}$. Si dice che F ammette derivata in u nella direzione v se esiste ed è finito il rapporto incrementale

$$\frac{d}{dt} F(u + tv)\bigg|_{t=0}.$$

Osservazione 1.1.3. Nel constesto della definizione 1.1.2, notiamo che se $u \in \mathbb{X}$ e $v \in \mathbb{V}$ vale che $u + tv \in \mathbb{X}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, essendo $\mathbb{X}$ uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento $\mathbb{V}$.

Definizione 1.1.4 (Derivabilità secondo Gateaux).
Sia $u \in \mathbb{X}$. Supponiamo che per ogni $v \in \mathbb{V}$ sia definita la derivata di F in u nella direzione v (vedi 1.1.2). Si dice che F è derivabile secondo Gateaux in u; la mappa

$$v \in \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \ni \frac{\partial F}{\partial v}(u) := \frac{d}{dt} F(u + tv)\bigg|_{t=0}$$

è detta variazione prima di F in u.

Definizione 1.1.5 (Punto stazionario)**.**
Sia $u \in \mathbb{X}$; supponiamo che F sia derivabile secondo Gateaux in u (vedi 1.1.4). Si dice che u è un punto stazionario per F se vale che

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u) = 0 \ \forall v \in \mathbb{V}. \tag{1.1}$$

La condizione 1.1 è detta equazione di Eulero-Lagrange.

Teorema 1.1.6 (Condizioni di ottimalità)**.**
Sia $u \in \mathbb{X}$ un punto in cui F è differenziabile secondo Gateaux.

- *Se u è minimo direzionale per F, allora u è un punto stazionario per F (vedi 1.1.5).*
- *Se F è convessa e u è un punto stazionario, allora u è punto di minimo globale per F in $\mathbb{X}$. Se F è strettamente convessa, u è l'unico punto di minimo globale di F in $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Mostriamo il primo enunciato. Sia $v \in \mathbb{V}$; consideriamo la funzione

$$\varphi(t) := F(u + tv).$$

Per ipotesi, φ ha minimo locale in $t = 0$ ed è derivabile in $t = 0$. Allora vale che

$$0 = \frac{d}{dt}\varphi(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}F(u + tv)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial v}(u).$$

Mostriamo il secondo enunciato. Sia $w \in \mathbb{X}$; poniamo $v = w - u \in \mathbb{V}$. La funzione

$$\varphi(t) = F(u + tv)$$

è convessa ed è derivabile in $t = 0$. Allora vale che

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0) = \varphi(0) + \frac{\partial F}{\partial v}(u) = \varphi(0). \tag{1.2}$$

Infine notiamo che $\varphi(1) = F(w)$ e $\varphi(0) = F(u)$. Per concludere, precisiamo che se F è strettamente convessa, φ è strettamente convessa, pertanto la disuguaglianza (1.2) è stretta se $v \neq 0$, ovvero $u \neq w$. □

1.2 Equazione di Eulero-Lagrange

Abbiamo introdotto l'equazione di Eulero-Lagrange di un funzionale F definito su uno spazio affine $\mathbb{X}$ (vedi (1.1)). Tuttavia, la forma presentata è ancora troppo generale e vogliamo limitare la nostra indagine a funzionali integrali per dare formule più esplicite possibile.

In questa sezione lavoreremo sotto le seguenti assunzioni, che permettono di giustificare i calcoli che presenteremo:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1 (vedi 0.0.1) se $d \geq 2$; $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto (vogliamo applicare la regola di integrazione per parti oppure il suo analogo multi-dimensionale, ovvero il teorema della divergenza);

- si possa sempre derivare sotto il segno di integrale (ipotesi necessarie e abbastanza generali sulle funzioni integrande sono date nel teorema 6.1.3).

In ogni caso, queste assunzioni sono abbastanza generali e coprono la quasi totalità dei casi rilevanti. Precisiamo anche che lo spirito di questa sezione è quello di trovare condizioni necessarie sui punti di minimo (stazionari, per la precisione) di funzionali integrali, senza indagare la loro esistenza a priori. Quindi, i calcoli che presentiamo possono anche essere intesi in maniera formale perchè permettono di individuare un insieme abbastanza ristretto di candidati punti di minimo che, però, bisogna testare in un secondo momento.

Considereremo funzionali del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)\ dx,$$

dove $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty]$, definiti in $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (per coprire il caso vettoriale e quello scalare), eventualmente imponendo il valore di u al bordo di Ω. Precisiamo che denoteremo $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ le variabili di f; dato $i \in \{1; \dots ; m\}$, si denota con ξ_i l'i-esima riga della matrice ξ.

Richiediamo che f sia boreliana in modo che la composizione con u e ∇u sia boreliana e che f sia a valori non negativi per evitare problemi di integrabilità. Ovviamente questa assunzione si può indebolire ed è possibile studiare anche il caso in cui f assume valori negativi: tuttavia, bisogna prestare particolare attenzione alla buona definizione del funzionale F. In ogni caso, nelle nostre ipotesi il funzionale F è ben definito in $C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ e assume valori in $[0, +\infty]$; se imponiamo il dato al bordo, tutte le considerazioni fatte rimangono valide.

1.2.1 Condizioni di Neumann e di Dirichlet

Alcuni esempi fondamentali

Iniziamo esaminando il caso in cui non imponiamo il dato al bordo.

Esempio 1.2.1. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ (tale insieme è uno spazio vettoriale); data $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, notiamo che $u + tv \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia di classe C^1. Potendo derivare sotto il segno di integrale, troviamo che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_\Omega f(x; u + tv; \nabla u_0 + t\nabla v)\ dx \right\} \Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt} \left\{ f(x; u + tv; \nabla u + t\nabla v) \right\} \Big|_{t=0} dx \\
&= \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x; u; \nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nabla v_i > \right] dx.
\end{aligned}$$

Precisiamo che la scrittura $\nabla_u f$ indica il vettore (m-dimensionale) delle derivate parziali di f rispetto alle variabili u; analogamente $\nabla_{\xi_i} f$ indica il vettore (n-dimensionale) delle derivate parziali di f rispetto alle variabili ξ_i; inoltre v_i indica l'i-esima componente del campo vettoriale v. Abbiamo provato che f è derivabile secondo Gateaux in u (vedi 1.1.4) e che per ogni v in $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ vale la formula

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u) = \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x; u; \nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nabla v_i > \right] dx.$$

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ un punto stazionario per F (vedi 1.1.5). Vale che

$$0 = \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x; u; \nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nabla v_i > \right] \, dx \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m). \tag{1.3}$$

La relazione (1.3) è nota come l'equazione di Eulero-Lagrange nella prima forma integrale. Notiamo che fino a questo punto abbiamo soltanto utilizzato la regolarità C^1 di f e il fatto di poter derivare sotto il segno di integrale.

Per ottenere una formula più esplicita dobbiamo fare qualche altra assunzione. **Supponiamo che u sia di classe $C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$** e f sia di classe $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ (l'ipotesi in grassetto è veramente cruciale). Supponiamo $n \geq 2$: il caso uni-dimensionale è più semplice e va trattato a parte. Utilizzando le proprietà di Ω, di u e di f, possiamo utilizzare la formula della divergenza nell'equazione (1.3) e troviamo che per ogni $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ vale che

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x; u; \nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nabla v_i > \right] \, dx \\
&= \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x; u; \nabla u), v > - \sum_{i=1}^m \operatorname{div} (\nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u)) \, v_i \right] \, dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^m < v_i \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nu > \; d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^m \int_\Omega v_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(x; u; \nabla u) - \operatorname{div} (\nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u)) \right) \, dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^m v_i < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nu > \; d\mathcal{H}^{n-1},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

dove ν indica la normale esterna a $\partial\Omega$. La relazione (1.4) è chiamata equazione di Eulero-Lagrange nella seconda forma integrale. Vorremmo, infine, dedurre una relazione differenziale. Se ci limitiamo alle funzioni $v \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ deduciamo che

$$0 = \sum_{i=1}^m \int_\Omega v_i (\nabla_u f(x; u; \nabla u) - \operatorname{div} (\nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u))) \, dx;$$

applicando il lemma 6.2.1 (bisogna ragionare componente per componente), deduciamo che per ogni $i \in \{1; \ldots; m\}$ vale che

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x; u(x); \nabla u(x)) - \operatorname{div} (\nabla_{\xi_i} f(x; u(x); \nabla u(x))) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.5}$$

La relazione (1.5) è nota come equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale.

Otteniamo che il primo addendo in (1.4) è identicamente nullo (anche se $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$). Deduciamo che per ogni $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ vale che

$$0 = \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega} v_i < \nabla_{\xi_i} f(x; u; \nabla u), \nu > \; d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.6}$$

La relazione (1.6) è nota come homogeneous Neumann boundary condition ed è sorta dalla minimizzazione del funzionale F in uno spazio in cui non abbiamo prescritto il valore delle funzioni nè quello delle derivate al bordo. Questo fenomeno è veramente significativo.

Applicando il lemma 6.2.1, si trova che per ogni $i \in \{1;\dots;m\}$ vale che

$$< \nabla_{\xi_i} f(x;u(x);\nabla u(x)), \nu(x) >= 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Abbiamo trovato che u soddisfa il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x;u(x);\nabla u(x)) - \mathrm{div}\,(\nabla_{\xi_i} f(x;u(x);\nabla u(x))) = 0 & x \in \Omega, \\ < \nabla_{\xi_i} f(x;u(x);\nabla u(x)), \nu(x) >= 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

per ogni $i \in \{1;\dots;m\}$.

Per concludere, precisiamo che se $n = 1$ si procede in maniera totalmente analoga utilizzando la formula di integrazione per parti al posto del teorema della divergenza. In ogni caso, si ottengono gli stessi risultati (per unificare la notazione, se $\Omega = (a,b)$, può essere conveniente definire la normale esterna a Ω in $\{a;b\}$ come $\nu(a) = -1$ e $\nu(b) = 1$).

Esaminiamo il caso in cui imponiamo il dato al bordo.

Esempio 1.2.2. Sia $u_0 \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$; introduciamo

$$\mathbb{X} := C^1_{u_0}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m), \quad \mathbb{V} := C^1_0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m).$$

Notiamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio affine con spazio vettoriale di riferimento $\mathbb{V}$. Sia $u \in \mathbb{X}$; data $v \in \mathbb{V}$, notiamo che $u + tv \in \mathbb{X}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Procedendo come nell'esempio 1.2.1 troviamo che

$$\frac{d}{dt}F(u+tv)\bigg|_{t=0} = \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x;u;\nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x;u;\nabla u), \nabla v_i > \right] dx.$$

Abbiamo provato che f è derivabile secondo Gateaux in u (vedi 1.1.4) e che per ogni $v \in \mathbb{V}$ vale che

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u) = \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x;u;\nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x;u;\nabla u), \nabla v_i > \right] dx.$$

Sia $u \in \mathbb{X}$ un punto stazionario per F (vedi 1.1.5); come nell'esempio 1.2.1, otteniamo la prima forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange (vedi (1.3), con l'unica differenza che la classe delle funzioni test v ammissibili è $\mathbb{V}$, lo spazio vettoriale di riferimento di $\mathbb{X}$), ovvero

$$0 = \int_\Omega \left[< \nabla_u f(x;u;\nabla u), v > + \sum_{i=1}^m < \nabla_{\xi_i} f(x;u;\nabla u), \nabla v_i > \right] dx \quad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Supponiamo che u sia di classe $C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ e f sia di classe $C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n})$ (l'ipotesi in grassetto è veramente cruciale). Supponiamo $n \geq 2$: il caso uni-dimensionale è più semplice e va trattato a parte. Come nell'esempio 1.2.1 (vedi (1.4)), otteniamo che per ogni $v \in \mathbb{V}$ vale che

$$0 = \sum_{i=1}^m \int_\Omega v_i \left(\frac{\partial f}{\partial u_i}(x;u;\nabla u) - \mathrm{div}\,(\nabla_{\xi_i} f(x;u;\nabla u)) \right) dx,$$

che è la seconda forma integrale dell'equazione di Eulero-Lagrange. Utilizzando il lemma 6.2.1, otteniamo l'equazione di Eulero-Lagrange in forma differenziale (vedi (1.5)), ovvero che per ogni $i \in \{1; \dots; m\}$ vale che

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(x; u(x); \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_{\xi_i} f(x; u(x); \nabla u(x))\right) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Abbiamo trovato che u soddisfa il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x; u(x); \nabla u(x)) - \operatorname{div}\left(\nabla_{\xi_i} f(x; u(x); \nabla u(x))\right) = 0 & x \in \Omega, \\ u_i(x) = (u_0)_i(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

per ogni $i \in \{1; \dots; m\}$.

La relazione

$$u_{|\partial\Omega} = (u_0)_{|\partial\Omega} \tag{1.7}$$

è detta non-homogeneous Dirichlet boundary condition (se $u_0 = 0$, è chiamata homogeneous Dirichlet boundary condition). Notiamo che, a differenza dell'esempio 1.2.1, la classe delle funzioni test v ammissibili non è abbastanza ampia da far nascere un'ulteriore informazione su $u_{|\partial\Omega}$.

Per concludere, precisiamo che se $n = 1$ si procede in maniera totalmente analoga utilizzando la formula di integrazione per parti al posto del teorema della divergenza.

Esempio 1.2.3. Nel contesto degli esempi 1.2.1 e 1.2.2, supponiamo $m = 1$; se

$$f(x; u; \xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + \rho(x)u,$$

dove $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ è una funzione boreliana, l'equazione di Eulero-Lagrange (nella forma differenziale) che si ottiene dallo studio dei punti stazionari (a noi interessano i punti di minimo) del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \rho(x)u\right] dx$$

(cioè calcolando la derivata direzionale rispetto a $v \in C_c^1(\Omega)$) è l'equazione di Poisson

$$\Delta u(x) = -\rho(x) \quad x \in \Omega,$$

che rappresenta il potenziale elettrico di una distribuzione di cariche con densità ρ. Tale equazione è accompagnata dalla condizione di Neumann o di Dirichlet, a seconda che si minimizzi il funzionale F in $C^1_{u_0}(\overline{\Omega})$ o in $C^1(\overline{\Omega})$.

Alcune varianti degli esempi presentati

É possibile studiare moltissime varianti degli esempi precedenti, in cui ci siano condizioni al bordo miste oppure nel caso in cui l'integranda f abbia una forma particolare. Il processo di derivazione dell'equazione di Eulero-Lagrange è del tutto analogo a quello illustrato dettagliatamente negli esempi 1.2.1 e 1.2.2; pertanto non riportiamo tutti i dettagli, ma ci limitiamo ad esaminare gli aspetti essenziali. In particolare, è importante capire (a seconda delle condizioni al contorno imposte) quale sia la classe $\mathbb{V}$ delle funzioni test v ammissibili. Per la precisione, se vogliamo studiare i punti stazionari di un funzionale $F : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, dove $\mathbb{X}$ è un opportuno spazio di funzioni, dato $u \in \mathbb{X}$, vogliamo cercare u tale che

$$0 = \frac{d}{dt} F(u + tv)\bigg|_{t=0} \qquad \forall v \in \mathbb{V}.$$

Indipendentemente da chi sia u e dal fatto che il limite del rapporto incrementale esista, dobbiamo essere sicuri che per ogni $v \in \mathbb{V}$ esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la funzione $u + tv$ sia in $\mathbb{X}$. In altri termini, questa necessità fornisce un criterio operativo per individuare l'insieme $\mathbb{V}$.

Ricordiamo che per giustificare pienamente tutti i passaggi ci vuole qualche ipotesi su f, su Ω e, soprattutto, **si deve richiedere che $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$: questa richiesta è davvero forte, perchè i funzionali integrali che consideriamo sono naturalmente definiti in sottoinsiemi di $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$.**

Esempio 1.2.4. Sia $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ un sottoinsieme chiuso. Sia

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid u_{|\Gamma} = 0\};$$

consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega f(x; u; \nabla u)\ dx$$

definito in $\mathbb{X}$. In questo caso, l'insieme delle funzioni test ammissibili coincide con $\mathbb{X}$ (infatti, $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale). Allora, l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al contorno che si ottengono sono

$$\begin{cases} f_u(x; u; \nabla u) = \operatorname{div}\left(\nabla_\xi f(x; u; \nabla u)\right) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \Gamma, \\ < \nabla_\xi f(x; u; \nabla u), \nu >= 0 & x \in \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases}$$

In dimensione 1, la condizione $u_\Gamma = 0$ corrisponde ad aver imposto il valore di u in un estremo. Nell'altro estremo nasce la condizione di Neumann $f_\xi(x; u(x); \nabla u(x)) = 0$.

Notiamo anche che, a parte che in dimensione 1, la presenza di condizioni miste (Neumann e Dirichlet) in sottoinsiemi disgiunti di $\partial\Omega$ è molto difficile da conciliare (infatti u deve essere di classe $C^2(\overline{\Omega})$).

Esempio 1.2.5. Sia

$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2\ dx,$$

definito in $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$ e $|\cdot|$ è la norma euclidea di una matrice $m \times n$ (ricordiamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$). Vogliamo ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange. Data $v \in C^1_c(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^m)$, ragionando come in 1.2.1 e utilizzando funzioni test $v \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ si deduce che per ogni $i \in \{1; \ldots; m\}$ vale che

$$\Delta u_i = 0$$

nell'aperto Ω che è un sistema di equazioni differenziali completamente disaccoppiato.

Supponiamo che $n = m$; consideriamo il funzionale

$$G(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\nabla u + \nabla^T u}{2} \right|^2\ dx,$$

definito in $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$. Si tratta del funzionale che descrive l'energia nei problemi di elasticità linearizzata. Utilizzando come come variazioni ammissibili funzioni in $C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$, si trova che per ogni $i \in \{1;\dots;n\}$ vale che

$$\Delta u_i + \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$$

nell'aperto Ω, che è un sistema di equazioni differenziali non disaccoppiate.

Esempio 1.2.6. Siano $\mathbb{X} := \{C^1([a,b]) \mid u'(a) = \alpha,\ u'(b) = \beta\}$ e

$$F(u) := \int_a^b f(x;u;u')\ dx.$$

In questo caso l'insieme delle funzioni test ammissibili è lo spazio vettoriale

$$\mathbb{V} := \{v \in C^1([a,b]) \mid v(a) = v(b) = 0\}.$$

Allora, l'equazione di Eulero-Lagrange e le condizioni al contorno che si ottengono sono

$$\begin{cases} f_u(x;u;u') = \frac{d}{dx} f_\xi(x;u;u') & x \in \Omega, \\ f_\xi(x;u(x);u'(x)) = 0 & x \in \{a;b\}. \end{cases}$$

Ricordando che deve valere anche $u'(a) = \alpha$ e $u'(b) = \beta$, il problema è generalmente sovradeterminato, cioè abbiamo imposto troppe condizioni. Questo fenomeno è davvero significativo e proveremo a spiegarlo nei capitoli seguenti.

Esempio 1.2.7. Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(x;u)\ dx,$$

definito in $C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$. Notiamo che non c'è dipendenza dalle derivate di u (per questo motivo, F ha senso per le funzioni C^0). In questo caso, la classe delle variazioni ammissibili coincide con $C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$. L'equazione di Eulero-Lagrange che si ottiene è

$$f_u(x;u) = 0 \quad x \in \Omega.$$

Notiamo che questo è un problema di funzione implicita, che non è interessante in questo contesto. Per questa ragione, tratteremo sempre funzionali dipendenti dalle derivate. Finora abbiamo studiato il caso di funzionali dipendenti dalle derivate di ordine 1; naturalmente, la teoria si estende (con le stesse idee e ulteriori assunzioni) al caso di funzionali dipendenti da derivate di ordine superiore, cioè

$$F(u) = \int_\Omega f(x;u;\nabla u;\nabla^2 u;\dots;\nabla^k u)\ dx,$$

definito su sottoinsiemi opportuni di $C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$. Come verificato esplicitamente nel caso in cui $k = 1$ (vedi 1.2.6), si possono imporre condizioni su $u, \nabla u, \dots, \nabla^{k-1} u$, ma non su $\nabla^k u$: in tal caso, il problema risulta generalmente sovradeterminato.

Esempio 1.2.8. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1 e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Consideriamo il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \ dx + \int_{\partial\Omega} gu \ d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Notiamo che F è ben definito in $\mathbb{X} \coloneqq C^1(\overline{\Omega})$; precisiamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale, pertanto l'insieme delle funzioni test v ammissibili coincide con $\mathbb{X}$. Limitandosi alle funzioni test $v \in C^1_c(\Omega)$, si trova che l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\Delta u(x) = 0 \ \ x \in \Omega.$$

Se u risolve tale equazione, prendendo v in $C^1(\overline{\Omega})$, si trova che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > \ dx + \int_{\partial\Omega} gv \ d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= -\int_\Omega v\Delta u \ dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g\right) v \ d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g\right) v \ d\mathcal{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Utilizzando il lemma 6.2.1, si deduce che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g = 0 \ \ x \in \partial\Omega.$$

Questa condizione è chiamata non-homogeneous Neumann boundary condition.

Consideriamo il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \ dx + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} u^2 \ d\mathcal{H}^{n-1}$$

definito in $C^1(\overline{\Omega})$. Procedendo in maniera completamente analoga, si trova che l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\Delta u(x) = 0 \ \ x \in \Omega;$$

la condizione al bordo, invece, è

$$u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \ x \in \partial\Omega.$$

Esempio 1.2.9 (Problema con ostacolo).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1, $E \subseteq \Omega$ un insieme compatto e $u_0 : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata. Sia

$$\mathbb{X} \coloneqq \{u \in C^1_0(\overline{\Omega}) \mid u(x) \geq u_0(x) \ \forall x \in E\}.$$

Vogliamo ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange per il funzionale

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \ dx.$$

Notiamo che $\mathbb{X}$ non è uno spazio affine. Introduciamo l'insieme

$$\mathbb{V} := \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) \mid v(x) \geq 0 \ \forall x \in E\}$$

e il suo sottinsieme

$$\mathbb{V}' := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \mid v(x) = 0 \ \forall x \in E\}.$$

Al contrario di $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}'$ è uno spazio vettoriale. Supponiamo che u sia un punto di minimo per F in $\mathbb{X}$. Notiamo che per ogni $v \in \mathbb{V}'$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che $u + tv \in \mathbb{X}$. Allora, possiamo ben definire la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tale che

$$\varphi(t) = F(u + tv).$$

Essendo $t = 0$ punto di minimo per φ in $\mathbb{R}$, deduciamo che

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > \ dx \\ = -\int_\Omega v \Delta u \ dx &= -\int_{\Omega \setminus E} v \Delta u \ dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e abbiamo usato il fatto che $v_{|E} = 0$. Utilizzando il lemma 6.2.1, deduciamo che

$$\Delta u(x) = 0 \quad x \in \Omega \setminus E.$$

Tuttavia, questo non ci dà informazioni sul comportamento di u in E. Sia $v \in \mathbb{V}$; osserviamo che per ogni $t \in [0, +\infty)$ vale che $u + tv \in \mathbb{X}$. Allora possiamo considerare la funzione $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(t) = F(u + tv).$$

Essendo $t = 0$ punto di minimo per φ (che è definita su una semiretta destra), vale che

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega < \nabla u, \nabla v > \ dx \\ = -\int_\Omega v \Delta u \ dx &= -\int_E v \Delta u \ dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\Delta u(x) = 0$ se $x \in \Omega \setminus E$. Utilizzando il lemma 6.2.1, deduciamo che

$$-\Delta u(x) \geq 0 \quad x \in E.$$

In conclusione, u soddisfa il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \setminus E, \\ \Delta u(x) \leq 0 & x \in E, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

1.2.2 Variazione interna

Negli esempi presentati finora abbiamo calcolato la variazione esterna di un funzionale integrale. Ci sono casi, come quello presentato nell'esempio 1.2.10 in cui, l'equazione di Eulero-Lagrange che ne deriva non è abbastanza esaustiva, perchè il contesto ci suggerisce che ci sia qualche condizione più stringente. Per questa ragione, si introduce la nozione di variazione interna.

Esempio 1.2.10. Siano (a, b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{X}$ l'insieme delle funzioni $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ aventi al più un punto di discontinuità di (a, b) (dipendente da u) e di classe C^1 nella chiusura dei due intervalli in cui è diviso (a, b). Osserviamo che $\mathbb{X}$ non è uno spazio affine. Sia $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua; possiamo ben definire

$$F(u) \coloneqq \int_a^b f(x; u; \dot{u})\ dx$$

per ogni u in $\mathbb{X}$. Supponiamo che u minimizzi il funzionale F in $\mathbb{X}$. Supponiamo che u abbia un punto di discontinuità, diciamo in c (ne ha al più uno). Per ogni v in $C_c^\infty([a, b])$ per ogni t in $\mathbb{R}$, $u + tv$ appartiene a $\mathbb{X}$. Pertanto possiamo calcolare la variazione esterna di F in u lungo v. Ragionando esattamente come nell'esempio 1.2.1 e assumendo che f e u siano di classe C^2, si trova che u deve soddisfare separatamente i seguenti problemi differenziali:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_\xi(x; u(x); \dot{u}(x)) = f_u(x; u(x); \dot{u}(x)) & \text{se } x \in (a, c), \\ f_\xi(a; u(a)^+; \dot{u}(a)^+) = f_\xi(c; u(c)^-; \dot{u}(c)^-) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_\xi(x; u(x); \dot{u}(x)) = f_u(x; u(x); \dot{u}(x)) & \text{se } x \in (c, b), \\ f_\xi(c; u(c)^+; \dot{u}(c)^+) = f_\xi(b; u(b)^-; \dot{u}(b)^-) = 0. \end{cases}$$

Abbiamo denotato il limite destro e sinistro nel modo ovvio. Possiamo aspettarci di ottenere un'altra condizione nel punto di discontinuità di u: a questo proposito, data una funzione η in $C_c^\infty((a, b))$, consideriamo la variazione interna di F in u nella direzione η. Per ogni t in $\mathbb{R}$ definiamo la funzione $\Phi_t : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi_t(x) \coloneqq x + t\eta(x).$$

Se t è abbastanza piccolo, Φ_t è un diffeomorfismo di $[a, b]$ in $[a, b]$. Data la funzione u, se t è abbastanza piccolo, possiamo ben definire la funzione

$$u_t \coloneqq u \circ \Phi_t^{-1}.$$

La variazione interna di F nel punto u è definita come

$$\left.\frac{d}{dt} F(u_t)\right|_{t=0}.$$

Vogliamo svolgere questi conti:

$$\begin{aligned} F(u_t) &= \int_a^b f(y; u_t(y); \dot{u}_t(y))\ dy = \\ &= \int_a^b f\left(y; u(\Phi_t^{-1}(y)); \dot{u}(\Phi_t^{-1}(y)) \frac{1}{\Phi_t'(\Phi_t^{-1}(y))}\right) dy \\ &= \int_a^b f\left(\Phi_t(x); u(x); \dot{u}(x) \frac{1}{\Phi_t'(x)}\right) \Phi_t'(x)\ dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo effettuato il cambio di variabile $y = \Phi_t(x)$ e $dy = \Phi_t'(x)dx$. Osserviamo che vale

$$\begin{aligned}\Phi_t'(x) &= 1 + t\dot\eta(x),\\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x) &= \eta(x),\\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x) &= \dot\eta(x).\end{aligned}$$

Essendo f abbastanza regolare da poter derivare sotto il segno di integrale, abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\Phi_t'(x)\right]\bigg|_{t=0} dx\\ &= \int_a^b f\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x)\bigg|_{t=0} dx\\ &\quad + \int_a^b \left[f_x\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(x)\right]\Phi_t'(x)\bigg|_{t=0} dx\\ &\quad + \int_a^b f_\xi\left(\Phi_t(x); u(x); \dot u(x)\frac{1}{\Phi_t'(x)}\right)\left(-\frac{\dot u(x)\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t'(x)}{\Phi_t'(x)^2}\Phi_t'(x)\right)\bigg|_{t=0} dx\\ &= \int_a^b \left[f(x;u;\dot u)\dot\eta + f_x(x;u;\dot u)\eta - f_\xi(x;u;\dot u)\dot u\dot\eta\right]\, dx\\ &= \int_a^b \left[f_x\eta + (f - f_\xi\dot u)\dot\eta\right]\, dx.\end{aligned}$$

Essendo u discontinua nel punto c (la discontinuità è fissa perchè abbiamo cambiato variabile), possiamo integrare per parti spezzando l'integrale:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} &= \int_a^b \left[f_x\eta + (f - f_\xi\dot u)\dot\eta\right]\, dx\\ &= \int_a^c \left[f_x\eta + (f - f_\xi\dot u)\dot\eta\right]\, dx + \int_c^b \left[f_x\eta + (f - f_\xi\dot u)\dot\eta\right]\, dx\\ &= \int_a^c \left(f_x - \frac{d}{dx}(f - f_\xi\dot u)\right)\eta\, dx + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_a^{c-}\\ &\quad + \int_c^b \left(f_x - \frac{d}{dx}(f - f_\xi\dot u)\right)\eta\, dx + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b}\\ &= \int_a^b \left(f_x - \frac{d}{dx}(f - f_\xi\dot u)\right)\eta\, dx + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_a^{c-} + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b}\\ &= \int_a^b \dot u\left(\frac{d}{dx}f_\xi - f_u\right)\, dx + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_a^{c-} + \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_{c^+}^{b}.\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sviluppato le derivate. Essendo u un punto di minimo, abbiamo già mostrato che risolve l'equazione di Eulero-Lagrange separatamente in (a, c) e (c, b); inoltre abbiamo trovato delle condizioni al bordo di Neumann. Pertanto, otteniamo che

$$0 = \frac{d}{dt}F(u_t)\bigg|_{t=0} = \Big[(f - f_\xi\dot u)\eta\Big]_{c+}^{c-}$$

per ogni funzione η in $C_c^\infty((a,b))$. Quindi, possiamo facilmente concludere che la funzione
$$f(x;u;\dot{u}) - f_\xi(x;u;\dot{u})\dot{u}$$
è continua nel punto c. Questa è la condizione aggiuntiva data dal calcolo della variazione interna: infatti, abbiamo studiato la variazione del funzionale per cammini in $\mathbb{X}$ ottenuti traslando "orizzontalmente" il grafico di u, cioè muovendo il punto di discontinuità (calcolare la variazione esterna, invece, significa studiare la variazione del funzionale lungo cammini ottenuti traslando "verticalmente" il grafico di u).

Notiamo che se u non ha punti di discontinuità, il calcolo della variazione interna non aggiunge condizioni a quelle ricavate annullando la variazione esterna; per la precisione, u soddisfa il problema differenziale
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_\xi(x;u(x);\dot{u}(x)) = f_u(x;u(x);\dot{u}(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ f_\xi(a;u(a);\dot{u}(a)) = f_\xi(b;u(b);\dot{u}(b)) = 0; \end{cases}$$

Osservazione 1.2.11. Riportiamo alcuni commenti a margine dell'esempio 1.2.10

- Considerando lo stesso problema in cui u è a valori vettoriali ed è regolare in $[a,b]$, dal calcolo della variazione esterna si ottiene
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_\xi(x;u(x);\dot{u}(x)) = f_u(x;u(x);\dot{u}(x)) & \text{se } x \in (a,b), \\ f_\xi(x;u(x);\dot{u}(x)) = 0 & \text{se } x \in \{a;b\}; \end{cases}$$
invece, dal calcolo della variazione interna si ottiene
$$f_x(x;u(x);\dot{u}(x)) = \frac{d}{dx}(f(x;u(x);\dot{u}(x)) - < f_\xi(x;u(x);\dot{u}(x)), \dot{u}(x) >) \quad x \in (a,b).$$
Nel primo caso otteniamo un sistema di equazioni differenziali, nel secondo caso nel otteniamo soltanto una: questo non è sorprendente, visto che calcolando la variazione esterna trasliamo il grafico di u in tutte le direzioni, mentre calcolando la variazione interna la traslazione avviene soltanto in una direzione.

- Nel caso scalare in cui f non dipende da x e u è regolare in $[a,b]$, il calcolo della variazione interna porta a
$$\frac{d}{dx}[f(u(x);\dot{u}(x)) - f_\xi(u(x);\dot{u}(x))\dot{u}(x)] = 0 \ x \in (a,b)$$
da cui segue che
$$f(u(x);\dot{u}(x)) - f_\xi(u(x);\dot{u}(x))\dot{u}(x)$$
è costante in (a,b). Notiamo che è possibile ottenere questa condizione anche senza supporre che u sia di classe C^2 (infatti a priori non è richiesta questa regolarità). Abbiamo ottenuto che per ogni $\eta \in C_c^1((a,b))$ vale che
$$0 = \frac{d}{dt} F(u_t)\Big|_{t=0} = \int_a^b (f - f_\xi \dot{u})\dot{\eta} \ dx;$$
applicando il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 6.2.3), si ottiene che
$$f(u(x);\dot{u}(x)) - f_\xi(u(x);\dot{u}(x))\dot{u}(x)$$
è costante in (a,b). Per la verità, avremmo potuto ottenere questa informazione anche dallo studio della variazione esterna, procedendo in maniera totalmente analoga.

1.2.3 Moltiplicatori di Lagrange

Siano dati due funzionali F, G definiti su un insieme $\mathbb{X}$ a valori in $(-\infty, +\infty]$. Vogliamo minimizzare F nel sottoinsieme di $\mathbb{X}$ vincolato a G, cioè in

$$\tilde{\mathbb{X}} := \{u \in \mathbb{X} \mid G(u) = 0\}.$$

Si tratta di una generalizzazione della classe di problemi che in dimensione finita è possibile affrontare tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Supponendo che F, G siano derivabili alla Gateaux (vedi 1.1.4) e che u_0 minimizzi F in $\tilde{\mathbb{X}}$, si può dimostrare che vale una delle seguenti alternative:

- $\delta G(u_0; v) = 0$ per ogni direzione v ammissibile;
- esiste λ in $\mathbb{R}$ tale che
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial v}(u_0).$$
per ogni direzione v ammissibile (λ è detto moltiplicatore di Lagrange).

In ogni caso, non vogliamo sviluppare questa teoria. Ci limitiamo a mostrare un esempio in cui siamo in grado di dare una dimostrazione dettagliata.

Esempio 1.2.12. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1; possiamo definire i funzionali
$$F(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx, \ G(u) := \int_\Omega u^2 \ dx$$
in $C^1(\overline{\Omega})$. Supponiamo che F ammetta minimo nell'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \mid G(u) = 1\}$$

e che, detto u_0 tale punto di minimo, sia di classe $C^2(\overline{\Omega})$. Vogliamo ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange che u_0 deve risolvere. Dobbiamo considerare delle curve in $\mathbb{X}$ e calcolare la derivata direzionale di F in u_0 lungo tali curve. Per ogni v in $C_c^\infty(\Omega)$ possiamo considerare la curva

$$u_t := \frac{u_0 + tv}{\|u_0 + tv\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Dal momento che $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che la curva u_t è ben definita in $(-\delta, \delta)$ ed è contenuta in $\mathbb{X}$; inoltre, al tempo $t = 0$ coincide con u_0. Essendo u_0 minimo globale per F in $\mathbb{X}$, si trova facilmente che

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} F(u_t)\bigg|_{t=0} \\
&= \int_\Omega 2 < \nabla u_0, \nabla v > \ dx - \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega 2u_0 v \ dx \\
&= -\int_\Omega \left(\Delta u_0 + u_0 \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) v \ dx.
\end{aligned}$$

Applicando il lemma 6.2.1, deduciamo che

$$\Delta u_0 + u_0 \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \ x \in \Omega.$$

Notiamo che la condizione

$$0 = \int_\Omega 2 < \nabla u_0, \nabla v > \ dx - \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega 2u_0 v \ dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

è equivalente a dire che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u_0) = \lambda \frac{\partial G}{\partial v}(u_0) \ \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$

che ricorda la teoria dei moltiplicatori di Lagrange per problemi in dimensione finita.

1.3 Appendice

Per concludere, presentiamo due esempi particolarmente rilevanti, omettendo i dettagli di natura geometrica.

Geodetiche su una varietà

Sia $\mathbb{M}$ una k-varietà connessa in $\mathbb{R}^n$ di classe C^2. Siano x_0, x_1 punti in $\mathbb{M}$.

Definizione 1.3.1 (Funzionale lunghezza)**.**
Definiamo l'insieme

$$\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,1], \mathbb{M}) \mid u(0) = x_0, \ u(1) = x_1, \ u'(x) \neq 0 \ \forall x \in [0,1]\}$$

e i funzionali

$$L(u) := \int_0^1 |u'| \ ds, \ E(u) := \int_0^1 |u'|^2 \ ds$$

sull'insieme $\mathbb{X}$. L è detto funzionale lunghezza.

Definizione 1.3.2 (Geodetica su una varietà)**.**
Dati $x_0, x_1 \in \mathbb{M}$, una geodetica da x_0 a x_1 è una curva che minimizza il funzionale lunghezza sull'insieme $\mathbb{X}$ (vedi 1.3.1).

Osservazione 1.3.3. Ricordiamo i seguenti fatti, utili in questo contesto.

- Data $u \in \mathbb{X}$, per la disuguaglianza di Hölder vale che

  $$L(u) = \int_0^1 |u'| \ ds \leq \left(\int_0^1 |u'|^2 \ ds\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E(u)}$$

  e l'uguaglianza vale se e solo se $|u'|$ è costante in $[0,1]$.

- Per ogni $u \in \mathbb{X}$ esiste una riparametrizzazione $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ che fissa gli estremi e tale che, detto $u_1 := u \circ \sigma$, vale che $|u_1'|$ è costante in $[0,1]$ (parametrizzazione per lunghezza d'arco).

- Il funzionale L è invariante per riparamentrizzazione.

Corollario 1.3.4. *Se u_0 minimizza E in $\mathbb{X}$, allora u_0 minimizza L in $\mathbb{X}$ e $|u_0'|$ è costante in $[0,1]$.*

Dimostrazione. Dato $u \in \mathbb{X}$, sia u_1 la sua parametrizzazione per lunghezza d'arco. Vale che

$$L(u) = L(u_1) = \sqrt{E(u_1)} \geq \sqrt{E(u_0)} \geq L(u_0).$$

Se scegliamo $u = u_0$, tutte le disuguaglianze sono uguaglianze; allora deduciamo che u_0 ha velocità costante. □

Osservazione 1.3.5. L è invariante per parametrizzazione; questo fatto crea problemi dal punto di vista variazionale. Invece E non è invariante per riparametrizzazione: minimizzare E significa selezionare una curva di lunghezza minima e percorrerla a velocità costante (in particolare, si sceglie anche una precisa parametrizzazione). Per questa ragione, minimizziamo E al posto di L.

Teorema 1.3.6. *Se u minimizza E in $\mathbb{X}$, allora $u''(s) \perp \mathbb{M}$ per ogni $s \in [0, 1]$.*

Dimostrazione. Dobbiamo individuare una classe di variazioni ammissibili. Introduciamo lo spazio

$$\mathbb{T}(\mathbb{X}; u) := \{v \in C^2([0, 1]; \mathbb{R}^n) \mid v(0) = v(1) = 0,\ v(s) \in \mathrm{Tan}_{u(s)}(\mathbb{M})\ \forall s \in [0, 1]\}.$$

Sia data $v \in \mathbb{T}(\mathbb{X}; u)$; utilizzando la teoria degli intorni tubolari è possibile definire (almeno localmente) una proiezione regolare (per questo si richiede che $\mathbb{M}$ sia di classe C^2) con cui si può costruire una famiglia di curve

$$u_t(s) = u(s) + tv(s) + \omega(t; s),$$

dove il resto ω ha la proprietà che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $(t; s)$ vale che

$$|\omega(t; s)| + \left|\frac{\partial \omega}{\partial s}(t; s)\right| \leq Mt^2.$$

Allora, si trova che

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} F(u_t)\Big|_{t=0} \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left|u'(s) + tv'(s) + \frac{\partial \omega}{\partial s}(t, s)\right|^2\ ds \\ &= \int_0^1 < u', v' >\ ds. \end{aligned}$$

Se $u \in C^2([0, 1])$, possiamo integrare per parti e otteniamo che

$$0 = -2 \int_0^1 u'' v\ ds.$$

Utilizzando il lemma 6.2.1, deduciamo immediatamente che per ogni $s \in [0, 1]$ la proiezione ortogonale di $u''(s)$ su $\mathrm{Tan}_{u(s)}(\mathbb{M})$ è nulla; questo è equivalente ad affermare che $u''(s) \perp \mathbb{M}$ per ogni $s \in [0, 1]$. □

Superfici minime

Lavoriamo per semplicità con varietà di classe C^∞.

Definizione 1.3.7 (Funzionale area)**.**
Sia Σ una d-varietà compatta (eventualmente con bordo) in $\mathbb{R}^{d+1}$. Si chiama

$$\text{Area}(\Sigma) \coloneqq \mathcal{H}^d(\Sigma),$$

dove $\mathcal{H}^d$ è la misura di Hausdorff d-dimensionale in $\mathbb{R}^{d+1}$.

Osservazione 1.3.8. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, Σ una d-varietà in $\mathbb{R}^{d+1}$ (eventualmente con bordo) e $\Psi : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione locale di Σ con jacobiano limitato. Per la formula dell'area, vale che

$$\text{Area}(\Psi(\Omega)) = \int_\Omega \left|\det(\sqrt{\nabla^T\Psi(x) \cdot \nabla\Psi(x)})\right| \, dx,$$

dove $\nabla\Psi(x)$ è la matrice jacobiana di Ψ nel punto $x \in \Omega$. Utilizzando questa formula e ricoprendo Σ con un numero finito di carte, è possibile trovare una formula integrale per calcolare l'area di una ipersuperficie compatta in $\mathbb{R}^{d+1}$.

Osservazione 1.3.9. Siano Σ_0, Σ_1 ipersuperfici compatte in $\mathbb{R}^{d+1}$ (eventualmente con bordo); supponiamo che $\Psi : \Sigma_0 \to \Sigma_1$ sia un diffeomorfismo. Dalla formula dell'area segue che

$$\text{Area}(\Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} 1 \, d\mathcal{H}^d = \int_{\Sigma_0} |\det(\nabla_T\Psi(x))| \, d\mathcal{H}^d,$$

dove $\nabla_T\Psi(x)$ è la matrice che rappresenta il differenziale di Ψ rispetto a due qualsiasi basi di $\text{Tan}_x(\Sigma_0)$ e $\text{Tan}_{\Psi(x)}(\Sigma_1)$.

Teorema 1.3.10. *Sia Γ una $(d-1)$-varietà compatta in $\mathbb{R}^{d+1}$; introduciamo l'insieme*

$$\mathbb{X} \coloneqq \{\Sigma \text{ } d\text{-varietà con bordo compatta in } \mathbb{R}^{d+1} \mid \partial\Sigma = \Gamma\}.$$

Sia Σ_0 un punto di minimo per il funzionale Area definito su $\mathbb{X}$. Allora Σ_0 ha curvatura media H identicamente nulla; in altri termini $H \equiv 0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale Area.

Dimostrazione. Presentiamo i passaggi essenziali di una dimostrazione che non faccia uso delle parametrizzazioni.

Sia η la normale unitaria a Σ_0. Sia $v : \Sigma_0 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia che sia identicamente nulla in un intorno di $\partial\Sigma_0$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \Sigma_0$, possiamo definire

$$\Phi_t(x) \coloneqq x + tv(x)\eta(x).$$

Se t è abbastanza piccolo, Φ_t è un diffeomorfismo, Σ_t è una superficie e appartiene a $\mathbb{X}$ (infatti Φ_t è una piccola perturbazione dell'identità e Σ_0 è compatta). Allora vale che

$$0 = \frac{d}{dt}(\text{Area}(\Sigma_t))\bigg|_{t=0}.$$

Calcoliamo $\text{Area}(\Sigma_t)$. Per ogni $x \in \Sigma_0$, la mappa $\Phi_t : \Sigma_0 \to \Sigma_t$ ha differenziale $d\Phi_t(x) : \text{Tan}_x(\Sigma_0) \to \text{Tan}_{\Phi_t(x)}(\Sigma_t)$. Fissiamo una base ortonormale β_x di $\text{Tan}_x(\Sigma_0)$ e completiamola ad una base di $\mathbb{R}^{d+1}$ aggiungendo il vettore normale $\eta(x)$ (possiamo assumere che β_x si muova in maniera liscia rispetto a x). Sia $\nabla_T\tilde{\Phi}_t(x)$ la matrice $d \times d$ che rappresenta $d\Phi_t(x)$ rispetto alle basi β_x e $d\Phi_t(\beta_x)$. Poniamo

$$J(\Phi_t(x)) = \left|\det(\nabla_T\tilde{\Phi}_t(x))\right|;$$

vale che

$$\mathrm{Area}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_0} J\Phi_t(x)\ d\mathcal{H}^d(x).$$

Sia $\nabla\Phi_t(x)$ la matrice $(d+1)\times d$ associata al differenziale completo di $\Phi_t : \Sigma_0 \to \mathbb{R}^{d+1}$. Vale che

$$J\Phi_t(x) = \left|\det(\nabla_T\tilde{\Phi}_t(x))\right| = \sqrt{\det(\nabla^T\Phi_t(x)\cdot\nabla\Phi_t(x))}.$$

Avendo che

$$d\Phi_t(x) : h \to h + t\eta(x)dv_x(h) + v(x)d\eta_x(h),$$

segue che

$$\nabla_T\Phi_t(x) = \begin{pmatrix} I + t\nabla\eta(x)v(x) \\ \hline t\nabla v(x) \end{pmatrix}.$$

Notiamo che vale

$$\nabla^T\Phi_t(x)\cdot\nabla^T\Phi_t(x) = I + tv(x)\left(\nabla\eta(x) + \nabla^T\eta(x)\right) + \mathcal{O}(t^2);$$

passando al determinante, deduciamo che

$$\det(\nabla^T\Phi(x)\cdot\nabla^T\Phi(x)) = 1 + 2tv(x)\mathrm{Tr}(\nabla\eta(x)) + \mathcal{O}(t^2) = 1 + tv(x)H(x) + \mathcal{O}(t^2),$$

ricordando che la curvatura media è per definizione la traccia della matrice jacobiana del versore normale η. Segue che

$$\mathrm{Area}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_0} (1 + 2tv(x)H(x) + \mathcal{O}(t^2))\ d\mathcal{H}^d(x).$$

Deduciamo che

$$0 = \frac{d}{dt}\mathrm{Area}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = \int_{\Sigma_0} 2v(x)H(x)\ d\mathcal{H}^d(x);$$

questa relazione vale per ogni $v \in C_c^1(\Sigma_0;\mathbb{R})$. Applicando il lemma 6.2.1, deduciamo che $H \equiv 0$ in Σ_0. $\square$

Osservazione 1.3.11. La dimostrazione data, pur non essendo del tutto rigorosa, non risponde ad una domanda fondamentale: esiste una superficie Σ che abbia Γ come bordo? Abbiamo dato per scontato che la risposta sia affermativa, tralasciando volutamente una questione molto delicata.

Capitolo 2

Metodo diretto

Siano dati un insieme $\mathbb{X}$ ed un funzionale $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$. Vogliamo mostrare che sotto certe condizioni su F e su $\mathbb{X}$ è possibile dedurre l'esistenza di punti di minimo per F in $\mathbb{X}$ in maniera completamente astratta. Questo approccio, profondamente diverso da quello adottato finora, è noto come "metodo diretto" e si è sviluppato a partire dall'inizio del 1900.

2.1 Un approccio astratto

Vogliamo trovare ipotesi abbastanza generali per dedurre in astratto l'esistenza di punti di minimo per un funzionale F definito su uno spazio $\mathbb{X}$.

Introdurremo nozioni sequenziali di compattezza e semicontinuità inferiore. Questo approccio è coerente, autocontenuto e descrive bene tutti i casi rilevanti. Ovviamente le suddette nozioni sono anche di natura topologica, per cui si possono riformulare gli enunciati con un linguaggio leggermente diverso. Precisiamo anche che i due approcci non sono del tutto equivalenti.

2.1.1 Teorema di Weierstrass

Definizione 2.1.1 (Nozione di convergenza)**.**
Sia $\mathbb{X}$ un insieme e sia $\mathbb{X}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori in $\mathbb{X}$. Una nozione di convergenza è un qualunque sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathbb{X}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{X}$. Una successione $(a_n)_n$ si dice convergente se esiste $l \in \mathbb{X}$ tale che $((a_n)_n; l) \in \mathcal{S}$.

Osservazione 2.1.2. Nella definizione 2.1.1 dichiariamo quali sono le successioni in $\mathbb{X}$ convergenti e quali sono i loro limiti. Non introduciamo alcuna proprietà aggiuntiva, come l'unicità del limite o la proprietà di passaggio alle sottosuccessioni.

Nel seguito supporremo che $\mathbb{X}$ sia un insieme dotato di una nozione di convergenza.

Definizione 2.1.3 (Compattezza e semicontinuità)**.**

- Un sottoinsieme K di $\mathbb{X}$ si dice relativamente compatto rispetto a $\mathcal{S}$ se per ogni successione $(x_n)_n$ in K esiste una sottosuccessione convergente rispetto a $\mathcal{S}$ (non necessariamente ad un punto in K).

- Un sottoinsieme K di $\mathbb{X}$ si dice compatto rispetto a $\mathcal{S}$ se per ogni successione $(x_n)_n$ in K esiste una sottosuccessione e un punto x_∞ in K tale che $(x_{n_k})_k$ converge ad x_∞ rispetto a $\mathcal{S}$.
- Una funzione $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ si dice semicontinua inferiormente rispetto a $\mathcal{S}$ se per ogni successione $(x_n)_n$ che converge ad x_∞ rispetto a $\mathcal{S}$ vale che
$$\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty).$$

Teorema 2.1.4 (Teorema di Weierstrass)**.**
Sia $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente rispetto a $\mathcal{S}$. Supponiamo che esista una successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{X}$ tale che

- $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \inf_{\mathbb{X}} F$,
- *esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente rispetto a $\mathcal{S}$ ad un punto x_∞ in $\mathbb{X}$.*

Allora F ammette minimo in $\mathbb{X}$ e x_∞ è punto di minimo per F in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Utilizzando la semicontinuità inferiore di F, si trova che
$$\inf_{\mathbb{X}} F \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \inf_{\mathbb{X}} F.$$
Allora tutte le disuguaglianze sono uguaglianze e la tesi segue immediatamente. □

Definizione 2.1.5 (Coercività)**.**
Sia $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Si dice che F è coerciva se per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme
$$K_M \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid F(x) \leq M\}$$
è relativamente compatto rispetto a $\mathcal{S}$ (vedi 2.1.3).

Proposizione 2.1.6. *Sia $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Consideriamo le seguenti proprietà:*

1. *F è coerciva e semicontinua inferiormente rispetto a $\mathcal{S}$;*
2. *per ogni $M \in \mathbb{R}$ il sottolivello*
$$K_M \coloneqq \{x \in \mathbb{X} \mid F(x) \leq M\}$$
è compatto relativamente a $\mathcal{S}$.

La prima condizione implica la seconda. Supponiamo che la nozione di convergenza $\mathcal{S}$ goda della proprietà di passaggio alle sottosuccessioni (cioè se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_∞ nel senso della definizione 2.1.1 lo stesso vale per ogni sottosuccessione) e di unicità del limite. Allora la seconda condizione implica la prima.

Dimostrazione. Supponiamo che F sia coerciva e semicontinua inferiormente. Siano $M \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_n$ una successione in K_M. Dalla relativa compattezza di K_M deduciamo che esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente a x_∞; dalla semicontinuità inferiore di F deduciamo che
$$F(x_\infty) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) \leq M;$$

in particolare $x_\infty \in K_M$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $M \in \mathbb{R}$ il sottolivello K_M sia compatto; in particolare, K_M è relativamente compatto. Dobbiamo provare che F è semicontinua inferiormente. Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ che converge a x_∞; supponiamo per assurdo che

$$F(x_\infty) > \liminf_{n\to+\infty} F(x_n).$$

Poniamo

$$l := \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$$

e notiamo che $l < +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $l + \varepsilon < F(x_\infty)$; esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ contenuta in $K_{l+\varepsilon}$. Per compattezza, esiste una ulteriore sottosuccessione $(x_{n_{k_h}})_h$ che converge ad un elemento in $K_{l+\varepsilon}$. Per le proprietà di passaggio alle sottosuccessioni e di unicità del limite, tale sottosuccessione converge a x_∞, cioè

$$F(x_\infty) \le l + \varepsilon < F(x_\infty).$$

□

Osservazione 2.1.7. Dato un funzionale semicontinuo inferiormente, la coercività implica la compattezza di tutti i sottolivelli (vedi 2.1.6); allora deduciamo le ipotesi del teorema di Weierstrass (vedi 2.1.4). Generalmente si verifica che F è semicontinuo inferiormente e coercivo. Ad essere precisi, è possibile indebolire la richiesta di coercività richiedendo che esista almeno un sottolivello relativamente compatto e non vuoto.

Esempio 2.1.8. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto (eventualmente $\Omega = \mathbb{R}^n$) e $F : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ una funzione. Ricordando che un insieme K è relativamente compatto in Ω se e solo se la sua chiusura in $\mathbb{R}^n$ è contenuta in Ω ed è limitata, è facile verificare che i seguenti fatti sono equivalenti:

- F è coerciva;
- per ogni successione $(x_n)_n$ in Ω tale che $F(x_n) \to +\infty$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(x_n; \partial\Omega) = 0.$$

Il teorema di Weierstrass è l'enunciato chiave in questo approccio (il metodo diretto); è un risultato tanto semplice quanto profondo perchè mette in luce le due ipotesi essenziali che garantiscono l'esistenza del minimo: servono proprietà di **compattezza** su $\mathbb{X}$ e di **semicontinuità inferiore** su F (anche molto blande, ma compatibili). L'introduzione di queste semplici idee ha aperto la strada al Calcolo delle Variazioni, rivoluzionando l'approccio allo studio dei problemi di minimo.

Geodetiche in uno spazio metrico

Presentiamo un primo esempio di applicazione del metodo diretto, basato su un risultato fondamentale di compattezza, il teorema di Ascoli-Arzelà.

Sia dato uno spazio metrico compatto $(\mathbb{X}; d)$. Sia $\gamma : [0, 1] \to K$ una funzione continua. Ricordiamo che la lunghezza di una curva γ è definita come

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i); \gamma(t_{i-1})) \;\middle|\; 0 = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = 1 \right\}.$$

Ricordiamo anche il seguente enunciato.

Lemma 2.1.9. *Sia $\gamma : [0,1] \to K$ una curva di lunghezza finita l. Esiste un omeomorfismo $\sigma : [0,1] \to [0,1]$ che fissa gli estremi ed è tale che $\gamma \circ \sigma$ è l-lipschitziana. Inoltre, è ovvio che $L(\gamma) = L(\gamma \circ \sigma)$.*

Proposizione 2.1.10. *Siano x_0, x_1 punti in K tali che esiste una curva γ di lunghezza finita l che connette x_0 e x_1 (ovvero $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$). Esiste una curva di minima lunghezza che connette x_0 e x_1.*

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$\mathbb{X} \coloneqq \left\{\theta \in C^0([0,1]; K) \mid \theta(0) = x_0,\ \theta(1) = x_1,\ \theta \text{ è } l\text{-lipschitziana}\right\}.$$

Date $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{X}$, poniamo

$$D(\theta_1; \theta_2) \coloneqq \sup_{x \in K} d(\theta_1(x); \theta_2(x)).$$

Naturalmente $(\mathbb{X}; D)$ è uno spazio metrico ed è compatto per il teorema di Ascoli-Arzelà. Notiamo che il funzionale $L : \mathbb{X} \to [0, +\infty)$ è semicontinuo inferiormente: infatti, fissata una partizione $\mathcal{P}$, diciamo $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = 1$ di $[0,1]$, il funzionale

$$L_{\mathcal{P}}(\theta) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i); \gamma(t_{i-1}))$$

è continuo in $(\mathbb{X}; D)$; allora L è semicontinuo inferiormente perchè è estremo superiore di funzionali continui. Per ipotesi $\mathbb{X}$ è non vuoto; per il teorema di Weierstrass (vedi 2.1.4), esiste $\theta_0 \in \mathbb{X}$ che minimizza L in tale spazio. Per concludere, notiamo che se θ è una curva che connette x_0 e x_1, vale che

- se $L(\theta) > l$, allora $L(\theta) \ge L(\theta_0)$;
- se $L(\theta) \le l$, esiste una riparametrizzazione σ tale che $\theta \circ \sigma \in \mathbb{X}$ e $L(\theta \circ \sigma) = L(\theta)$ (vedi 2.1.9). Segue che $L(\theta) \ge L(\theta_0)$.

□

2.1.2 Compattezza e semicontinuità inferiore negli spazi di Banach

Sia assegnato $\mathbb{E}$ uno spazio normato; denotiamo con $\mathbb{E}'$ il suo duale topologico dotato della norma operatoriale. Ricordiamo il seguente teorema fondamentale di compattezza, che presentiamo nella versione sequenziale (perchè ciò è sufficiente ai nostri scopi). Introdurremo le dovute generalizzazione quando sarà necessario.

Teorema 2.1.11 (Banach-Alaoglu sequenziale).
Supponiamo che $\mathbb{E}$ sia separabile. Allora la palla unitaria chiusa è compatta rispetto alla convergenza debole. Equivalentemente, se $(L_n)_n$ è una successione limitata in $\mathbb{E}'$ esistono una sottosuccessione $(L_{n_k})_k$ ed un elemento $L_\infty \in \mathbb{E}'$ tale che*

- $\|L_\infty\|_{\mathbb{E}'} \le \liminf_{k\to+\infty} \|L_{n_k}\|_{\mathbb{E}'}$,
- $L_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} L_\infty$, *cioè per ogni $x \in \mathbb{E}$ vale che $L_{n_k}(x) \to L_\infty(x)$ (come successione di numeri reali).*

Corollario 2.1.12. *Supponiamo che $\mathbb{E}$ sia riflessivo e separabile. La palla unitaria chiusa in $\mathbb{E}$ è sequenzialmente compatta rispetto alla convergenza debole. Equivalentemente, se $(x_n)_n$ è una successione limitata in $\mathbb{E}$, esistono una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ed un elemento x_∞*

- $\|x_\infty\|_{\mathbb{E}} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|x_{n_k}\|_{\mathbb{E}}$,
- $x_{n_k} \rightharpoonup x_\infty$, *cioè per ogni $L \in \mathbb{E}'$ vale che $L(x_{n_k}) \to L(x_\infty)$ (come successione di numeri reali).*

Per le dimostrazioni di 2.1.11 e 2.1.12, si veda [1].

Nel seguito considereremo le nozioni di compattezza, relativa compattezza, coercività e semicontinuità inferiore relativamente alle nozioni di convergenza debole o debole* (a seconda dei casi).

Proposizione 2.1.13. *Supponiamo che $\mathbb{E}$ sia riflessivo e separabile. Sia $F : \mathbb{E} \to [0, +\infty]$ un funzionale. Sono fatti equivalenti:*

1. *F è debolmente coercivo, cioè i sottolivelli sono relativamente compatti rispetto alla convergenza debole;*
2. *per ogni successione $(x_n)_n$ in $\mathbb{E}$ tale che $\|x_n\|_{\mathbb{E}} \to +\infty$ vale che $F(x_n) \to +\infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo che F sia debolmente coercivo; sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{E}$ tale che $\|x_n\|_{\mathbb{E}} \to +\infty$. Se fosse $\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) < +\infty$, esisterebbero una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che $F(x_{n_k}) \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per coercività, esisterebbe una ulteriore sottosuccessione (non rinominata) ed un punto $x_\infty \in \mathbb{E}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x_\infty$. Tuttavia, questo è assurdo perchè $(x_{n_k})_k$ è una successione debolmente convergente in $\mathbb{E}$ e non è limitata in norma.

Viceversa, sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{E}$ tale che $F(x_n) \leq M < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ipotesi, deve valere che $(x_n)_n$ è limitata in norma. Per il corollario 2.1.12, esistono una sottosuccessione (non rinominata) e un elemento x_∞ in $\mathbb{E}$ tale che $x_n \rightharpoonup x_\infty$. Quindi F è debolmente coercivo. □

Ricordiamo il seguente risultato.

Teorema 2.1.14 (Teorema di rappresentazione di Riesz - 1)**.**
Siano dati uno spazio mensurale $(\mathbb{X}; \mathcal{M}; \mu)$ σ-finito e $p \in [1, +\infty)$. Detto $p' \in (1, +\infty]$ l'esponente coniugato di p, definiamo la mappa $J : L^{p'}(\mathbb{X}) \to (L^p(\mathbb{X}))'$ tale che per ogni $g \in L^{p'}(\mathbb{X})$ per ogni $f \in L^p(\mathbb{X})$ vale che

$$J_g(f) := \int_\Omega fg \, d\mu.$$

J è un'isometria lineare bigettiva; in particolare il duale di $L^p(\mathbb{X})$ è isometrico a $L^{p'}(\mathbb{X})$. Si denota con

$$< g, f >:= J_g(f) = \int_\Omega fg \, d\mu$$

l'accoppiamento di dualità. Segue che se $p \in (1, +\infty)$, $L^p(\mathbb{X})$ è uno spazio di Banach riflessivo.

Osservazione 2.1.15. Ricordiamo che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto, $\mathcal{M}$ è la σ-algebra dei misurabili secondo Lebesgue in Ω e μ è la misura di Lebesgue su $\mathcal{M}$, lo spazio $L^p(\Omega)$ è separabile per $p \in [1, +\infty)$. In particolare, se $p \in (1, +\infty)$ vale il corollario 2.1.12. Se $p = +\infty$ vale, invece, il teorema 2.1.11 (infatti $L^1(\Omega)$ è separabile).

2.2 Convergenza debole e debole* negli spazi di Sobolev

Gli spazi di Sobolev costituiscono l'ambientazione naturale per la definizione di funzionali integrali dipendenti dalle derivate. Inoltre, hanno buone proprietà di compattezza; vogliamo introdurre una nozione di convergenza che si presti bene allo studio dei problemi variazionali, che preservi la compattezza e che renda semicontinui inferiormente molti funzionali.

Definizione 2.2.1 (Convergenza debole e debole* in $W^1, p(\Omega)$)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1, +\infty]$, $(u_n)_n$ e u in $W^{1,p}(\Omega)$.

- Se $p < +\infty$, diremo che $(u_n)_n$ converge debolmente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ se $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ fortemente e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $(L^p(\Omega))^d$; scriveremo $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.
- Se $p = +\infty$, diremo che $(u_n)_n$ converge debole* a u in $W^{1,\infty}(\Omega)$ se $u_n \to u$ uniformemente e $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ debole * in $(L^\infty(\Omega))^d$; scriveremo $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Osservazione 2.2.2. Possiamo prendere 2.2.1 come definizione della convergenza debole e debole* negli spazi di Sobolev, dal momento che lo spazio $(W^{1,p}(\Omega))'$ non ha una descrizione semplice. Inoltre, il seguente teorema mostra che la definizione 2.2.1 può essere indebolita; tuttavia, abbiamo scelto di presentarla nella forma suddetta per comodità e semplicità espositiva. Inoltre questa scelta basta ai nostri scopi ed è motivata dagli esempi seguenti.

Teorema 2.2.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato di classe C^1, $p \in (1, +\infty)$, $(u_n)_n$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e u una funzione in $L^p(\Omega)$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$;*
2. *$u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $L^p(\Omega)$;*
3. *$u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$ e $\sup_n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$;*
4. *$u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$ e $\sup_n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} + \infty$.*

Dimostrazione. **1 $\Rightarrow$ 2** L'implicazione è ovvia. **2 $\Rightarrow$ 3)** Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, dalla definizione 2.2.1 segue che $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $(L^p(\Omega))^d$; in particolare $(\nabla u_n)_n$ è limitata in norma in $L^p(\Omega)$.

3 $\Rightarrow$ 4) Se $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$, allora $(u_n)_n$ è limitata in norma in $L^p(\Omega)$. Dall'ipotesi, allora, segue che $(u_n)_n$ è limitata in norma in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema di immersione compatta (vedi 6.4.48), esistono una sottosuccessione $(u_{n_h})_h$ e una funzione v tale che $u_{n_h} \to v$ fortemente in $L^p(\Omega)$. Siccome $u_{n_h} \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$, segue che $v = u$. Per la precisione, abbiamo provato che ogni sottosuccessione ammette una ulteriore sottosuccessione che converge fortemente a u in $L^p(\Omega)$. Concludiamo che tutta la successione $(u_n)_n$ converge a u fortemente in $L^p(\Omega)$.

4 $\Rightarrow$ 1) Per il teorema di Banach-Alaoglu sequenziale (vedi 2.1.11), esistono una sottosuccessione $(\nabla u_{n_h})_h$ e una funzione v tale che $\nabla u_{n_h} \rightharpoonup v$ debole in $(L^p(\Omega))^d$. Presa una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_\Omega u_{n_h} \nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega \nabla u_{n_h} \varphi \, dx.$$

Passando al limite troviamo che

$$\int_\Omega u \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi v \, dx.$$

Precisiamo che il passaggio al limite al right hand side segue dal fatto che $\nabla u_{n_h} \rightharpoonup \nabla u$ in $(L^p(\Omega))^d$, quello al left hand side è giustificato perchè $u_{n_h} \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$, quindi in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Deduciamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Abbiamo mostrato che ogni sottsuccessione ammette una ulteriore sottosuccessione che converge a u debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Concludiamo che tutta la successione $(u_n)_n$ converge a u in $W^{1,p}(\Omega)$. □

Osservazione 2.2.4. Nel contesto del teorema 2.2.3, se $p > d$ la convergenza forte in $L^p(\Omega)$ diventa uniforme in Ω per il teorema di Morrey (vedi 6.4.41). In questo modo è possibile trattare anche il caso in cui $p = +\infty$: infatti lo spazio $W^{1,+\infty}(\Omega)$ si immerge con continuità in $W^{1,q}(\Omega)$, scegliendo q abbastanza grande in modo che sia maggiore di d. Allora è possibile ottenere un enunciato analogo al teorema 2.2.3 nel caso in cui $p = +\infty$.

Corollario 2.2.5. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1 e $p \in (1, +\infty)$. Gli insiemi limitati in $W^{1,p}(\Omega)$ sono relativamente compatti rispetto alla convergenza debole (vedi 2.2.1). Equivalentemente, se $(u_n)_n \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ una successione limitata, esistono una sottosuccessione (non rinominata) e una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, cioè*

- *$u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$,*
- *$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $(L^p(\Omega))^d$*

Dimostrazione. Per ipotesi vale che

$$\sup_n \|u_n\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} < +\infty.$$

Per il teorema di Banach-Alaoglu sequenziale (vedi 2.1.11), esistono una sottosuccessione (non rinominata) e una funzione u tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$. Notiamo che è verificata la terza condizione del teorema 2.2.3; deduciamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $(L^p(\Omega))^d$. □

Osservazione 2.2.6. Il corollario 2.2.5 e il teorema 2.2.3 caratterizzano la relativa compattezza rispetto alla convergenza debole negli spazi di Sobolev. Nelle stesse ipotesi su Ω del corollario 2.2.5, si può ottenere un'analoga caratterizzazione nel caso $p = +\infty$: data una successione $(u_n)_n$ limitata in $W^{1,\infty}(\Omega)$, scegliamo $q \in (d, +\infty)$ a caso; naturalmente $W^{1,\infty}(\Omega)$ si immerge in maniera continua in $W^{1,q}(\Omega)$. Per il teorema di Morrey (vedi 6.4.41), esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $u \in L^q(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega}$. Deduciamo che $u \in L^\infty(\Omega)$. Per il teorema di Banach-Alaoglu sequenziale (vedi 2.1.11) esistono una ulteriore sottosuccessione (non rinominata) ed una funzioni $v \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tale che $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ debole * in $L^\infty(\Omega)$. Si verifica facilmente che $v = \nabla u$ in senso debole, quindi $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Proposizione 2.2.7. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1, $p \in (1, +\infty)$, $\mathbb{X} \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ un sottoinsieme chiuso rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$ (eventualmente $\mathbb{X} = W^{1,p}(\Omega)$) e $F : \mathbb{X} \to (-\infty, +\infty]$ un funzionale. Sono fatti equivalenti:*

1. *F è debolmente coercivo, nel senso che tutti i sottolivelli sono relativamente compatti rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$;*

2. *per ogni successione $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}$ tale che $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$ vale che $|F(u_n)| \to +\infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo che F sia debolmente coercivo. Data $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}$ tale che $F(u_n) \leq M < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $u \in \mathbb{X}$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Dalla definizione 2.2.1 segue che $(u_n)_n$ è una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Dunque, se $(u_n)_n$ è una successione in $\mathbb{X}$ tale che $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$, deve valere che $F(u_n) \to +\infty$.

Viceversa, sia $(u_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ tale che

$$\sup_n F(u_n) < +\infty.$$

Per ipotesi, esiste una sottosuccessione (non rinominata) tale che

$$\sup_n \|u_n\|_{1,p,\Omega} < +\infty.$$

A meno di estrarre una ulteriore sottosuccessione, per il corollario 2.2.5, esiste un elemento $u \in W^{1,p}$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Essendo $\mathbb{X}$ chiuso rispetto alla convergenza debole, deduciamo che $u \in \mathbb{X}$. Abbiamo mostrato che ogni sottolivello è relativamente compatto in $\mathbb{X}$ rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$. □

Osservazione 2.2.8. Se $p = +\infty$ è immediato adattare la proposizione 2.2.7 al caso di $W^{1,\infty}(\Omega)$.

2.3 Norme equivalenti negli spazi di Sobolev

Ricordiamo la disuguaglianza di Poincarè classica.

Proposizione 2.3.1 (Disuguaglianza di Poincarè)**.**
Siano $d \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ e Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$ limitato. Esiste una costante $c(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c(d; p; \Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Notiamo che è sufficiente mostrare la disuguaglianza per funzioni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ e poi estenderla a tutte le funzioni in $W_0^{1,p}(\Omega)$ per densità.

Step 1: Sia $u \in C_c^1(\Omega)$ e supponiamo che $\Omega \subseteq (-M, M)^d$. Ovviamente, possiamo estendere u ad una funzione in $C_c^1((-M, M)^d)$ in modo che valga 0 fuori da Ω. Denotiamo con $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ le variabili da cui dipende u. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni $x \in [-M, M]$ vale che

$$u(x; y) = \int_{-M}^{x} \frac{\partial u}{\partial x}(t; y)\, dt.$$

Segue che

$$|u(x; y)| \leq \int_{-M}^{M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t; y) \right| dt.$$

Integrando entrambi i membri rispetto a $(x; y) \in [-M, M] \times [-M, M]^{d-1}$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{[-M,M]^d} |u(x;y)| \ dxdy \\ &\leq 2M \int_{[-M,M]^{d-1}} \left(\int_{-M}^{M} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t;y) \right| \ dt \right) \ dy \\ &= 2M \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

Osservando che M dipende dall'ampiezza di Ω, abbiamo ottenuto la disuguaglianza nel caso $p = 1$.

Step 2: Analizziamo, invece, il caso in cui $p > 1$. Fissato $r > 0$ definiamo la funzione $\varphi_r(\sigma) := |\sigma|^r \sigma$; notiamo che $\varphi_r \in C^1(\mathbb{R})$. Data $u \in C_c^\infty(\Omega)$, vale che $\varphi_r \circ u \in C_c^1(\Omega)$. Per quanto mostrato nel passo precedente, vale che

$$\|\varphi_r \circ u\|_{L^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \left\| \frac{\partial(\varphi_r \circ u)}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} ,$$

per una costante $C(\Omega)$ opportuna (dipendente solo da Ω). Notiamo che

$$\|\varphi_r \circ u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^{r+1} \ dxdy = \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} .$$

Osserviamo che $\varphi_r'(\sigma) = (r+1) |\sigma|^r$; allora segue che

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial(\varphi_r \circ u)}{\partial x} \right\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega \left| \varphi_r'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ dxdy \\ &= (r+1) \int_\Omega |u|^r \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ dxdy \\ &\leq (r+1) \left(\int_\Omega |u|^{r+1} \ dxdy \right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{r+1} \ dxdy \right)^{\frac{1}{r+1}} \\ &= (r+1) \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^{r+1}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Precisiamo che abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{r+1}{r}$ e $r+1$. Otteniamo che

$$\|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^{r+1} \leq C(\Omega)(r+1) \|u\|_{L^{r+1}(\Omega)}^r \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^{r+1}(\Omega)} ;$$

semplificando e scegliendo $r = p - 1$ (ricordiamo che $p > 1$), abbiamo che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq pC(\Omega) \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

$\square$

Osservazione 2.3.2. La dimostrazione data della disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) non ha nulla a che vedere con la teoria degli spazi di Sobolev, infatti abbiamo usato soltanto il teorema fondamentale del calcolo integrale. Ad essere precisi abbiamo mostrato un risultato più forte, cioè che è possibile sostituire la norma di tutto il gradiente con una qualsiasi delle derivate. Per essere precisi, la dimostrazione data è valida anche nel caso in cui Ω non sia limitato, ma ha soltanto una proiezione su un asse coordinato che sia limitata (l'estensione al caso in cui la proiezione su una retta qualsiasi sia limitata è immediata).

Per la disuguaglianza di Poincarè, se $p \in [1, +\infty)$ e Ω è un aperto limitato, la quantità $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ è una norma in $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente alla norma di Sobolev $\|u\|_{1,p,\Omega}$. Questo principio è molto utile nelle applicazione e ne forniremo una versione molto più generale.

Teorema 2.3.3 (Norme equivalenti in $W^{k,p}(\Omega)$).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto connesso, limitato e di classe C^1, $k \in \mathbb{N}^+$, $p \in [1, +\infty)$, $\mathbb{E}$ uno spazio di Banach e $T : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{E}$ un operatore lineare e continuo. Denotiamo con $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ l'insieme dei polinomi in d variabili a coefficienti reali di grado al più $k-1$. Supponiamo che

$$\ker(T) \cap \mathbb{R}^{k-1}[x] = \{0\}.$$

Allora

$$\Phi(u) := \|Tu\|_{\mathbb{E}} + \left\|\nabla^k u\right\|_{L^p(\Omega)}$$

è una norma su $W^{k,p}(\Omega)$ equivalente alla norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.

Dimostrazione. Φ è ovviamente una seminorma; sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tale che $\Phi(u) = 0$; segue che $Tu = 0$ e $\nabla^k u = 0$. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 6.2.3), essendo Ω connesso, u è un polinomio di grado al più $k-1$. Dalle ipotesi deduciamo che $u = 0$, ovvero che Φ è una norma. Per la linearità e continuità di T, è banale dedurre che esiste una costante $C_1 > 0$ tale che per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si ha che

$$\Phi(u) \leq C_1 \|u\|_{k,p,\Omega}.$$

Dobbiamo mostrare che esiste una costante $C_2 > 0$ tale che per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u\|_{k,p,\Omega} \leq C_2 \Phi(u).$$

Procediamo per assurdo. Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista $u_n \in W^{k,p}(\Omega)$ tale che

$$\|u_n\|_{k,p,\Omega} > n\Phi(u_n).$$

Per l'omogeneità delle norme, si può assumere che $\|u_n\|_{k,p,\Omega} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; allora $\Phi(u_n) \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare $T(u_n) \to 0$ in $\mathbb{E}$ e $\nabla^k u_n \to 0$ fortemente in $L^p(\Omega)$. Abbiamo che $(u_n)_n$ è una successione limitata in $W^{k,p}(\Omega)$; a meno di passare a sottosuccessioni (non rinominate), si può assumere che $\nabla^i u_n \to \nabla^i u$ fortemente in $L^p(\Omega)$ per ogni $i \in \{1; \dots; k-1\}$ (è una versione iterata del teorema di immersione di Sobolev 6.4.43). Nel nostro caso, però, abbiamo che $u_n \to u$ fortemente in $W^{k,p}(\Omega)$ e $\nabla^k u = 0$. Per il lemma di Du Bois-Reymond (vedi 6.2.3), u è un polinomio di grado al più $k-1$. Abbiamo dedotto che $u_n \to u$ fortemente in $W^{k,p}(\Omega)$. Per continuità di T, deduciamo che $T(u_n) \to T(u) = 0$ in $\mathbb{E}$. Allora $u \in \ker T \cap \mathbb{R}_{k-1}[x]$; segue che $u = 0$. Abbiamo che

$$1 = \lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_{k,p,\Omega} = \|u\|_{k,p,\Omega} = 0,$$

che è chiaramente assurdo. $\square$

Il seguente risultato mostra come costruire una proiezione lineare sullo spazio dei polinomi.

Lemma 2.3.4. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, $p \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}^+$ e $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ lo spazio dei polinomi di grado al più $k-1$ contenuto in $W^{k,p}(\Omega)$. Esiste un'applicazione lineare e continua $P : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ tale che*

- *$P(W^{k,p}(\Omega)) \subseteq \mathbb{R}_{k-1}[x]$,*
- *per ogni $u \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ vale che $P_u = u$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ è un sottospazio di dimensione finita di $W^{k,p}(\Omega)$. Sia $\{v_1; \ldots; v_n\}$ una base di $\mathbb{R}_{k-1}[x]$; dato $u \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$ esistono e sono unici dei coefficienti tali che

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Per ogni $i \in \{1; \ldots; n\}$ definiamo $\varphi_i : \mathbb{R}_{k-1}[x] \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi_i(u) = \lambda_i$. L'applicazione φ_i è continua rispetto alla norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ (infatti, tutte le norme in $\mathbb{R}_{k-1}[x]$ sono equivalenti). Per il teorema di Hahn-Banach, φ_i si estende ad un'applicazione lineare continua definita su $W^{k,p}(\Omega)$. Definiamo

$$P_u \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u) v_i.$$

É immediato verificare che

- $P : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ è lineare ed è continua,
- $P_u \in R_{k-1}[x]$ ed è l'identità su $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

□

Osservazione 2.3.5. Nel contesto del lemma 2.3.4, se $k = 1$ possiamo scrivere esplicitamente una proiezione sulle funzioni costanti. Basta porre

$$P_u = \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x)\, dx.$$

Corollario 2.3.6 (Disuguaglianza di Poincarè generalizzata)**.**
Nel contesto del teorema 2.3.3, sia $\Lambda : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{E}$ un operatore lineare e continuo tale che $\mathbb{R}_{k-1}[x] \subseteq \ker(\Lambda)$. Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ vale che

$$\|\Lambda u\|_{\mathbb{E}} \leq C \left\|\nabla^k u\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Sia $P : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ la proiezione data dal lemma 2.3.4 (osserviamo che P è lineare e continua anche prendendo $W^{k,p}(\Omega)$, dotato della sua norma, come spazio di arrivo). Per il teorema 2.3.3, la mappa

$$\Phi(u) \coloneqq \|P_u\|_{k,p,\Omega} + \left\|\nabla^k u\right\|_{L^p(\Omega)}$$

è una norma equivalente in $W^{k,p}(\Omega)$. Dalla linearità e continuità di Λ (rispetto alla norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$), si deduce che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ vale che

$$\|\Lambda u\|_{k,p,\Omega} \leq C\Phi(u).$$

Per le ipotesi su $\ker \Lambda$, per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ vale che $\Lambda u = \Lambda(u - P_u)$. Segue che

$$\|\Lambda u\|_{\mathbb{E}} \leq C\Phi(u - P_u) = C\,\|P_{u-P_u}\|_{k,p,\Omega} + C\,\left\|\nabla^k u\right\|_{L^p(\Omega)} = C\,\left\|\nabla^k u\right\|_{L^p(\Omega)},$$

essendo $P_{u-P_u} = P_u - P_u = 0$. □

É possibile utilizzare il corollario 2.3.6 per ottenere una nuova dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1); vogliamo presentare altre utilissime disuguaglianze integrali.

Corollario 2.3.7 (Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger).
Nel contesto del corollario 2.3.6, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ poniamo

$$u_\Omega := \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx.$$

Esiste una costante $c(d; p; \Omega)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c(d; p; \Omega)\, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. L'operatore $\Lambda : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ tale che $\Lambda(u) := u - u_\Omega$ è lineare e continuo; inoltre $\ker(\Lambda)$ contiene le costanti. Si conclude applicando il corollario 2.3.6. □

Corollario 2.3.8 (Disuguaglianza di Poincarè-Sobolev-Wirtinger).
Nel contesto del corollario 2.3.6, se $p < d$, per ogni $q \in [1, p^*]$ esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vale che

$$\|u - u_\Omega\|_{L^q(\Omega)} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

avendo posto

$$u_\Omega := \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\ dx.$$

Dimostrazione. Per il teorema di immersione (vedi 6.4.43), l'operatore $\Lambda : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ tale che $\Lambda(u) := u - u_\Omega$ è lineare e continuo; inoltre $\ker(\Lambda)$ contiene le costanti. Si conclude applicando il corollario 2.3.6. □

Alcuni esempi significativi

Esempio 2.3.9. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1, $g : \Omega \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana e $p \in (1, +\infty)$. Ricordando che ogni funzione in $L^p(\Omega)$ ha un rappresentante boreliano e che la composizione di funzioni boreliane è una funzione boreliana (quindi misurabile), per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ possiamo ben definire il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[|\nabla u|^p + g(x; u)\right]\ dx.$$

Supponiamo che per quasi ogni g valgano le seguenti ipotesi:

- per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che $g(x; \cdot) : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ è semicontinua inferiormente;
- esiste una costante $C > 0$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha che che per ogni $u \in \mathbb{R}$ vale che $g(x; u) \geq C\,|u|^p$.

Allora F coerciva e semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$. In particolare, F ha minimo in $W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Iniziamo verificando la debole semicontinuità inferiore. Siano $(u_n)_n$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Dobbiamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

A meno di passare a sottosuccessioni, possiamo supporre che il limite inferiore sia un limite. Poichè $u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$, a meno di ulteriori sottosuccessioni, si può anche supporre che $u_n \to u$ puntualmente per quasi ogni $x \in \Omega$. Utilizzando il lemma di Fatou, la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole negli spazi di Banach (vedi [1]) e le proprietà di g, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} F(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \; dx + \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x; u_n) \; dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^p \; dx + \int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} g(x; u_n) \; dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^p \; dx + \int_\Omega g(x; u) \; dx \\
&= F(u)
\end{aligned}$$

Dobbiamo mostrare che F è debolmente coercivo in $W^{1,p}(\Omega)$. Per la proposizione 2.2.7, possiamo equivalentemente mostrare che se $(u_n)_n$ è una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|u_n\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$, allora vale che $F(u_n) \to +\infty$. Per le ipotesi su g, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$F(u_n) \geq \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^p + C\,|u_n|^p\right] \; dx;$$

allora, se $\|u_n\|_{1;p;\Omega} \to +\infty$, deduciamo che $F(u_n) \to +\infty$. □

In generale, l'ipotesi che $g(x; u) \geq 0$ senza ipotesi di crescita su g non garantisce l'esistenza del minimo per il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[|\nabla u|^p + g(x; u)\right] \; dx$$

in $W^{1,p}(\Omega)$. Basta considerare il caso in cui $g(x; u) := e^u$. Se $u_n := -n$, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} F(-n) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega e^{-n} \; dx = 0.$$

Tuttavia, è facile mostrare che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vale che $F(u) > 0$.

Esempio 2.3.10. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione boreliana tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ la mappa $g(x; \cdot)$ è semicontinua inferiormente e $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[|\nabla u|^p + g(x; u)\right] \; dx,$$

definito in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$. Supponiamo che esistano costanti $c_0, c_1 \geq 0$ e $q \in [1,p)$ tali che per quasi ogni $x \in \Omega$ per ogni $u \in \mathbb{R}$ vale che

$$g(x;u) \geq -c_0 - c_1 \left|u\right|^q .$$

Allora F è ben definito e ammette minimo.

Dimostrazione. Innanzitutto dobbiamo mostrare che il funzionale F è ben definito. Applicando la disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) e il fatto che $u - u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$ (vedi 6.4.58), deduciamo che per ogni $u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ vale che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x;u)\, dx &\geq -\int_\Omega [c_0 + c_1 \left|u\right|^q]\, dx \\
&= -c_0 \mathscr{L}(\Omega) - c_1 \left\|u\right\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&\geq -c_0 \mathscr{L}(\Omega) - \Big(c_1 \left\|u_0\right\|_{L^q(\Omega)} + c_1 \left\|u_0 - u\right\|_{L^q(\Omega)}\Big)^q \\
&\geq -c_0 \mathscr{L}(\Omega) - c_2 - c_3 \left\|\nabla(u_0 - u)\right\|^q_{L^p(\Omega)} \\
&\geq -c_0 \mathscr{L}(\Omega) - c_2 - c_4 \left\|\nabla u\right\|^q_{L^p(\Omega)} = -C' - C'' \left\|\nabla u\right\|^q_{L^p(\Omega)} ,
\end{aligned}$$

a meno di rinominare opportunamente le costanti. Deduciamo che

$$F(u) \geq \left\|\nabla u\right\|^p_{L^p(\Omega)} - C'' \left\|\nabla u\right\|^q_{L^p(\Omega)} - C',$$

da cui segue che il funzionale F è ben definito in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$.

Innanzitutto osserviamo che $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ è uno spazio debolmente chiuso in $W^{1,p}(\Omega)$. Infatti, se $(u_n)_n$ è una successione in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$, per definizione (vedi 2.2.1) $u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$. Per continuità della traccia, si ha che $\mathrm{Tr}(u_n) \to \mathrm{Tr}(u)$ fortemente in $L^p(\partial\Omega)$, cioè $u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$.

Mostriamo che F è debolmente coercivo in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$. Per la proposizione 2.2.7, è sufficiente mostrare che se $(u_n)_n$ è una successione in $\mathbb{X}$ tale che $\left\|u_n\right\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$, allora $F(u_n) \to +\infty$. Utilizzando la disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) e il fatto che $u_n - u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$ (vedi 6.4.58), otteniamo che

$$\begin{aligned}
\left\|u_n\right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left\|u_0\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|u_n - u_0\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left\|u_0\right\|_{L^p(\Omega)} + C \left\|\nabla u_n - \nabla u_0\right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left\|u_0\right\|_{L^p(\Omega)} + C \left\|\nabla u_0\right\|_{L^p(\Omega)} + C \left\|\nabla u_n\right\|_{L^p(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Allora, se $\left\|u_n\right\|_{1,p,\Omega} \to +\infty$, deve necessariamente valere che $\left\|\nabla u_n\right\|_{L^p(\Omega)} \to +\infty$. Vale che

$$F(u_n) \geq \left\|\nabla u_n\right\|^p_{L^p(\Omega)} - C'' \left\|\nabla u_n\right\|^q_{L^p(\Omega)} - C';$$

essendo $p > q$, segue che $F(u_n) \to +\infty$, cioè F è coercivo.

Vogliamo mostrare che F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$. Sia $(u_n)_n$ una successione in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ che converge debolmente a u. Dobbiamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(u_n).$$

Per definizione, vale che $u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in $L^p(\Omega)$. A meno di estrarre una sottosuccessione, si può supporre che il limite inferiore sia un limite. Esiste una ulteriore sottosuccessione, non rinominata, tale che $u_n(x) \to u(x)$

puntualmente per quasi ogni $x \in \Omega$. Per la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole della norma in uno spazio di Banach, vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \ dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx.$$

Quindi, è sufficiente mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x;u_n) \ dx \geq \int_\Omega g(x;u) \ dx.$$

Notiamo che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $u \in \mathbb{R}$ si ha

$$g(x;u) + c_0 + c_1 |u|^q \geq 0;$$

Applicando il lemma di Fatou, le ipotesi su g e il fatto che se $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ allora la convergenza è anche in $L^q(\Omega)$ ($q < p$ e $\mathscr{L}(\Omega) < +\infty$), troviamo che

$$\begin{aligned}\int_\Omega [g(x;u) + c_0 + c_1 |u|^q] \ dx &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega [g(x;u_n) + c_0 + c_1 |u_n|^q] \ dx \\ &= \left[\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x;u_n) \ dx\right] + \int_\Omega [c_0 + c_1 |u|^q] \ dx.\end{aligned}$$

Semplificando i termini ($\|u\|_{L^q(\Omega)} < +\infty$) si ottiene la disuguaglianza desiderata.

Applicando il teorema di Weierstrass (vedi 2.1.4), si deduce che F ha minimo in $W^{1,p}_{u_0}(\mathbb{X})$. □

Notiamo che se $q > p$ e λ è una costante positiva, il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega [|\nabla u|^p - \lambda |u|^q] \ dx$$

è inferiormente illimitato in $C_c^\infty(\Omega)$. Infatti, per ogni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che u non sia la funzione identicamente nulla, consideriamo $u_n := nu$. Essendo $q > p$, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{n\to+\infty} n^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \lambda n^q \|u\|^q_{L^q(\Omega)} = -\infty.$$

Se, invece, $p = q$ l'inferiore limitatezza e l'esistenza del minimo per il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega [|\nabla u|^p - \lambda |u|^q] \ dx$$

in $W^{1,p}_0(\Omega)$ dipende da λ e dalla grandezza delle costanti nella disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) e nei teoremi di immersione di Sobolev (vedi 6.4.57).

Esempio 2.3.11. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1 e $g \in L^2(\Omega)$. Notiamo che il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + gu\right] \ dx$$

è ben definito in $W^{1,2}(\Omega)$. Osserviamo che se $\int_\Omega g \ dx \neq 0$, F non ha minimo in $W^{1,2}(\Omega)$ perchè l'estremo inferiore è $-\infty$: notiamo che per ogni $n \in \mathbb{Z}$, se u_n è la funzione che vale costantemente n, allora

$$F(n) = n \int_\Omega g \ dx$$

che tende a $-\infty$ se n tende a $\pm\infty$, a seconda del segno di $\int_\Omega g\ dx$.

Supponiamo che $\int_\Omega g\ dx = 0$. Notiamo che, in questo caso, F è invariante per traslazione, cioè per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ vale che

$$F(u) = F(u + c).$$

Allora possiamo equivalentemente minimizzare F nell'insieme

$$\mathbb{X}' := \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega u\ dx = 0 \right\}.$$

Mostriamo che F è coercivo in tale spazio. Osserviamo che $\mathbb{X}$ è un sottospazio debolmente chiuso in $W^{1,2}(\Omega)$: infatti, data $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}$ che converge debolmente a u in $W^{1,2}(\Omega)$, vale che $u_n \to u$ fortemente in $L^2(\Omega)$; è immediato dedurre che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (u_n - u)\ dx = 0,$$

ovvero che $u \in \mathbb{X}$. Per la proposizione 2.2.7, possiamo provare che se $(u_n)_n$ è una successione in $\mathbb{X}$ tale che $\|u_n\|_{1,2,\Omega} \to +\infty$ allora $F(u_n) \to +\infty$. Posto

$$(u_n)_\Omega := \frac{1}{\mathscr{L}(\Omega)} \int_\Omega u_n\ dx,$$

per la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (vedi 2.3.7), per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

per una costante $C > 0$ opportuna. Essendo $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}'$ vale che

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Allora, se $\|u_n\|_{1,2,\Omega} \to +\infty$, deve vale che $\|\nabla u_n\|_{1,2,\Omega} \to +\infty$. Per la disuguaglianza di Hölder, vale che

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 - gu \right]\ dx \\ &\ge \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - C \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}; \end{aligned}$$

segue che $F(u_n) \to +\infty$.

Proviamo che F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,2}(\Omega)$. Siano $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}$ e $u \in \mathbb{X}$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Dobbiamo provare che

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Notiamo che

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)},$$

perchè la norma è sequenzialmente semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole; inoltre, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_\Omega g(u_n - u)\ dx \right| \le \|g\|_{L^2(\Omega)} \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Questo è sufficiente a concludere che vale il risultato di semicontinuità inferiore.

Per il teorema di Weierstrass (vedi 2.1.4), F ammette minimo in $\mathbb{X}$, quindi anche in $W^{1,2}(\Omega)$.

2.4 Semicontinuità inferiore negli spazi di Sobolev

Vogliamo studiare la semicontinuità di funzionali integrali definiti in spazi di Sobolev rispetto alla convergenza debole.

Teorema 2.4.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1, +\infty)$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana. Definiamo in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(x; u) \, dx.$$

- *Se f è tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ la mappa $f(x; \cdot)$ è semicontinua inferiormente, allora F è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza forte in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$.*
- *Se vale anche che per quasi ogni $x \in \Omega$ la mappa $f(x; \cdot)$ è convessa, allora F è convessa e semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$.*

Dimostrazione. Notiamo che F è ben definita perchè ogni funzione in $L^p(\Omega)$ ammette un rappresentante boreliano.

Step 1: Mostriamo il primo enunciato. Sia $(u_n)_n$ una successione in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ che converge fortemente a u in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$; dobbiamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(u_n).$$

A meno di estrarre una sottosuccessione, si può assumere che il limite inferiore sia un limite. A meno di passare a ulteriori sottosuccessioni, possiamo supporre che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che $u_n(x) \to u(x)$. Applicando il lemma di Fatou e la semicontinuità di f rispetto a u (per quasi ogni $x \in \Omega$), si trova che

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \to +\infty} F(u_n) &= \lim_{n \to +\infty} F(u_n) \\
&= \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f(x; u_n) \, dx \\
&\geq \int_\Omega \liminf_{n \to +\infty} f(x; u_n) \, dx \\
&\geq \int_\Omega f(x; u) \, dx = F(u).
\end{aligned}$$

Step 2: Proviamo il secondo enunciato. La convessità di F segue banalmente da quella di f (basta integrare la disuguaglianza di convessità nelle variabili $(p; \xi)$). La semicontinuità di F rispetto alla convergenza debole in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ segue dal fatto che ogni funzionale convesso e fortemente semicontinuo inferiormente definito su uno spazio di Banach è debolmente semicontinuo inferiormente. □

Teorema 2.4.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1, +\infty)$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che*

- *la mappa $f(x; \cdot; \cdot)$ è semicontinua inferiormente,*
- *per ogni $u \in \mathbb{R}^N$ la mappa $f(x; u; \cdot)$ è convessa.*

Denotiamo $(x; u; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ *le variabili di* f*. Definiamo il funzionale*

$$F(u; v) := \int_\Omega f(x; u; v)\ dx$$

per ogni $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *per ogni* $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$*. Allora* F *è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza forte in* $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *e debole in* $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$*.*

Dimostrazione. **Step 1**: Vogliamo mostrare che è possibile ridursi al caso in cui f sia limitata ed equi-lipschitziana in u rispetto alle variabili (x, ξ), cioè che esiste $L > 0$ tale che per ogni $x \in \Omega$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^M$ per ogni $u, u' \in \mathbb{R}^N$ vale che

$$|f(x; u; \xi) - f(x, u'; \xi)| \leq L\,|u - u'|\,.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo la funzione

$$f_\varepsilon(x; u; \xi) := \inf_{u' \in \mathbb{R}^N} \left\{ f(x; u'; \xi) \wedge \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\,|u - u'| \right\}.$$

Fissiamo $(x; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$. Dato $u' \in \mathbb{R}^N$, denotiamo con

$$g_{\varepsilon; x; u'; \xi}(u) := f(x; u'; \xi) \wedge \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\,|u - u'|\,.$$

Notiamo che $g_{\varepsilon; x; u'; \xi}$ è una funzione che assume valori reali ed è $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitziana. Vale che

$$f_\varepsilon(x; u; \xi) = \inf_{u' \in \mathbb{R}^N} g_{\varepsilon; x; u'; \xi}(u).$$

É immediato osservare che f_ε è limitata; inoltre la funzione $f_\varepsilon(x; \cdot; \xi)$ è estremo inferiore puntuale di funzioni con costante di Lipschitz $\frac{1}{\varepsilon}$, quindi è $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitziana. In altri termini, per ogni $(x; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$ per ogni $w, w' \in \mathbb{R}^N$ vale che

$$|f_\varepsilon(x; w; \xi) - f(x; w'; \xi)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\,|w - w'|\,.$$

Questa è l'ipotesi di regolarità che vogliamo ottenere.

Utilizzando la semicontinuità inferiore di f quasi ovunque in x rispetto alle variabili $(u; \xi)$ (serve soltanto quella rispetto a u), si verifica facilmente che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $(u; \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ vale che $f_\varepsilon(x; u; \xi)$ tende crescendo a $f(x; u; \xi)$ se $\varepsilon \to 0$. Inoltre, è immediato verificare che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $u \in \mathbb{R}^N$ la mappa $f_\varepsilon(x; u; \cdot)$ è convessa. Questo processo è noto come regolarizzazione di f per inf-convoluzione.

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo il funzionale

$$F_\varepsilon(u; v) := \int_\Omega f_\varepsilon(x; u; v)\ dx$$

per $(u; v) \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N) \times L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Supponiamo che il teorema valga per F_ε. Sia $(u_n)_n$ una successione in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ che converge fortemente a u in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$; sia $(v_n)_n$ una successione in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ che converge debolmente a v in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Dobbiamo provare che

$$F(u; v) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(u_n; v_n),$$

sapendo che l'enunciato vale per F_ε per ogni $\varepsilon > 0$. Allora si ha

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n; v_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} F_\varepsilon(u_n; v_n) \geq F_\varepsilon(u; v) = \int_\Omega f_\varepsilon(x; u; v)\; dx.$$

Passando al limite per ε che tende a 0 e utilizzando il teorema di Beppo Levi, troviamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n; v_n) \geq \sup_{\varepsilon>0} \int_\Omega f_\varepsilon(x; u; v)\; dx = \int_\Omega \sup f_\varepsilon(x; u; v)\; dx = \int_\Omega f(x; u; v) = F(u).$$

Step 2: Possiamo supporre in aggiunta che f sia limitata e equi-lipschitziana in u rispetto alle variabili $(x; \xi)$. Sia $(u_n)_n$ una successione in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ che converge fortemente a u in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$; sia $(v_n)_n$ una successione in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$ che converge debolmente a v in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^M)$. Dobbiamo provare che

$$F(u; v) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n; v_n).$$

A meno di passare a sottosuccessioni, possiamo assumere che il limite inferiore sia un limite. Allora, a patto di estrarre una ulteriore sottosuccessione, si può supporre che $u_n(x) \to u(x)$ puntualmente quasi ovunque in Ω. Per il teorema di Egorov, esiste una successione $(\Omega_k)_k$ crescente di sottoinsiemi di Ω tale che

- $\sup_k \mathscr{L}(\Omega_k) = \mathscr{L}(\Omega)$,
- $\mathscr{L}(\Omega_k) < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- $u_n \to u$ uniformemente in Ω_k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Sia $L > 0$ la costante di Lipschitz di f in u uniformemente in $(x; \xi)$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $(x; \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^M$ vale che

$$|f(x; u_n(x); \xi) - f(x; u(x); \xi)| \leq L\, |u_n(x) - u(x)|\, .$$

Fissiamo $k \in \Omega$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\int_{\Omega_k} |f(x; u_n; v_n) - f(x; u; v_n)|\; dx \leq L\, \|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega_k)} \mathscr{L}(\Omega_k).$$

Per il teorema 2.4.1, il funzionale

$$G_u(v) := \int_{\Omega_k} f(x; u; v)\; dx$$

definito in $L^p(\Omega_k; \mathbb{R}^M)$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $L^{1,p}(\Omega_k)$ (è immediato notare che $v_n \rightharpoonup v$ debolmente in $L^p(\Omega_k)$). Allora vale che

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} F(u_n; v_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega_k} f(x; u_n; v_n)\; dx \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega_k} f(x; u; v_n)\; dx - L\, \mathscr{L}(\Omega_k)\, \|u - u_n\|_{L^\infty(\Omega_k)} \\
&\geq \int_{\Omega_k} f(x; u; v)\; dx.
\end{aligned}$$

Passando al limite per k che tende a $+\infty$, per il teorema di Beppo-Levi deduciamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n; v_n) \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_k} f(x; u; v)\; dx = \int_\Omega f(x; u; v)\; dx = F(u; v).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 2.4.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m} \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che*

- *la mappa $f(x; \cdot; \cdot)$ è semicontinua inferiormente,*
- *per ogni $u \in \mathbb{R}^m$ la mappa $f(x; u; \cdot)$ è convessa.*

Definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega f(x; u; \nabla u)\ dx$$

per ogni $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$; per la precisione, se $(u_n)_n$ è una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debole in $L^p(\Omega)$, vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u).$$

Dimostrazione. La tesi è una conseguenza immediata del teorema 2.4.2. □

Osservazione 2.4.4. É possibile modificare i teoremi 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3 nel caso in cui $p = +\infty$, prendendo la convergenza debole* al posto della convergenza debole. In questo caso, le dimostrazioni risultano semplificate perchè assumiamo la convergenza uniforme delle funzioni (non soltanto in L^p per qualche $p \in [1, +\infty)$).

2.5 Semicontinuità nel caso scalare

Consideriamo un funzionale integrale del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(x; u; \nabla u)\ dx,$$

definito in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ per qualche $p \in [1, +\infty)$. Abbiamo provato che la semicontinuità inferiore di f in $(u; \xi)$ implica la semicontinuità inferiore di F in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ e che la convessità in ξ garantisce la debole semicontinuità inferiore di F in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ (insieme ad altre ipotesi). Vogliamo mostrare che queste condizioni sono sostanzialmente necessarie nel caso scalare.

Teorema 2.5.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1, +\infty)$, $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$ una funzione boreliana localmente limitata tale che $f(0) = 0$. Consideriamo il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)\ dx$$

definito in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1. *Se F è fortemente semicontinuo inferiormente, allora f è semicontinua inferiormente.*
2. *Se F è debolmente semicontinua inferiormente, allora f è convessa.*

Dimostrazione. Per le ipotesi di locale limitatezza di f, possiamo ben definire funzione $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ crescente tale che

$$\omega(M) \coloneqq \sup_{\|\xi\| \leq M} f(\xi).$$

L'ipotesi che $f(0) = 0$ garantisce che $\omega(0) = 0$.

Possiamo anche notare che il funzionale F è finito su tutte le funzioni di classe $C_c^\infty(\Omega)$: infatti tali funzioni hanno gradiente limitato e nullo fuori da un compatto.

Step 1: Proviamo il primo enunciato. Sia $(\xi_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}^d$ tale che $\xi_n \to \xi$. Dobbiamo provare che

$$\liminf_{n \to +\infty} f(\xi_n) \geq f(\xi).$$

Siano $x_0 \in \Omega$ e $B(x_0; 4r_0)$ una palla relativamente compatta in Ω. Sia $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0, 1])$ una funzione cut-off con le seguenti proprietà:

- $\rho(x) = 1$ in $B(x_0; 2r_0))$;
- $\rho(x) = 0$ in $B(x_0; 3r_0)^c$.

In particolare, $\rho \in C_c^\infty(\Omega; [0, 1])$. Poniamo

$$u(x) \coloneqq < \xi, x > \rho(x).$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0, 1])$ una funzione cut-off con le seguenti proprietà:

- $\rho_n(x) = 1$ in $B(x_0; r_0)$;
- $\rho_n(x) = 0$ in $B\left(x_0; 2r_0\right)^c$;
- detto
$$C_n \coloneqq \mathrm{supp}(\rho_n) \setminus B(x_0; r_0),$$
vale che $(C_n)_n$ è una successione decrescente di corone circolari aventi misura che tende a 0;
- esiste una costante $C > 0$ (indipendente da $n \in \mathbb{N}$) tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale
$$|\nabla \rho_n(x)| \leq \frac{C}{|\xi_n - \xi|}.$$

É possibile fare questa costruzione perchè il gradiente di ρ_n è dell'ordine del reciproco del raggio di C_n (che può essere scelto dell'ordine di $|\xi_n - \xi|$) e la costante C può essere resa indipendente da n costruendo la successione per riscalamento di un unico profilo. Inoltre, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che $|\xi_n - \xi| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Allora otteniamo che esiste

$$|\nabla \rho_n(x)| \leq \frac{C}{|\xi_n - \xi|} \leq C' \sqrt{n},$$

per una costante C' opportuna indipendente da x e da n.

Poniamo

$$u_n(x) := u(x) + \rho_n < \xi_n - \xi, x > .$$

Notiamo che $u_n \to u_0$ in $L^p(\Omega)$ (per convergenza puntuale e dominata). Inoltre, vale che

$$\nabla u_n(x) = \nabla u_0 + \nabla \rho_n(x) < \xi_n - \xi, x > +\rho(x)(\xi_n - \xi).$$

Notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \|\rho(\xi_n - \xi)\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Inoltre, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|\nabla \rho_n < \xi_n - \xi, \cdot >\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\to+\infty} C\,\mathscr{L}(C_n) = 0.$$

Allora $\nabla u_n \to \nabla u_0$ in $L^p(\Omega)$. Dalla semicontinuità forte di F in $W^{1,p}(\Omega)$ deduciamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(\nabla u_n)\ dx \geq \int_\Omega f(\nabla u)\ dx.$$

Poniamo

$$C_{r_0} := B(x_0; 4r_0) \setminus B(x_0; 3r_0).$$

Vale che

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\nabla u_n)\ dx = &\int_{B(x_0;r_0)} f(\xi_n)\ dx \\ &+ \int_{C_n} f(\xi + \rho(\xi_n - \xi) + \nabla\rho_n < \xi_n - \xi, x >)\ dx \\ &+ \int_{\Omega\setminus(C_n\cup B(x_0;r_0))} f(\nabla u)\ dx.\end{aligned}$$

Precisiamo anche che

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{C_n} f(\xi + \rho(\xi_n - \xi) + \nabla\rho_n < \xi_n - \xi, x >)\ dx\right| \\ &\quad\leq \lim_{n\to+\infty}\int_{C_n} \omega(|\xi + \rho(\xi_n - \xi) + \nabla\rho_n < \xi_n - \xi, x >|)\ dx \\ &\quad\leq \lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}(C_n)\omega(M) = 0,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi che ω domini f, sia strettamente crescente e che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}, x\in B(x_0;2r_0)} |\xi - \rho(x)(\xi_n - \xi) + \nabla\rho_n(x) < \xi_n - \xi, x >| \leq M$$

per costruzione. Per il teorema di Beppo Levi, vale che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega\setminus(C_n\cup B(x_0;r_0))} f(\nabla u)\ dx = \int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx.$$

Allora vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \mathscr{L}(B(x_0;r_0))\liminf_{n\to+\infty} f(\xi_n) + \int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx.$$

Ricordiamo che

$$F(u) = \mathscr{L}(B(x_0;r_0))f(\xi) + \int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx.$$

Essendo $u \in C_c^\infty(\Omega)$, per le ipotesi su F, deduciamo che

$$\int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u) < +\infty.$$

Semplificando i termini, troviamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} f(\xi_n) \geq f(\xi).$$

Step 2: Siano $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda > 0$. Poniamo

$$\xi \coloneqq \lambda\xi_0 + (1-\lambda)\xi_1;$$

dobbiamo provare che

$$f(\xi) \leq \lambda f(\xi_0) + (1-\lambda) f(\xi_1).$$

Siano $x_0 \in \Omega, r_0 > 0$, ρ una funzione cut-off, C_{r_0} una corona circolare come nel passo precedente. Definiamo

$$u(x) \coloneqq< x, \xi > \rho(x);$$

notiamo che $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Sia $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 1-periodica, continua e affine a tratti, tale che

$$v(x) = \begin{cases} \lambda x & x \in [0, 1-\lambda], \\ (\lambda-1)x + (\lambda-1)^2 & x \in [1-\lambda, 1]. \end{cases}$$

Dato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0,1])$ scelta come nel passo precedente; in maniera analoga definiamo la corona circolare C_n. Poniamo

$$v_n(x) \coloneqq \frac{1}{n} v(n < x, \xi_1 - \xi_0 >).$$

Sia

$$u_n(x) \coloneqq u(x) + v_n(x)\rho_n(x).$$

Innanzitutto, osserviamo che $(u_n)_n$ è una successione di funzioni continue e in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Vogliamo mostrare che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Possiamo equivalentemente mostrare che $v_n\rho_n \rightharpoonup 0$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n\rho_n\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \lim_{n\to} \frac{1}{n^p} \mathscr{L}(B(x_0; 2r_0)) = 0.$$

Vale che

$$\nabla(v_n\rho_n) = v_n\nabla\rho_n + \rho_n\nabla v_n;$$

In particolare, vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n\nabla\rho_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lim_{n\to+\infty} \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\rho_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{C'\sqrt{n}}{n} = 0,$$

per come abbiamo costruito la successione $(\rho_n)_n$. Essendo $\nabla\rho_n v_n$ identicamente nullo fuori da $B(x_0; 4r_0)$ deduciamo che $v_n\nabla\rho_n \to 0$ in $L^p(\Omega)$. Notiamo che ∇v_n assume soltanto i valori ξ_0, ξ_1. Pertanto la successione $(\nabla v_n \rho_n)_n$ è limitata in norma $L^\infty(\Omega)$. Per il teorema di Banach-Alaoglu (vedi 2.1.11), esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $w \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tale che $\nabla v_n \rho_n \overset{*}{\rightharpoonup} w$ in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$. In particolare, $\nabla v_n \rho_n \rightharpoonup w$ debolmente in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$. Per il lemma 6.4.5, vale che $w = \nabla u$; deduciamo che $w = 0$.

Per ipotesi F è debolmente semicontinua inferiormente in $W^{1,p}(\Omega)$; allora vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u).$$

Notiamo che

$$\nabla u_n = \begin{cases} \xi_0 & x \in A_n \subseteq B(x_0; r_0), \\ \xi_1 & x \in B(x_0; r_0) \setminus A_n, \\ \xi + \rho_n \nabla v_n + v_n \nabla \rho_n & x \in C_n, \\ \nabla u & x \in \Omega \setminus B(x_0; r_0); \end{cases}$$

abbiamo sezionato $B(x_0; r_0)$ con una famiglia finita (dipendente da n) di iperpiani affini ortogonali alla direzione $\xi_1 - \xi_0$; nelle strisce che si formano, ∇u_n alterna i valori ξ_0, ξ_1; abbiamo chiamato A_n l'unione delle strisce in cui $\nabla u_n = \xi_0$. Notiamo che tali strisce hanno spessore $\frac{\lambda}{n}$; le strisce in cui $\nabla u_n = \xi_1$ hanno spessore $\frac{1-\lambda}{n}$. Vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathscr{L}(A_n)}{\mathscr{L}(B(x_0; r_0))} = \lambda.$$

Sarebbe facile provare questa affermazione sostituendo $B(x_0; r_0)$ con un cilindro nella direzione di $\xi_1 - \xi_0$. Ricordando che una palla si può scrivere come unione numerabile disgiunta di cilindri in direzione $\xi_1 - \xi_0$ (inoltre ogni palla ha misura finita), si estende facilmente questo risultato anche al caso di $B(x_0; r_0)$.

Deduciamo anche che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathscr{L}(B(x_0; r_0) \setminus A_n)}{\mathscr{L}(B(x_0; r_0))} = 1 - \lambda.$$

Essendo $\rho_n \nabla v_n + v_n \nabla \rho_n$ limitato in C_n (da una costante M che non dipende da n), abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C_n} f(\nabla u_n)\, dx \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{C_n} \omega(M)\, dx = 0,$$

dove abbiamo usato la dominazione di f e il fatto che $(C_n)_n$ è una successione decrescente di corone circolari di misura che tende a 0. Per il teorema di Beppo Levi, vale che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega\setminus(C_n \cup B(x_0; r_0))} f(\nabla u_n)\, dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega\setminus(C_n \cup B(x_0; r_0))} f(\nabla u)\, dx \\ &= \int_{\Omega\setminus B(x_0; r_0)} f(\nabla u)\, dx. \end{aligned}$$

Per concludere, abbiamo che

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f(\nabla u_n)\ dx &= \liminf_{n\to+\infty}[f(\xi_0)\,\mathscr{L}(A_n)+f(\xi_1)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0)\setminus A_n)] \\ &\qquad + \int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx \\ &\geq f(\xi)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0)) + \int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx \\ &= F(u).\end{aligned}$$

Dalle ipotesi su f e per la costruzione di u segue che

$$\int_{\Omega\setminus B(x_0;r_0)} f(\nabla u)\ dx < +\infty.$$

Allora deduciamo che

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to+\infty}[f(\xi_0)\,\mathscr{L}(A_n)+f(\xi_1)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0)\setminus A_n] \\ &\qquad = f(\xi_0)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0))\lambda + f(\xi_1)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0))(1-\lambda) \\ &\quad \geq f(\xi)\,\mathscr{L}(B(x_0;r_0));\end{aligned}$$

La tesi segue immediatamente. Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.5.2. Presentiamo alcune osservazioni a margine del teorema 2.5.1.

- L'ipotesi che $f(0) = 0$ non è strutturale, ma serve soltanto per garantire che il funzionale F è finito sulle funzioni con gradiente limitato e aventi supporto compatto in Ω. Quindi l'assunzione $f(0) = 0$ può essere sostituita con qualsiasi ipotesi che garantisca la condizione di finitezza di F. $F(u) < +\infty$ per ogni funzione $u \in C_c^\infty(\Omega)$ non è tecnica e non strutturale; tuttavia, è importante per completare la dimostrazione.
- Vale un teorema analogo se F è definito in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$.
- La dimostrazione data vale anche se il funzionale F è definito su $W^{1,p}(\Omega)$ (senza condizioni al bordo) e si adatta al caso in cui $p = +\infty$, sostituendo la convergenza debole con la convergenza debole*.

Utilizzando le stesse tecniche di localizzazione illustrate nel dettaglio nella dimostrazione del teorema 2.5.1, possiamo mostrare il seguente risultato.

Teorema 2.5.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in [1,+\infty)$, $f : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ una funzione boreliana. Sia*

$$F(u) := \int_\Omega f(x;u;\nabla u)\ dx$$

un funzionale definito su $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supponiamo che

- *per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ valga $F(u) < +\infty$;*
- *F sia semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$,*

- *f sia continua in tutte le variabili.*

Allora, per ogni $(x; u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ la mappa $f(x; u; \cdot)$ è convessa.

Dimostrazione. Fissiamo $\bar{x} \in \Omega, \bar{u} \in \mathbb{R}^n, \xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in [0, 1]$. Se poniamo

$$\bar{\xi} := \lambda \xi_0 + (1 - \lambda)\xi_1,$$

dobbiamo provare che

$$f(\bar{x}; \bar{u}; \bar{\xi}) \leq \lambda f(\bar{x}; \bar{u}; \xi_0) + (1 - \lambda) f(\bar{x}; \bar{u}; \xi_1).$$

Fissiamo $\eta > 0$. Dall'ipotesi di continuità di f in tutte le variabili, deduciamo che esistono $r_0, \delta_0 > 0$ tali che

- $B(\bar{x}; 4r_0)$ è relativamente compatto in Ω;
- per ogni $(x; u; \xi) \in B(\bar{x}; 4r_0) \times B(\bar{u}; \delta_0) \times B(\bar{\xi}; 1)$ vale che

$$|f(x; u; \xi) - f(\bar{x}; \bar{u}; \xi)| \leq \eta.$$

Notiamo anche che $\xi_0, \xi_1 \in B(\bar{\xi}, 1)$. Siano $\rho, (\rho_n)_n$ funzioni cut-off, $C_{r_0}, (C_n)_n$ corone circolari, $v, (v_n)_n$ funzioni affini a tratti come nel secondo passo della dimostrazione del teorema 2.5.1. Definiamo

$$u(x) := (\bar{u} + < \bar{\xi}, x >)\rho(x), \quad u_n(x) := u(x) + v_n(x)\rho_n(x).$$

Abbiamo provato che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. Tuttavia, notiamo che $(u_n)_n$ converge ad u uniformemente in Ω. In ogni caso, vale che

$$\liminf_{n \to +\infty} F(u_n) \geq F(u).$$

A meno di restringere δ_0, possiamo supporre che

$$u(B(\bar{x}; r_0)) \subseteq B(\bar{u}; \delta_0).$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\Omega \setminus B(\bar{x}; r_0)} f(x; u; \nabla u)\, dx + \int_{B(\bar{x}; r_0)} f(x; u; \bar{\xi})\, dx \\ &\geq \int_{\Omega \setminus B(\bar{x}; r_0)} f(x; u; \nabla u)\, dx + \int_{B(\bar{x}; r_0)} [f(\bar{x}; \bar{u}; \bar{\xi}) - \eta]\, dx \\ &= \int_{\Omega \setminus B(\bar{x}; r_0)} f(x; u; \nabla u)\, dx + \mathscr{L}(B(\bar{x}; r_0))[f(\bar{x}; \bar{u}; \bar{\xi}) - \eta]. \end{aligned}$$

Ragionando come nel secondo passo della dimostrazione del teorema 2.5.1, deduciamo che

$$\begin{aligned} F(u_n) = &\int_{\Omega \setminus C_n \cup B(\bar{x}; r_0)} f(x; u_n; \nabla u_n)\, dx + \int_{C_n} f(x; u_n; \nabla u_n)\, dx \\ &+ \int_{A_n} f(x; u_n; \xi_0)\, dx + \int_{B(\bar{x}; r_0) \setminus A_n} f(x; u_n; \xi_1)\, dx. \end{aligned}$$

Poichè u_n converge uniformemente a u, vale che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} f(x;u_n;\xi_0)\ dx &\le \lim_{n\to+\infty}\int_{A_n}[f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)+\eta]\ dx\\ &= [f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)+\eta]\lim_{n\to+\infty}\mathscr{L}(A_n)\\ &= [f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)+\eta]\lambda\mathscr{L}(B(\bar{x};r_0));\end{aligned}$$

analogamente, si trova che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B(\bar{x};r_0)\setminus A_n} f(x;u_n;\xi_1)\ dx \le [f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)+\eta](1-\lambda)\mathscr{L}(B(\bar{x};r_0)).$$

Inoltre, vale che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega\setminus(C_n\cup B(\bar{x};r_0))} f(x;u_n;\nabla u_n)\ dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega\setminus(C_n\cup B(\bar{x};r_0))} f(x;u;\nabla u)\ dx\\ &= \int_{\Omega\setminus B(\bar{x};r_0)} f(x;u;\nabla u)\ dx.\end{aligned}$$

Abbiamo anche che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{C_n} f(x;u_n;\nabla u_n)\ dx = 0$$

perchè $(u_n)_n, (\nabla u_n)_n$ sono successioni uniformemente limitate, f è continua in $(x;u;\xi)$ quindi è localmente limitata e $(C_n)_n$ è una successione decrescente di insiemi di misura che tende a 0. Concludiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B(\bar{x};r_0)} f(x;u;\nabla u)\ dx + \mathscr{L}(B(\bar{x},r_0))[f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)\lambda + f(\bar{x};\bar{u};\xi_1)(1-\lambda)+\eta]&\\ \ge \liminf_{n\to+\infty} F(u_n)&\\ \ge F(u)&\\ \ge \int_{\Omega\setminus B(\bar{x};r_0)} f(x;u;\nabla u)\ dx + \mathscr{L}(B(\bar{x};r_0))[f(\bar{x};\bar{u};\bar{\xi})-\eta].&\end{aligned}$$

Essendo F a valori reali, deduciamo che

$$\int_{\Omega\setminus B(\bar{x};r_0)} f(x;u;\nabla u)\ dx < +\infty.$$

Allora, segue che

$$\mathscr{L}(B(\bar{x},r_0))[f(\bar{x};\bar{u};\xi_0)\lambda + f(\bar{x};\bar{u};\xi_1)(1-\lambda)+\eta] \ge \mathscr{L}(B(\bar{x};r_0))[f(\bar{x};\bar{u};\bar{\xi})-\eta];$$

dividendo per $\mathscr{L}(B(\bar{x};r_0))$ e utilizzando il fatto che η è arbitrario, si ottiene immediatamente la tesi. □

Osservazione 2.5.4. Presentiamo alcune osservazioni a margine del teorema 2.5.3.

- L'ipotesi che $F(u) < +\infty$ per ogni funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è tecnica e non strutturale; tuttavia, è importante per completare la dimostrazione.
- Vale un teorema analogo se F è definito in $W_{u_0}^{1,p}(\Omega)$.

- La dimostrazione data vale anche se il funzionale F è definito su $W^{1,p}(\Omega)$ (senza condizioni al bordo) e si adatta al caso in cui $p = +\infty$, sostituendo la convergenza debole con la convergenza debole*.

- L'ipotesi di continuità in tutte le variabili non è necessaria e può essere indebolita.

Precisiamo che valgono teoremi simili a 2.5.1 e 2.5.3 con le stesse dimostrazioni e analoghe osservazioni per funzionali integrali definiti in $W_0^{1,p}((a,b);\mathbb{R}^m)$ (eventualmente con un diverso dato al bordo, oppure senza imporre condizioni al bordo, oppure se $p = +\infty$ sostituendo la convergenza debole con quella debole*).

In ogni caso, possiamo riassumere che nel caso scalare la variabile ξ gioca un ruolo fondamentale nella semicontinuità rispetto a $(x; u)$.

2.6 Semicontinuità nel caso vettoriale

Nel caso vettoriale si verificano fenomeni più complessi rispetto a quello scalare; la convessità dell'integranda garantisce la semicontinuità inferiore dei funzionali integrali rispetto alla convergenza debole negli spazi di Sobolev, tuttavia è ben lontana dall'essere necessaria. Bisogna indebolire la definizione di convessità e introdurre alcune nozioni intermedie. Le definizioni seguenti sono state date da Morrey; tuttavia la terminologia che useremo è quella di Ball.

Adotteremo la seguente notazione: data una matrice $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ poniamo $\mathcal{M}(\xi)$ il vettore dei determinanti di tutti i suoi minori.

2.6.1 Policonvessità

Definizione 2.6.1 (Policonvessità).
Sia $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione; detto D il numero dei minori di $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si dice che f è policonvessa se esiste una funzione $g : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa tale che

$$f(\xi) = g(\mathcal{M}(\xi))$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Osservazione 2.6.2. Ovviamente una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa è policonvessa. Supponiamo, però, che $n = m > 1$: la funzione

$$f(\xi) := \det(\xi)$$

è policonvessa ma non convessa.

Vogliamo mostrare che la policonvessità implica la debole semicontinuità inferiore di funzionali integrali definiti su spazi di Sobolev.

Lemma 2.6.3. *Siano $m = n$, $p \in [n, +\infty)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $(u_k)_k$ una successione in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Supponiamo che $u_k \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ (vedi 2.2.1). Allora vale che $\det(\nabla u_n) \rightharpoonup \det(\nabla u)$ debolmente in $L^{\frac{p}{n}}(\Omega)$. Se $p = +\infty$ vale lo stesso risultato sostituendo la convergenza debole con quella debole*.*

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che il determinante dello jacobiano di una funzione in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ appartiene a $L^{\frac{p}{m}}(\Omega)$. Supponiamo anche $p<+\infty$; il caso $p=+\infty$ può essere ottenuto con le ovvie modifiche degli argomenti che esporremo.

Step 1: Esaminiamo il caso in cui $m=n=2$. Data $u\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ vale che

$$\det(\nabla u)=\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\frac{\partial u^2}{\partial x_2}-\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\right).$$

Integrando per parti, possiamo facilmente verificare che per ogni funzione test $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega \det(\nabla u)\varphi\;dx=-\int_\Omega\left[u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]\;dx. \tag{2.1}$$

Vogliamo estendere questa relazione a tutte le funzioni $u\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Per il teorema 6.4.23 esiste una successione $(u_n)_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $u_n\to u$ in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^2)$. Fissiamo $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$. Ricordando che se $v_n\to v, w_n\to w$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ allora $v_nw_n\to vw$ in $L^{\frac{p}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (come ovvia conseguenza della disuguaglianza di Hölder) e sapendo che la formula (2.1) vale per u_n per ogni $n\in\mathbb{N}$, possiamo passare al limite sotto il segno di integrale: infatti, detto Ω' un aperto relativamente compatto in Ω in cui è supportata φ, tutti gli integrali sono in Ω'; notiamo anche che la convergenza di tutte le integrande è in $L^1(\Omega')$ (φ e tutte le sue derivate sono uniformemente limitate).

Sia $u_n\rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ (vedi 2.2.1); proviamo che $\det(\nabla u_n)\rightharpoonup\det(\nabla u)$ debolmente in $L^{\frac{p}{2}}(\Omega)$, cioè che per ogni funzione test $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega\det(\nabla u_n)\varphi\;dx=\int_\Omega\det(\nabla u)\varphi\;dx.$$

Fissiamo una funzione test $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$; per la formula (2.1), possiamo equivalentemente mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega\left[u_n^1\frac{\partial u_n^2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-u_n^1\frac{\partial u_n^2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]\;dx=\int_\Omega\left[u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]\;dx. \tag{2.2}$$

Per definizione (vedi 2.2.1), vale che $u_n^1\to u^1$ fortemente in $L^p(\Omega)$. A questo punto, è facile verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n^1\frac{\partial u_n^2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\;dx=\int_\Omega u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\;dx.$$

In maniera del tutto analoga, possiamo verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n^1\frac{\partial u_n^2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\;dx=\int_\Omega u^1\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\;dx.$$

Step 2: Il caso $n=m>2$ può essere dimostrato per induzione, utilizzando una diversa identità, che è possibile ottenere con strumenti di algebra multilineare. Ci limitiamo ai passaggi essenziali della dimostrazione. Se $u\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\det(\nabla u)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n&=du^1\wedge\cdots\wedge du^n\\&=d\left(u^1\;du^2\wedge\cdots\wedge du^n\right).\end{aligned}$$

Questa formula può essere estesa a tutte le funzioni in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ intendendola in senso distribuzionale. Sappiamo che $u_k^1 \to u^1$ fortemente in $L^p(\Omega')$. Per ipotesi induttiva, possiamo assumere che

$$du_k^2 \wedge \cdots \wedge du_k^n \rightharpoonup du^2 \wedge \cdots \wedge du^n$$

debolmente in $L^{\frac{p}{n-1}}(\Omega)$; segue che

$$u_k^1 \left(du_k^2 \wedge \cdots \wedge du_k^n\right) \rightharpoonup u^1 \left(du^2 \wedge \cdots \wedge du^n\right)$$

debolmente in $L^p(\Omega)$. □

Osservazione 2.6.4. Il risultato del lemma 2.6.3 è sorprendente, perchè generalmente se $v_n \rightharpoonup v$ non vale che $v_n^2 \rightharpoonup v^2$.

Teorema 2.6.5. *Siano $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0,+\infty]$ una funzione policonvessa, Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e $\min\{m;n\} \le p < +\infty$. Il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)\ dx$$

definito in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ è debolmente semicontinuo inferiormente. Se $p = +\infty$ il funzionale F è debole semicontinuo inferiormente in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Dimostrazione. Sia $g : \mathbb{R}^D \to [0,+\infty]$ convessa tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale che

$$f(\xi) = g(\mathcal{M}(\xi).$$

Supponiamo $p < +\infty$; sia $(u_k)_k$ una successione in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ che converge debolmente a u in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Per il lemma 2.6.3, il vale che $\mathcal{M}(u_n) \rightharpoonup \mathcal{M}(u)$ debolmente in $L^1(\Omega)$: infatti il determinante di ciascun minore di taglia s converge debolmente in $L^{\frac{p}{s}}(\Omega)$; essendo l'aperto limitato, deduciamo che i determinanti di tutti i minori (indipendentemente dalla taglia) convergono debolmente in $L^1(\Omega)$. Per quanto dimostrato in 2.4.3, vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(\mathcal{M}(u_n))\ dx \ge \int_\Omega g(\mathcal{M}(u))\ dx = F(u).$$

Il caso $p = +\infty$ è completamente analogo. □

2.6.2 Quasiconvessità

Introduciamo la seguente definizione, per individuare una classe di funzioni di cui faremo uso in questa sezione.

Definizione 2.6.6 ($W_0^{1,\infty}(\Omega)$)**.**
Dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ come la chiusura di $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ rispetto alla convergenza debole * in $W^{1,\infty}(\Omega)$ (vedi 2.2.1).

Osservazione 2.6.7. Dalla definizione 2.6.6 segue che $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $(u_n)_n \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ uniformemente e $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ debole * in L^∞. Supponiamo che Ω sia limitato: se esiste $p \in (1,+\infty)$ tale che $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ allora $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Innanzitutto possiamo supporre $p > d$; per definizione esiste una successione $(u_n)_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_n \to u$ e $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega)$; essendo $p > d$, per il teorema di immersione compatta (vedi 6.4.48, per questo assumiamo che Ω sia limitato), possiamo assumere che $u_n \to u$ uniformemente in Ω. Inoltre, abbiamo che $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ debolmente in L^p. Essendo $\nabla u \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, deduciamo che $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ debole * in L^∞.

Definizione 2.6.8 (Quasiconvessità)**.**
Siano $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana e localmente limitata e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Si dice che f è quasiconvessa in A se per ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ per ogni $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vale che

$$\fint_\Omega f(A + \nabla\varphi)\, dx \geq f(A).$$

Osservazione 2.6.9. Il ruolo di Ω nella definizione 2.6.8 è fittizio. Sia $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Tramite un argomento di riscalamento e un cambio di variabili, si nota che è possibile equivalente richiedere che la disuguaglianza valga per ogni $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega_0; \mathbb{R}^m)$. In altri termini, si può supporre che Ω abbia la forma desiderata (nel seguito Ω sarà un cubo o una palla).

Vogliamo mostrare che la policonvessità implica la quasiconvessità.

Lemma 2.6.10. *Sia $B(0;1)$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^m$. Per ogni $v \in W_0^{1,\infty}(B(0;1); \mathbb{R}^m)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ vale che*

$$\fint_{B(0;1)} \det(\xi + \nabla v)\, dx = \det(\xi).$$

Si dice che il determinante è una lagrangiana nulla.

Dimostrazione. **Step 1**: Esaminiamo il caso in cui $m = 2$. Per ogni $u \in C^\infty(B(0;1); \mathbb{R}^2)$ vale che

$$\det(\nabla u) = \frac{\partial u^1}{\partial x_1}\frac{\partial u^2}{\partial x_2} - \frac{\partial u^2}{\partial x_1}\frac{\partial u^1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1}\right).$$

Se $u \in C_c^\infty(B(0;1); \mathbb{R}^2)$, integrando in $B(0;1)$ ed utilizzando la formula della divergenza, deduciamo che

$$\int_{B(0;1)} \det(\nabla u)\, dx = \int_{B(0;1)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1}\right)\right] dx = 0.$$

Se $u \in W_0^{1,\infty}(B(0;1); \mathbb{R}^2)$, sia $(u_n)_n \subseteq C_c^\infty(B(0;1); \mathbb{R}^2)$ tale che $u_n \to u$ uniformemente e $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ debole * in L^∞. Per il lemma 2.6.3, abbiamo che $\det(\nabla u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \det(\nabla u)$ debole * in L^∞; allora vale che

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_{B(0;1)} \det(\nabla u_n)\, dx = \int_{B(0;1)} \det(\nabla u)\, dx.$$

Presi $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $u \in W_0^{1,\infty}(B(0;1); \mathbb{R}^2)$, notiamo che

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(B(0;1)) \det(\xi) &= \int_{B(0;1)} \left[\det(\xi) + \xi_1^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_2} + \xi_2^2 \frac{\partial u^1}{\partial x_1} - \xi_2^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \xi_1^2 \frac{\partial u^1}{\partial x_2} + \det(\nabla u)\right] dx \\ &= \int_{B(0;1)} \det(\xi + \nabla u(x))\, dx.\end{aligned}$$

Step 2: Nel caso generale, in cui $m > 2$, utilizzando l'algebra multilineare e il teorema di Stokes, per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int_{B(0;1)} \det(\nabla u(x))\,dx &= \int_{B(0;1)} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n \\ &= \int_{B(0;1)} d\left(u^1\, du^2 \wedge \cdots \wedge du^n\right) \\ &= \int_{\partial B} u_1\, du^2 \wedge \cdots \wedge du^n.\end{aligned}$$

La formula trovata si estende al caso in cui $u \in W_0^{1,\infty}(B(0;1);\mathbb{R}^n)$, intendendola in senso distribuzionale. In altri termini, la quantità $\int_{B(0;1)} \det(\nabla u(x))\,dx$ dipende soltanto dalla traccia di u al bordo di $B(0;1)$, per ogni funzione $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Siano $\xi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $u \in W_0^{1,\infty}(B(0;1);\mathbb{R}^m)$; poniamo $v \in W^{1,\infty}(B(0;1);\mathbb{R}^m)$ tale che

$$v(x) := u(x) + \xi x;$$

sia $w \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ tale che

$$w(x) := \xi x;$$

notiamo che $\nabla v(x) = \nabla u(x) + \xi$, $\nabla w(x) = \xi$ e che w coincide con v su $\partial B(0;1)$. Per quanto mostrato, deduciamo che

$$⨍_{B(0;1)} \det(\xi + \nabla u(x))\,dx = ⨍_{B(0;1)} \det(\xi)\,dx = \det(\xi).$$

□

Teorema 2.6.11. *Sia data una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ policonvessa e localmente limitata. Allora f è quasiconvessa.*

Dimostrazione. Sia g una funzione convessa tale che $f(\xi) = g(\mathcal{M}(\xi))$ come nella definizione 2.6.1; è immediato notare che g assume valori reali, quindi è localmente limitata (infatti g è una funzione convessa a valori reali). Siano $u \in W_0^{1,\infty}(B(0;1);\mathbb{R}^m)$ e $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$; vale che

$$\begin{aligned}⨍_{B(0;1)} f(\xi + \nabla u(x))\,dx &= ⨍ g(M(\xi + \nabla u(x)))\,dx \\ &\geq g\left(⨍_{B(0;1)} M(\xi + \nabla u(x))\,dx\right) \\ &= g(M(\xi)) \\ &= f(\xi),\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Jensen (ciò è possibile perchè tutti gli integrali sono finiti) e il lemma 2.6.10. □

Teorema 2.6.12. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e $f : \mathbb{R}^{m\times d} \to [0,+\infty)$ una funzione boreliana e localmente limitata. Supponiamo anche che $f(0) = 0$. Definiamo il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)\,dx$$

in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e supponiamo che sia semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,\infty}$ (vedi 2.2.1). Allora f è quasiconvessa in ogni punto.*

Dimostrazione. Denotiamo con $Q(0,1)$ il cubo di lato 1 centrato nell'origine contenuto in $\mathbb{R}^d$. Fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^{m\times d}$ e $\varphi \in W_0^{1,\infty}(Q(0,1);\mathbb{R}^m)$; dobbiamo provare che

$$\fint_{Q(0,1)} f(A+\nabla\varphi)\, dx \geq f(A).$$

Notiamo che a meno di sottrarre una costante ad f, possiamo assumere che $f(0)=0$.

Sia Q_r un cubo di lato r contenuto in Ω. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, denotiamo

$$r_n := \frac{r}{n}$$

e partizioniamo Q_r in n^d cubi di lato r_n, che denotiamo con $(Q_{r_n;i})_i$; per ciascun cubo $Q_{r_n;i}$ denotiamo con x_i il suo centro. Definiamo la funzione

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} r_n\varphi\left(\frac{x-x_i}{r_n}\right) & \text{se esiste } i \text{ tale che } x \in Q_{r_n;i}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

É facile verificare che $\varphi_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Notiamo che $\varphi_n \to 0$ uniformemente in Ω; inoltre, vale che

$$\nabla\varphi_n(x) := \begin{cases} \nabla\varphi\left(\frac{x-x_i}{r_n}\right) & \text{se esiste } i \text{ tale che } x \in Q_{r_n;i}, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora la successione $(\nabla\varphi_n)_n$ è limitata in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Per il teorema di Banach-Alaoglu (vedi 2.1.11), esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $v \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ tali che $\nabla\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$. É immediato dedurre che $v=0$ (vedi 6.4.5); otteniamo che $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ come nella definizione 2.2.1.

Sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega;[0,1])$ una funzione cut-off tale che $\psi(x)=1$ se $x \in Q_r$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$u_n(x) := \psi(x)(Ax + \varphi_n(x)).$$

Notiamo che la successione $(u_n)_n$ è contenuta in $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Detta

$$u_\infty(x) := \psi(x)Ax,$$

è evidente che $u_n \to u_\infty$ uniformemente in Ω; inoltre è facile mostrare che $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u_\infty$ in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Possiamo dedurre che $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_\infty$ in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ (vedi 2.2.1). Per le ipotesi su F deduciamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty).$$

Detto $\Omega' \subseteq \Omega$ il supporto di ψ, notiamo che

$$\begin{aligned} F(u_\infty) &= \int_\Omega f(\nabla u_\infty(x))\, dx \\ &= \int_{Q_r} f(A)\, dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\, dx + \int_{\Omega\setminus\Omega'} f(0)\, dx \\ &= \int_{Q_r} f(A)\, dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\, dx, \end{aligned}$$

avendo osservato che possiamo assumere $f(0)=0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{aligned}
F(u_n) &= \int_\Omega f(\nabla u_n(x))\ dx \\
&= \int_{Q_r} f(\nabla(Ax+\varphi_n(x)))\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla(Ax\psi(x)))\ dx + \int_{\Omega\setminus\Omega'} f(0)\ dx \\
&= \int_{Q_r} f(\nabla(Ax+\varphi_n(x)))\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx \\
&= \int_{Q_r} f(A+\nabla\varphi_n(x))\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{n^d} \int_{Q_{r_n;i}} f\left(A+\nabla\varphi\left(\frac{x-x_i}{r_n}\right)\right)\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{n^d} r_n^d \int_{Q(0,1)} f\left(A+\nabla\varphi(x)\right)\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx \\
&= r^d \int_{Q(0,1)} f\left(A+\nabla\varphi(x)\right)\ dx + \int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx,
\end{aligned}$$

avendo effettuato un cambio di variabili. Ricordiamo che f è localmente limitata e che Ω' è un aperto limitato; pertanto deduciamo che

$$\int_{\Omega'\setminus Q_r} f(\nabla u_\infty(x))\ dx < +\infty.$$

Potendo semplificare i termini (tutti gli integrali sono finiti), troviamo che

$$r^d \int_{Q(0,1)} f\left(A+\nabla\varphi(x)\right)\ dx \geq r^d f(A),$$

da cui segue la disuguaglianza desiderata. □

Teorema 2.6.13. *Siano $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0,+\infty)$ una funzione quasiconvessa e Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)\ dx$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Se, invece, esistono $p \in (1,+\infty)$ e $C>0$ tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale che

$$f(\xi) \leq C(1+|\xi|^p),$$

allora F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Dimostrazione. Ci limitiamo soltanto a mostrare le idee principali della dimostrazione del primo enunciato. Supponiamo che $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ debole* in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$; dobbiamo provare che

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Per definizione (vedi 2.2.1), abbiamo che $u_n \to u$ uniformemente e $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ debole * in $L^\infty(\Omega)$.

Assumiamo ulteriormente che Ω sia una palla e che u sia una funzione affine, diciamo $u(x) = \xi x + \xi_0$, con $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\xi_0 \in \mathbb{R}^m$; per semplicità, possiamo assumere che Ω sia la palla unitaria. Definiamo

$$\varepsilon_n := \|u_n - \xi x - \xi_0\|_{L^\infty(\Omega)};$$

per ipotesi, $e_n \to 0$. Definiamo una successione di funzioni cut-off $(\sigma_n)_n$ con le seguenti proprietà:

- $\sigma_n \in C_c^\infty(B(0; 1 - \sqrt{\varepsilon_n}); [0; 1])$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- $\sigma_n(x) = 1$ per ogni $x \in B(0; 1 - 2\sqrt{\varepsilon_n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\|\nabla \sigma_n\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_n}}.$$

La costruzione di una successione con queste proprietà è possibile riscalando un unico profilo in maniera opportuna: le prime due richieste sono immediate da soddisfare; tramite riscalamento di un profilo fissato è possibile soddisfare anche la terza (infatti, il gradiente è dell'ordine del reciproco del raggio della corona circolare in cui avviene la transizione da 0 a 1). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$v_n := \sigma_n(u_n - \xi x - \xi_0).$$

Notiamo che $v_n + \xi x + \xi_0 = u_n$ in $B(0; 1 - 2\sqrt{\varepsilon_n})$; segue che in tale palla vale $\nabla v_n + \xi = \nabla u_n$. Precisiamo anche che $v_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Dalla quasi-convessità di f si deduce che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathscr{L}(\Omega) f(\xi) \leq \int_{B(0;1)} f(\xi + \nabla v_n)\, dx.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} f(\xi)\mathscr{L}(\Omega) &\leq \int_{B(0;1-2\sqrt{\varepsilon_n})} f(\nabla u_n)\, dx + \int_{C_n} f(\xi + \nabla v_n)\, dx \\ &\leq \int_\Omega f(\nabla u_n)\, dx + \int_{C_n} f(\xi + \sigma_n(\nabla u_n - \xi) + (u_n - \xi x - \xi_0)\nabla \sigma_n)\, dx. \end{aligned}$$

Se mostriamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{C_n} f(\xi + \sigma_n(\nabla u_n - \xi) + (u_n - \xi x - \xi_0)\nabla \sigma_n)\, dx = 0,$$

passiamo al limite inferiore nella relazione precedente e deduciamo immediatamente che vale

$$F(0) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(u_n).$$

Notiamo che $(C_n)_n$ è una successione decrescente di insiemi di misura che tende a 0; ricordiamo che f è una funzione localmente limitata (vedi 2.6.8). Se mostriamo che la successione $(\xi + \sigma_n(\nabla u_n - \xi) + (u_n - \xi x - \xi_0)\nabla \sigma_n)_n$ è limitata in L^∞, deduciamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{C_n} f(\xi + \sigma_n(\nabla u_n - \xi) + (u_n - \xi x - \xi_0)\nabla \sigma_n)\, dx = 0.$$

Notiamo che $(\nabla u_n)_n$ è una successione debole * convergente in L^∞, quindi è limitata in L^∞; allora $(\sigma_n(\nabla u_n - \xi))_n$ è una successione limitata in L^∞; per costruzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\|(u_n - \xi x - \xi_0)\nabla\sigma_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{\varepsilon_n}\varepsilon_n = C\sqrt{\varepsilon_n};$$

quindi anche la successione $((u_n - \xi x - \xi_0)\nabla\sigma_n)_n$ è limitata in L^∞. Questo è sufficiente a concludere la dimostrazione in questo caso. □

Osservazione 2.6.14. Per completare la dimostrazione del teorema 2.6.13 nel caso in Ω è un aperto qualsiasi e u è una qualsiasi funzione in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ bisogna utilizzare il fatto che le funzioni in $W^{1,\infty}$ sono differenziabili quasi ovunque; allora è possibile ricoprire Ω (a meno di un insieme di misura piccola) con palle in cui u è "approssimativamente affine"; a questo punto, ci si riconduce al caso mostrato esplicitamente nella dimostrazione del teorema 2.6.13.

2.6.3 Rango 1-convessità

Definizione 2.6.15 (Rango 1-convessità)**.**
Sia $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione; si dice che f è rango 1-convessa se per ogni $\xi_0, \xi_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tali che $\mathrm{rk}(\xi_1 - \xi_0) = 1$ per ogni $\lambda \in [0,1]$ vale che

$$f(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_0) \leq \lambda f(\xi_1) + (1-\lambda)f(\xi_0).$$

Teorema 2.6.16. *Sia $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ una funzione quasiconvessa. Allora f è rango 1-convessa. In particolare, se $\min\{n;m\} = 1$, f è convessa.*

Dimostrazione. Siano $\xi_1, \xi_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tali che $\mathrm{rk}(\xi_1 - \xi_0) = 1$; per questa ragione, possiamo scrivere $\xi_1 - \xi_0 = a \otimes b$ (utilizzando la notazione del prodotto tensoriale), con $a \in \mathbb{R}^m$ (vettore colonna) e $b \in \mathbb{R}^n$ (vettore riga). Sia $\lambda \in [0,1]$; detto $\xi := \lambda\xi_0 + (1-\lambda)\xi_1$, dobbiamo provare che

$$f(\xi) \leq \lambda f(\xi_0) + (1-\lambda)f(\xi_1).$$

Come nella dimostrazione del teorema 2.5.1, consideriamo una funzione $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodica, continua e affine a tratti, tale che

$$v(x) = \begin{cases} \lambda x & x \in [0, 1-\lambda], \\ (\lambda-1)x + (\lambda-1)^2 & x \in [1-\lambda, 1]. \end{cases}$$

Dato $n \in \mathbb{N}^+$, sia $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0,1])$ scelta come nel primo passo della dimostrazione del teorema 2.5.1; in maniera analoga definiamo la corona circolare C_n. Poniamo

$$v_n(x) := \frac{1}{n} a v(n < b, x >).$$

Notiamo che

$$\nabla v_n(x) = (a \otimes b)v'(n < b, x >) = (\xi_1 - \xi_0)v'(n < b, x >).$$

A questo punto, poniamo

$$u_n(x) := u(x) + v_n(x)\rho_n(x)$$

e la dimostrazione procede in maniera identica a quella del secondo passo del teorema 2.5.1. □

Osservazione 2.6.17. Tutte le implicazioni inverse tra le nozioni di convessitá presentate sono generalmente false se $\min\{n; m\} > 1$: il determinante è un esempio di funzione policonvessa ma non convessa; esistono controesempi di funzioni quasiconvesse ma non policonvesse; se $n \geq 2$ e $m \geq 3$ i famosi controesempi di Šverák mostrano che la convessità rango 1 non implica la quasiconvessità (se $n = m = 2$ troviamo un problema aperto di grande importanza).

Vale anche il seguente risultato di regolarità delle funzioni rango 1-convesse.

Teorema 2.6.18. *Sia* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ *una funzione rango 1-convessa. Allora* f *è localmente lipschitziana e, in particolare, è continua.*

Dimostrazione. Essendo f rango 1-convessa, allora è convessa su tutte le rette generate da matrici di rango 1 e, in particolare, è localmente lipschitziana su tali rette. Prese due matrici qualsiasi, è possibile connetterle con segmenti di rango 1 (basta "aggiustare" un'entrata per volta) in modo tale che la lunghezza totale sia paragonabile alla distanza delle matrici. A questo punto, sfruttando il fatto che le funzioni convesse sono localmente lipschitziane (e che si utilizzano sempre le stesse rette per connettere due matrici) si conclude. □

Capitolo 3

Misure di Young

3.1 Costruzione

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e $(u_n)_n$ una successione di funzioni da Ω in $\mathbb{R}$ che converge puntualmente (oppure quasi ovunque) ad una funzione u. Allora, per ogni $g \in C(\mathbb{R})$ vale che $g \circ u_n \to g \circ u$ puntualmente (oppure quasi ovunque). Sia $p \in [1, +\infty)$; supponiamo che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$ e sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua. É vero che $(g \circ u_n)_n$ converge a $g \circ u$ in qualche senso? La domanda è mal posta e, in generale, non c'è convergenza a meno che g non sia affine. Le misure di Young sono uno strumento particolare per studiare il comportamento al limite della successione $(g \circ u_n)_n$ quando g non è affine.

Esempio 3.1.1. Definiamo la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) := \begin{cases} 1 & x \in [2k, 2k+1) \ k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & x \in [2k+1, 2k) \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dato $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$u_n(x) := u(nx);$$

consideriamo la restrizione di u_n all'intervallo $[0, 1]$. Fissato $p \in [1, +\infty)$, vale che $u_n \rightharpoonup u_\infty \equiv 0$ debolmente in $L^p((0, 1))$. Tuttavia, se $g(x) = x^2$, si ha che $g \circ u_n(x) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la successione $(g \circ u_n)_n$ non può convergere a $g \circ u_\infty \equiv 0$ in nessun senso ragionevole.

Vogliamo introdurre la nozione di misura di Young, che è uno strumento fondamentale per trattare in maniera elegante il problema appena esposto. Ci limiteremo al caso in cui $p = +\infty$ e $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(\Omega)$. I risultati che presenteremo si possono riprodurre anche nel caso di $p \in [1, +\infty)$.

Nel seguito, siano dati un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e uno spazio metrico compatto $(K; d)$ (in particolare K è separabile); denotiamo con $\mathscr{P}(K)$ lo spazio delle misure boreliane su K che siano misure di probabilità. Ricordiamo che per il teorema di rappresentazione di Riesz, lo spazio delle misure boreliane su K a valori in $\mathbb{R}$ (con la distanza della variazione totale), che denotiamo con $\mathscr{M}(K)$, è isometrico al duale di $C(K)$; essendo $\mathscr{P}(K)$ un sottoinsieme di tale spazio, possiamo dotarlo della topologia debole*.

Definizione 3.1.2 (Debole*-boreliana)**.**
Si dice che una funzione $\mu : \Omega \to \mathscr{M}(K)$ è debole*-boreliana se è boreliana, avendo dotato $\mathscr{P}(K)$ della topologia debole*.

Osservazione 3.1.3. Se $\mu : \Omega \to \mathscr{M}(K)$ è una funzione debole*-boreliana, per ogni $g \in C(K)$ la mappa di valutazione

$$\Omega \ni x \to \int_K g(y)\ d\mu_x(y) \in \mathbb{R}$$

è boreliana.

Prima di presentare il risultato fondamentale sulle misure di Young, ricordiamo alcuni fatti.

Teorema 3.1.4. *Sia E uno spazio di Banach separabile; il duale di $L^1(\Omega; E)$ coincide con $L^\infty_w(\Omega; E')$ (funzioni boreliane rispetto alla σ-algebra generata dalla topologia debole* in E' che siano limitate quasi ovunque). Date $u \in L^1(\Omega; E)$ e $v \in L^\infty_w(\Omega; E')$ si pone l'accoppiamento di dualità*

$$< v, u >:= \int_\Omega < v(x), u(x) >\ dx,$$

dove il simbolo $< \cdot, \cdot >$ dentro l'integrale indica la valutazione di $v(x)$ (elemento di E') in $u(x)$ (elemento di E).

Osservazione 3.1.5. Se E è uno spazio di Banach separabile, le topologie debole e forte definiscono la stessa σ-algebra su E (segue dalla caratterizzazione duale della norma).

Osservazione 3.1.6. Lo spazio $C(K)$ è separabile; lo spazio $L^1(\Omega; C(K))$ è separabile. In particolare, possiamo utilizzare la versione sequenziale del teorema di Banach-Alaoglu (vedi 2.1.11) nel duale di $L^1(\Omega; C(K))$ che coincide con $L^\infty_w(\Omega; C(K)')$, ovvero $L^\infty_w(\Omega; \mathscr{M}(K))$.

Teorema 3.1.7 (Teorema fondamentale delle misure di Young)**.**
Sia $v_n : \Omega \to K$ una successione di mappe boreliane. Esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una mappa $\mu : \Omega \to \mathscr{M}(K)$ debole-boreliana tale che $\mu_x \in \mathscr{P}(K)$ per quasi ogni $x \in \Omega$ con le seguenti proprietà:*

1. *per ogni $g : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ boreliana tale che $g(x; \cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e*
$$\int_\Omega \sup_{y \in K} |g(x; y)|\ dx < +\infty,$$
si ha che
$$\int_\Omega g(x; v_n(x))\ dx \to \int_\Omega \left(\int_K g(x; y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx;$$

2. *per ogni $g \in C(K; \mathbb{R})$ vale che*
$$g \circ v_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K g(y)\ d\mu_x(y)$$
debole in $L^\infty(\Omega)$;*

3. *per ogni $g : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ boreliana, globalmente limitata e tale che $g(x; \cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che*
$$g(x; v_n(x)) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K g(x; y)\ d\mu_x(y)$$
debole in $L^\infty(\Omega)$.*

Se $K \subseteq \mathbb{R}^m$, vale anche che

4 $v_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K y \, d\mu_x(y) := v_\infty(x)$ *(baricentro di μ_x) debole* in $L^\infty(\Omega)$;*

5 *se supponiamo anche che Ω abbia misura finita, la misura μ_x coincide con $\delta_{v_\infty(x)}$ per quasi ogni $x \in \Omega$ se e solo se $(v_n)_n$ converge in misura a v_∞.*

La mappa $\mu : \Omega \to \mathscr{P}(K)$ è chiamata misura di Young generata dalla (sotto)successione $(v_n)_n$.

Dimostrazione. **Punto 1**: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo la mappa $\mu^n : \Omega \to \mathscr{P}(K)$ tale che

$$\mu_x^m := \delta_{v_n(x)}.$$

Notiamo che $(\mu_n)_n$ è una successione di mappe in $L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K))$ uniformemente limitata; possiamo applicare il teorema di Banach-Alaoglu (vedi 2.1.11) e deduciamo che esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una mappa $\mu \in L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K))$ tale che $\mu^n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K)) = L_w^\infty(\Omega; C(K)')$. Scriviamo esplicitamente cosa abbiamo trovato: una mappa $G \in L^1(\Omega; C(K))$ corrisponde ad una mappa $g : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ boreliana tale che $g(x; \cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e inoltre

$$\int_\Omega \sup_{y \in K} |g(x; y)| \, dx < +\infty.$$

La convergenza debole* in $L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K))$ implica che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega < \mu_x^n, G(x) > \, dx = \int_\Omega < \mu_x, G(x) > \, dx,$$

dove il simbolo $< \cdot, \cdot >$ dentro gli integrali indica l'accoppiamento di dualità di $C(K)$ con $\mathscr{M}(K)$, ovvero l'integrale di $G(x)$ (che è un elemento di $C(K)$) rispetto a μ_x^n o μ_x (che sono misure su K). In altri termini, vale che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega g(x; v_n(x)) \, dx = \int_\Omega \left(\int_K g(x; y) \, d\mu_x(y) \right) \, dx.$$

A questo punto, possiamo dedurre che μ_x è una misura di probabilità per quasi ogni $x \in \Omega$. Sia $\alpha \in L^1(\Omega)$; testando la convergenza debole* con $g(x; y) = \alpha(x)$, troviamo che

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha(x) \, dx &= \lim_{n \to} \int_\Omega g(x; v_n(x)) \, dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_K \alpha(x) \, d\mu_x(y) \right) \, dx \\ &= \int_\Omega \alpha(x) \mu_x(K) \, dx. \end{aligned}$$

Essendo α una funzione arbitraria in $L^1(\Omega)$, deduciamo facilmente che $\mu_x(K) = 1$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Dalla semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole* segue che

$$\|\mu\|_{L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K))} \leq \liminf \|\mu^n\|_{L_w^\infty(\Omega; \mathscr{M}(K))} = 1.$$

In altri termini, per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che la variazione totale di μ_x è minore o uguale di 1. Poichè $\mu_x(K) = 1$ per quasi ogni $x \in \Omega$, si ha che per quasi ogni $x \in \Omega$ deve valere che μ_x è una misura non negativa (se $\mu_x(A) < 0$ per qualche insieme boreliano A, la variazione totale di μ_x sarebbe maggiore di 1).

Punto 2: Siano $g \in C(K)$ e $\alpha \in L^1(\Omega)$. La funzione $\Phi : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(x; y) \coloneqq \alpha(x)g(y)$$

è boreliana, per ogni $x \in \Omega$ vale che $\Phi(x; \cdot)$ è continua e inoltre

$$\int_\Omega \sup_{y\in K} |\Phi(x; y)| \ dx \leq \|\alpha\|_{L^1(\Omega)} \sup_{y\in K} |g(y)| < +\infty.$$

Allora vale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Phi(x; v_n(x)) \ dx = \int_\Omega \left(\int_K \Phi(x; y) \ d\mu_x(y) \right) \ dx.$$

In altri termini, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \alpha(x)g(v_n(x)) \ dx = \int_\Omega \alpha(x) \left(\int_K g(y) \ d\mu_x(y) \right) \ dx.$$

Per definizione, vale che

$$g \circ v_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K g(y) \ d\mu_x(y)$$

debole* in $L^\infty(\Omega)$.

Punto 3: Si procede in maniera analoga al punto 2, prendendo $\alpha \in L^1(\Omega)$ e osservando che la globale limitatezza di g assicura che $\Phi : \Omega \times K \to \mathbb{R}$ tale che

$$\Phi(x; y) = \alpha(x)g(x; y)$$

sia una funzione ammissibile su cui testare la convergenza debole*.

Punto 4: Se $K \subseteq \mathbb{R}^m$, si sceglie $\alpha \in L^1(\Omega)$ e si procede come nel punto 2, testando la convergenza debole* con la funzione $\Phi(x; y) \coloneqq \alpha(x)y$ definita su $\Omega \times K$ (è una funzione test ammissibile perchè K è compatto) a valori in $\mathbb{R}^m$.

Punto 5: Sia ancora $K \subseteq \mathbb{R}^m$ e assumiamo che Ω abbia misura finita. Supponiamo che $(v_n)_n$ converga a v_∞ in misura. In tal caso, poniamo

$$\Phi(x; y) = |y - v_\infty(x)| \, .$$

Notiamo che Φ è boreliana, fissato $x \in \Omega$ la funzione $\Phi(x; \cdot) \in C(K)$ e inoltre Φ è globalmente limitata:

$$\sup_{(x;y)\in\Omega\times K} |\Phi(x; y)| \leq \sup_{y\in K} |y| + \sup_{x\in\Omega} \int_K |y| \ d\mu_x(y) \leq 2 \sup_{y\in K} |y| < +\infty,$$

essendo K limitato e μ_x una misura di probabilità per (quasi) ogni $x \in \Omega$. Per il punto 3 vale che

$$|v_n(x) - v_\infty(x)| \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K |y - v_\infty(x)| \ d\mu_x(y)$$

debole* in $L^\infty(\Omega)$. In particolare, testiamo la convergenza debole* con $\mathbb{1}_\Omega$ e troviamo che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |v_n(x)-v_\infty(x)|\ dx = \int_\Omega\left(\int_K |y-v_\infty(x)|\ d\mu_x(y)\right)\ dx.$$
Notiamo che $(v_n)_n$ è uniformemente limitata (assume valori nel compatto K); la convergenza in misura implica l'esistenza di una (ulteriore) sottosuccessione, che non rinominiamo, che converge puntualmente quasi ovunque a v_∞. Essendo Ω un insieme di misura finita, possiamo utilizzare il teorema di convergenza dominata (passando ad una sottosuccessione) e deduciamo che
$$0=\int_\Omega\left(\int_K |y-v_\infty(x)|\ d\mu_x(y)\right)\ dx.$$
Allora, per quasi ogni $x\in\Omega$ vale che
$$\int_K |y-v_\infty(x)|\ d\mu_x(y)=0;$$
denotiamo con Ω_0 l'insieme dei punti in Ω con questa proprietà. A questo punto è immediato dedurre che μ_x è concentrata in $v_\infty(x)$. A meno di intersecare Ω_0 con un altro insieme di misura piena, abbiamo che μ_x è una misura di probabilità su K concentrata in $v_\infty(x)$, ovvero $\mu_x=\delta_{v_\infty(x)}$.

Viceversa, supponendo che $\mu_x=\delta_{v_\infty(x)}$ per quasi ogni $x\in\Omega$, con le stesse argomentazioni, si deduce che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |v_n(x)-v_\infty(x)|\ dx = \int_\Omega\left(\int_K |y-v_\infty(x)|\ d\mu_x(y)\right)\ dx=0.$$
In altri termini, $v_n\to v_\infty$ in $L^1(\Omega)$, da cui segue la convergenza in misura di tutta la sottosuccessione. □

Esempio 3.1.8. Siano $\Omega=\mathbb{R}$, $\lambda\in[0,1]$, $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione 1-periodica tale che
$$f(x):=\begin{cases} y_1 & x\in[0,\lambda),\\ y_2 & x\in[\lambda;1).\end{cases}$$
Per ogni $n\in\mathbb{N}$ poniamo
$$v_n(x):=f(nx).$$
La successione $(v_n)_n$ assume soltanto due valori, quindi possiamo applicare il teorema 3.1.7 e dedurre che esiste una sottosuccessione (non rinominata) tale che $v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v_\infty$ debole* in L^∞ e vale che
$$v_\infty(x)=\int_K y\ d\mu_x(y),$$
dove $K=\{y_1;y_2\}$ e μ_x è una misura di probabilità su K (è la misura di Young generata dalla sottosuccessione). In altri termini, esiste una funzione boreliana $\theta:\mathbb{R}\to[0,1]$ tale che
$$\mu_x=\theta_x\delta_{y_1}+(1-\theta_x)\delta_{y_2},\quad v_\infty(x)=\theta_x y_1+(1-\theta_x)y_2$$
per quasi ogni $x\in\mathbb{R}$. Se $g:K\to\mathbb{R}$ è tale che $g(y_1)=1$ e $g(y_2)=0$, troviamo che
$$g\circ v_n(x)\overset{*}{\rightharpoonup} g(y_1)\theta_x+g(y_2)(1-\theta_x)=\theta_x.$$

Testando la convergenza debole* con la funzione $\mathbb{1}_A$, dove A è un qualsiasi intervallo limitato, troviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}\left(x \in A \mid v_n(x) = y_1\right) = \int_A \theta_x \, dx.$$

Del resto, un calcolo diretto (elementare, ma piuttosto laborioso) mostra che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{L}\left(x \in A \mid v_n(x) = y_1\right) = \lambda \mathscr{L}(A).$$

Deduciamo che $\theta_x = \lambda$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. In conclusione, otteniamo che

$$\mu_x = \lambda\delta_{y_1} + (1-\lambda)\delta_{y_2}.$$

Precisiamo che avremmo potuto anche mostrare in maniera diretta che per ogni funzione $g \in C_c(\mathbb{R})$ vale che

$$g \circ v_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda g(y_1) + (1-\lambda)g(y_2),$$

senza utilizzare uno strumento potente come il teorema 3.1.7.

Esempio 3.1.9. Siano $\Omega = \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 1-periodica e limitata; per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$u_n(x) \coloneqq u(nx).$$

La successione $(u_n)_n$ assume valori in un insieme limitato; pertanto si può applicare il teorema 3.1.7. Deduciamo l'esistenza di una misura di Young associata ad una (sotto)successione; si può verificare che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\mu_x = u_\#(\mathscr{L}_{\lfloor[0,1]}),$$

ovvero il push-forward tramite u della misura di Lebesgue in $[0,1]$); in particolare μ_x è quasi ovunque indipendente da x.

Osservazione 3.1.10. Se sostituiamo nel teorema 3.1.7 K con $\mathbb{R}^m$, bisogna lavorare con la compattificazione ad un punto di $\mathbb{R}^m$; si ottiene l'esistenza di una mappa $\overline{\mu} : \Omega \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^m \cup \{\infty\})$. Restringendo queste misure a $\mathbb{R}^m$, si ottiene una mappa $\mu : \Omega \to \mathscr{M}(K)$ con proprietà simili a quelle delle misure di Young introdotte nel teorema 3.1.7, con l'unica differenza che in generale μ_x è una sub-probabilità. Aggiungendo qualche ipotesi sulla successione $(v_n)_n$ (ad esempio, una limitazione in L^p per qualche $p > 1$), si riesce a provare che μ_x è una probabilità per quasi ogni $x \in \Omega$.

3.2 Applicazione ai teoremi di semicontinuità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto; possiamo utilizzare le misure di Young per dare una dimostrazione alternativa dei teoremi di semicontinuità inferiore per funzionali integrali, almeno nel caso in cui siano definiti in $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Lemma 3.2.1. *Siano $(K; d)$ uno spazio metrico compatto, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \times K \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana. Per ogni funzione boreliana $u : \Omega \to K$ possiamo ben definire il funzionale*

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega f(x; u(x)) \, dx.$$

Sia $u_n : \Omega \to K$ una successione di funzioni boreliane. Supponiamo che esista una misura di Young associata alla successione, come nel teorema 3.1.7, che denotiamo con $\mu : \Omega \to \mathscr{P}(K)$.

1. *Se $f(x;\cdot)$ è semicontinua inferiormente per quasi ogni $x \in \Omega$ ed è tale che $\sup_{y\in K} |f(\cdot;y)| \in L^1(\Omega)$, vale che*

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \int_\Omega \left(\int_K f(x;y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx.$$

2. *Supponiamo in aggiunta che $K \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f(x;\cdot)$ sia convessa; per (quasi) ogni $x \in \Omega$ definiamo il baricentro di μ_x, ovvero*

$$u_\infty(x) := \int_K y\ d\mu_x(y).$$

Vale che $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_\infty$ in $L^\infty(\Omega)$ e inoltre

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \int_\Omega f(x;u_\infty(x))\ dx.$$

Dimostrazione. **Punto 1**: Ragionando come nel primo passo del teorema 2.4.2 (le argomentazioni presentate si adattano facilmente), esiste successione di funzioni $\Phi_i : \Omega \times K \to [0,+\infty)$ boreliane con le seguenti proprietà:

- per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la funzione $\Phi_i(x;\cdot)$ è continua;
- per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $y \in K$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$0 \leq \Phi_i(x;y) \leq \Phi_{i+1}(x;y)$$

  e inoltre

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \Phi_i(x;y) = f(x;y).$$

Dalle proprietà di integrabilità di f segue che per ogni $i \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \sup_{y\in K} |\Phi_i(x;y)|\ dx < +\infty.$$

Allora possiamo applicare il teorema 3.1.7 e troviamo che

$$\Phi_i(x;v_n(x)) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_K \Phi_i(x;y)\ d\mu_x(y).$$

Sia Ω' un insieme in Ω limitato; testando la convergenza debole* con $\mathbb{1}_{\Omega'}$ troviamo che

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} \Phi_i(x;u_n(x))\ dx \\ &= \int_{\Omega'} \left(\int_K \Phi_i(x;y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx.\end{aligned}$$

Poichè Ω ammette un'esaustione in compatti, utilizzando il teorema di Beppo Levi, troviamo che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \int_\Omega \left(\int_K \Phi_i(x;y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx;$$

passando all'estremo superiore in i con il teorema di Beppo Levi, troviamo

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \geq \int_\Omega \left(\int_K f(x;y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx.$$

Punto 2: Se $K \subseteq \mathbb{R}^m$, segue immediatamente dal teorema 3.1.7 che $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_\infty$. Ricordiamo che μ_x è una misura di probabilità su K per quasi ogni $x \in \Omega$; utilizzando la disuguaglianza di Jensen troviamo che

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) &\geq \int_\Omega \left(\int_K f(x;y)\ d\mu_x(y) \right)\ dx \\ &\geq \int_\Omega f\left(x; \int_K y\ d\mu_x(y) \right)\ dx \\ &= \int_\Omega f(x;u_\infty(x))\ dx.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to [0,+\infty]$ una funzione boreliana. Possiamo ben definire il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(x;u;\nabla u)\ dx$$

nello spazio $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Supponiamo che f goda delle seguenti proprietà:

- *$f(x;\cdot;\cdot)$ è semicontinua inferiormente per quasi ogni $x \in \Omega$;*
- *per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$ la funzione*

$$\sup_{(u;\xi)\in K} |f(\cdot;u;\xi)|$$

  appartiene a $L^1(\Omega)$;
- *per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $u \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(x;u;\cdot)$ è convessa.*

Allora il funzionale F è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.*

Dimostrazione. Sia (u_n) una successione in $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ che converge debole* a u_∞; dobbiamo provare che

$$F(u_\infty) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Innanzitutto osserviamo che, a meno di passare a sottosuccessioni, possiamo supporre che il limite inferiore sia un limite. La successione $(u_n)_n$ converge ad u uniformemente; la successione $(\nabla u_n)_n$ converge in debole* in $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Deduciamo che tali successioni assumono valori in due insiemi limitati, diciamo $K \subseteq \mathbb{R}^m$, $H \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$. A patto di estrarre ulteriori sottosuccessioni, per il teorema 3.1.7, possiamo considerare le misure di Young $\mu : \Omega \to \mathscr{P}(K)$ e $\nu : \Omega \to \mathscr{P}(H)$ associate rispettivamente alle successioni $(u_n)_n$ e $(\nabla u_n)_n$. Dal punto 5 del teorema 3.1.7 segue che $\mu_x = \delta_{u_\infty(x)}$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Notiamo che $(u_n;\nabla u_n)_n$ è una successione che assume valori in $K \times H$; a meno di passare a ulteriori sottosuccessioni, sia $\lambda : \Omega \to \mathscr{P}(K \times H)$ la misura di Young associata alla successione $(u_n; \nabla u_n)_n$. Si verifica facilmente che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\lambda_x = \mu_x \otimes \nu_x = \delta_{u_\infty(x)} \otimes \nu_x.$$

Concludiamo con le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) &\geq \int_\Omega \left(\int_{K\times H} f(x; u; \xi)\ d\lambda_x(u; \xi) \right)\ dx && (3.1)\\
&= \int_\Omega \left(\int_H f(x; u_\infty(x); \xi)\ d\nu_x(\xi) \right)\ dx && (3.2)\\
&\geq \int_\Omega f\left(x; u_\infty(x); \int_H \xi\ d\nu_x(\xi) \right)\ dx && (3.3)\\
&= \int_\Omega f(x; u_\infty(x); \nabla u_\infty(x))\ dx. && (3.4)
\end{aligned}$$

In (3.1) abbiamo utilizzato il lemma 3.2.1 e l'ipotesi di integrabilità su f; in (3.2) abbiamo utilizzato la forma di λ_x per quasi ogni $x \in \Omega$; in (3.3) abbiamo utilizzato il fatto che ν_x è una probabilità su H per quasi ogni $x \in \Omega$ e la disuguaglianza di Jensen. In (3.4) abbiamo utilizzato il teorema 3.1.7 perchè

$$\nabla u_n(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_H \xi\ d\nu_x(\xi);$$

tuttavia, per ipotesi vale che $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u_\infty$. Allora deduciamo che

$$\nabla u_\infty(x) = \int_\Omega \xi\ d\mu_x(\xi)$$

per quasi ogni $x \in \Omega$. □

Le misure di Young sono lo strumento essenziale per dare una dimostrazione elegante (evitando eccessivi tecnicismi) del teorema seguente, che enunciamo per completezza.

Teorema 3.2.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ una funzione boreliana con le seguenti proprietà:*

- *per quasi ogni $x \in \Omega$, la funzione $f(x; \cdot; \cdot)$ è semicontinua inferiormente;*
- *per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n}$ la funzione*

  $$\sup_{(u;\xi)\in K} |f(\cdot; u; \xi)|$$

  appartiene ad $L^1(\Omega)$;
- *per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che per ogni $p \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(x; p; \cdot)$ è quasiconvessa.*

Allora, il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega f(x; u; \nabla u)\ dx$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Osservazione 3.2.4. Si consideri la misura di Young $x \to \mu_x$ generata dalla successione $(\nabla u_n)_n$ (che è uniformemente limitata in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$). Allora per quasi ogni $x \in \Omega$ la misura di probabilità μ_x appartiene alla classe

$$\left\{ (T_\xi)_\# (\nabla v)_\# \mathscr{L} \;\middle|\; v \in W_0^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m),\ \xi \in \mathbb{R}^{m \times n} \right\},$$

dove T_ξ è l'operatore di traslazione di vettore ξ su $\mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathscr{L}$ è la misura di Lebesgue rinormalizzata sulla palla. Data una funzione $v \in W_0^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m)$, si ha che

$$\int_B \nabla v \; dx = 0,$$

ovvero la misura di Young generata dalla successione ha baricentro 0 per quasi ogni $x \in \Omega$. Segue che una funzione $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to [0, +\infty)$ quasiconvessa soddisfa la condizione

$$\int_B f(\xi + x) \; d(\nabla v)_\# \mathscr{L} \geq f(\xi)$$

per ogni $v \in W_0^{1,\infty}(B; \mathbb{R}^m)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, che è una disuguaglianza di tipo Jensen.

Osservazione 3.2.5. Utilizzando le misure di Young generate da una successione limitata in L^p per qualche $p \in (1, +\infty)$ è possibile dimostrare la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ di funzionali integrali del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(x; u; \nabla u) \; dx,$$

con f che soddisfa ipotesi nello spirito di quelle del teorema 3.2.2.

Capitolo 4

Rilassato

4.1 Definizioni e proprietà elementari

Nel seguito supponiamo che sia assegnato uno spazio metrico $(\mathbb{X}; d)$; sia $F : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ un funzionale qualsiasi. Precisiamo che la nozione di rilasssato si può introdurre anche in un contesto topologico; tuttavia, seguiremo un approccio diverso, unitario, coerente e motivato dalle applicazioni. Inoltre, ci limiteremo ad analizzare il caso di funzionali non negativi per comodità, nonostante questo non sia davvero restrittivo.

Definizione 4.1.1 (Rilassato)**.**
Introduciamo il funzionale $\overline{F} : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\overline{F}(u) := \inf \left\{ \liminf_{n\to+\infty} F(v_n) \;\middle|\; v_n \to u \right\}.$$

Si dice che $\overline{F}$ è il rilassato di F in $\mathbb{X}$.

Osservazione 4.1.2. Per il rilassato $\overline{F}$, vale generalmente che

$$\overline{F}(u) \leq \liminf_{v\to u} F(v);$$

infatti, in questo caso si esclude la successione costante e può succedere che

$$F(u) < \liminf_{v\to u} F(v),$$

mentre nella definizione di rilassato (vedi 4.1.1), anche le successioni costanti sono competitori ammissibili. In generale vale che

$$\overline{F}(u) \leq F(u).$$

Esempio 4.1.3. Se consideriamo la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

è immediato notare che

$$\overline{F}(0) = 0 < 1 = \liminf_{x\to 0} F(x).$$

Definizione 4.1.4 (Inviluppo semicontinuo inferiore)**.**
Introduciamo il funzionale $G : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\hat{F}(x) := \sup \left\{ \varphi(x) \;\middle|\; \varphi \leq F,\ \varphi \text{ è semicontinua inferiormente} \right\}.$$

Il funzionale $\hat{F}$ è detto inviluppo semicontinuo inferiore di F.

Osservazione 4.1.5. L'inviluppo semicontinuo inferiore di F è sempre ben definito; infatti la funzione identicamente nulla è un minorante semicontinuo inferiormente di F. Ricordiamo anche che l'estremo superiore puntuale di una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente è ancora una funzione semicontinua inferiormente. Allora l'inviluppo semicontinuo inferiore di F è la più grande funzione semicontinua inferiormente che è puntualmente minore o uguale ad F.

Lemma 4.1.6. *Siano $F : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione e $\overline{F}$ il suo rilassato. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni $r > 0$ esiste $y \in \mathbb{X}$ tale che*

$$d(x; y) \leq r \quad F(y) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per definizione di $\overline{F}$, esiste una successione $(y_n)_n$ che tende ad x tale che

$$\liminf_{n \to +\infty} F(y_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon.$$

Notiamo che questa caratterizzazione vale anche nel caso in cui $\overline{F}(x) = +\infty$. Segue che

$$F(y_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$$

frequentemente in n. Allora basta scegliere $y = y_n$ con n abbastanza grande tra quelli che realizzano la stima suddetta. □

Proposizione 4.1.7 (Esistenza della recovery sequence)**.**
L'estremo inferiore nella definizione di rilassato (vedi 4.1.1) è un minimo, cioè per ogni $u \in \mathbb{X}$ esiste una successione $(u_n)_n$ in $\mathbb{X}$ tale che $u_n \to u$ e $F(u_n) \to \overline{F}(u)$. Si dice che $(u_n)_n$ è una recovery sequence per u.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \mathbb{X}$. Applicando il lemma 4.1.6 con $\varepsilon_n = r_n = \frac{1}{n}$ troviamo che esiste una successione (x_n) in $\mathbb{X}$ tale che

$$d(x_n; x) \leq \frac{1}{n}, \quad F(y_n) \leq \overline{F}(x) + \frac{1}{n}.$$

Passando al limite, troviamo che

$$x_n \to x, \quad \liminf_{n \to +\infty} F(x_n) \leq \overline{F}(x);$$

essendo l'altra disuguaglianza ovvia per definizione, deduciamo che vale la tesi. □

Proposizione 4.1.8 (Caratterizzazione del rilassato)**.**
Il rilassato $\overline{F}$ coincide con l'inviluppo semicontinuo inferiore di F; in particolare $\overline{F}$ è semicontinuo inferiormente.

Dimostrazione. Denotiamo con $\hat{F}$ l'inviluppo semicontinuo inferiore di F. Proviamo che $\overline{F} \geq \hat{F}$. Siano $x \in \mathbb{X}$ e $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ che converge a x. Vale che

$$\liminf_{n\to+\infty} F(x_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} \hat{F}(x_n) \geq \hat{F}(x),$$

essendo $\hat{F}$ semicontinuo inferiormente. Passando all'estremo inferiore sulle successioni che convergono a x troviamo che

$$\overline{F}(x) \geq \hat{F}(x).$$

Per mostrare la disuguaglianza opposta è sufficiente provare che $\overline{F}$ è semicontinuo inferiormente ed è maggiorato da F. Scegliendo per ogni $x \in \mathbb{X}$ la successione costante, troviamo immediatamente che $\overline{F} \leq F$. Siano $x \in \mathbb{X}$ e $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ che converge a x; dobbiamo provare che

$$\overline{F}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \overline{F}(x_n).$$

Applichiamo il lemma 4.1.6 con $\varepsilon_n = r_n = \frac{1}{n}$ scegliendo x_n come punto; deduciamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in \mathbb{X}$ tale che

$$d(x_n; y_n) \leq \frac{1}{n}, \quad F(y_n) \leq \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

Si nota immediatamente che $y_n \to x$; inoltre si ha

$$\overline{F}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(y_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n} = \liminf_{n\to+\infty} \overline{F}(x_n).$$

□

Definizione 4.1.9 (Denso in energia)**.**
Sia $D \subseteq \mathbb{X}$. Si dice che D è denso in energia per F se per ogni $u \in \mathbb{X}$ esiste una successione $(d_n)_n$ in D tale che $d_n \to u$ e $F(d_n) \to F(u)$.

Proposizione 4.1.10. *Sia $G : \mathbb{X} \to [0, +\infty]$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *$G \leq F$;*
- *G è semicontinua inferiormente;*
- *esiste $D \subseteq \mathbb{X}$ denso in energia per G (vedi 4.1.9) tale che per ogni $d \in D$ esiste $(u_n)_n \in \mathbb{X}$ tale che*
$$u_n \to d \quad \limsup_{n\to} F(u_n) \leq G(d);$$
in altri termini, richiediamo l'esistenza della recovery sequence in D.

Allora G è il funzionale rilassato di F.

Dimostrazione. Le prime due ipotesi garantiscono che G è minore o uguale dell'inviluppo semicontinuo inferiore di F; allora $G \leq \overline{F}$ per la proposizione 4.1.8. Proviamo la disuguaglianza opposta; siano $d \in D$ e $(u_n)_n$ una successione in D come nella terza ipotesi. Allora vale che

$$\overline{F}(d) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} F(u_n) \leq G(d);$$

deduciamo che $\overline{F} \leq G$ in D. Siano $x \in \mathbb{X}$ e $(x_n)_n$ una successione in D tale che

$$x_n \to x \quad G(x_n) \to G(x).$$

Si ha che

$$\overline{F}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \overline{F}(x_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} G(x_n) = G(x).$$

□

Proposizione 4.1.11 (Stabilità per perturbazioni continue)**.**
Supponiamo che $G : \mathbb{X} \to [0, +\infty)$ sia una funzione continua. Allora vale che

$$\overline{F + G} = \overline{F} + G.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\overline{F} + G$ è una funzione semicontinua inferiormente maggiorata da $F + G$; deduciamo che

$$\overline{F} + G \leq \overline{F + G}.$$

Siano dati $x \in \mathbb{X}$ e $(x_n)_n)$ una recovery sequence per x relativa a F (vedi 4.1.7); vale che

$$\overline{F + G}(x) \leq \lim_{n\to+\infty} F(x_n) + G(x_n) = \overline{F}(x) + G(x),$$

essendo G una funzione continua. □

Proposizione 4.1.12. *Vale che*

$$\inf_{u\in\mathbb{X}} F(u) = \inf_{u\in\mathbb{X}} \overline{F}(u).$$

Inoltre, se F è coercivo in $\mathbb{X}$, allora anche $\overline{F}$ è coercivo in $\mathbb{X}$. In particolare $\overline{F}$ ha minimo in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Essendo ovviamente $\overline{F} \leq F$ (basta scegliere per ogni $x \in \mathbb{X}$ la successione costante), si deduce che

$$\inf_{u\in\mathbb{X}} \overline{F}(u) \leq \inf_{u\in\mathbb{X}} F(u).$$

Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ tale che

$$\lim \overline{F}(x_n) = \inf_{\mathbb{X}} \overline{F}(x).$$

Applichiamo il lemma 4.1.6 con $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $r_n = 1$ scegliendo come punto x_n. Deduciamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in \mathbb{X}$ tale che

$$d(x_n; y_n) \leq 1, \quad F(y_n) \leq \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

Deduciamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{X}} F \leq \liminf_{n\to+\infty} F(y_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n} = \inf_{x\in\mathbb{X}} \overline{F}.$$

Supponiamo che F sia coercivo (vedi 2.1.5), cioè che per ogni $M > 0$ il sottolivello

$$K_M := \{x \in \mathbb{X} \mid F(x) \leq M\}$$

è relativamente compatto. Fissato $M > 0$, sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{X}$ tale $\overline{F}(x_n) \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Applicando il lemma 4.1.6 con $\varepsilon_n = 1$, $r_n = \frac{1}{n}$ e scegliendo come punto x_n, troviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in \mathbb{X}$ tale che

$$d(x_n; y_n) \leq \frac{1}{n}, \quad F(y_n) \leq \overline{F}(x_n) + 1.$$

Deduciamo che $(y_n)_n$ è nel sottolivello K_{M+1} relativo a F. Per ipotesi, esiste una sottosuccessione (non rinominata) convergente a y; è immediato notare che anche $(x_n)_n$ converge a y. Concludiamo osservando che, in questo caso, $\overline{F}$ ha minimo in $\mathbb{X}$, essendo una funzione coerciva e semicontinua inferiormente. □

Corollario 4.1.13. *Supponiamo che F ammetta un sottolivello non vuoto (cioè che non è identicamente $+\infty$) e che F sia coercivo.*

1. *Consideriamo una successione $(u_n)_n$ in $\mathbb{X}$ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{x\in\mathbb{X}} F(x).$$

Esistono una sottosuccessione (non rinominata) e un punto $u \in \mathbb{X}$ tali che $u_n \to u$ e u è punto di minimo per $\overline{F}$.

2. *Sia u un punto di minimo per $\overline{F}$ in $\mathbb{X}$; esiste una successione $(u_n)_n$ in $\mathbb{X}$ tale che $u_n \to u$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{x\in\mathbb{X}} F(x).$$

3. *F ha minimo se e solo se esiste $u \in \mathbb{X}$ che sia punto di minimo per $\overline{F}$ ed è tale che $F(u) = \overline{F}(u)$.*

Dimostrazione. **1)**: Sia $(u_n)_n$ una successione come nel primo punto; allora $(u_n)_n$ appartiene definitivamente ad un sottolivello di F relativamente compatto. A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che $u_n \to u$; per definizione, vale che

$$\overline{F}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{x\in\mathbb{X}} F = \inf_{x\in\mathbb{X}} \overline{F},$$

avendo usato la proposizione 4.1.12; deduciamo che u è punto di minimo di $\overline{F}$.

2): Sia u un punto di minimo in $\mathbb{X}$ per $\overline{F}$; consideriamo una recovery sequence $(u_n)_n$ per u (vedi 4.1.7). Notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \overline{F}(u) = \min_{x\in\mathbb{X}} \overline{F} = \inf_{x\in\mathbb{X}} F,$$

avendo usato ancora la proposizione 4.1.12.

3): Supponiamo che esista $u \in \mathbb{X}$ che sia punto di minimo per $\overline{F}$ e $F(u) = \overline{F}(u)$; deduciamo che

$$F(u) = \overline{F}(u) = \min_{x\in\mathbb{X}} \overline{F} = \inf_{x\in\mathbb{X}} F;$$

allora u è punto di minimo per F. Viceversa, se u è punto di minimo per F, si ha che

$$\overline{F}(u) \leq F(u) = \min_{x\in\mathbb{X}} F = \inf_{x\in\mathbb{X}} \overline{F};$$

si deduce che $F(u) = \overline{F}(u)$ e che u è punto di minimo per $\overline{F}$. □

Osservazione 4.1.14. Il corollario 4.1.13 può essere utilizzato per mostrare che F non ha minimo in $\mathbb{X}$.

Concludiamo questa lista di semplici risultati (che abbiamo dimostrato utilizzando soltanto le definizioni introdotte) enunciando un teorema generale, la cui dimostrazione è piuttosto complessa.

Teorema 4.1.15. *Siano $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ una funzione semicontinua inferiormente, $p \in (1, +\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Possiamo definire il funzionale*

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)\ dx$$

nello spazio $W^{1,p}(\Omega)$. Supponiamo che F sia coercivo. Il rilassato di F rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$ è il funzionale

$$\overline{F}(u) := \int_\Omega g(\nabla u)\ dx,$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ è l'inviluppo convesso di f.

Osservazione 4.1.16. A margine del teorema 4.1.15, precisiamo che la coercività di F segue da qualche ipotesi di crescita su f; inoltre, non è affatto ovvio che $\overline{F}$ abbia una rappresentazione integrale. Tuttavia, la tesi del teorema è del tutto ragionevole: il funzionale

$$G(u) := \int_\Omega g(\nabla u)\ dx$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$ perchè g è convessa; in qualche senso, g è la più grande integranda che assicura la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$ di un funzionale integrale dipendente solo dal gradiente.

4.2 Estensione di funzionali integrali

Siano Ω un aperto limitato e di classe C^1; consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2\ dx$$

che è ben definito in $\mathbb{X} := C^1_{u_0}(\overline{\Omega})$. Abbiamo mostrato (vedi 1.7) che se u minimizza F in $\mathbb{X}$ ed è di classe $C^2(\overline{\Omega})$, allora risolve il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega, \\ u = u_0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Tuttavia, non c'è garanzia che tale punto di minimo regolare esista. Una possibile strategia per affrontare il problema è la seguente: si può estendere F a $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$, provare l'esistenza del minimo in questo spazio tramite il metodo diretto e, infine, mostrare che i punti di minimo sono regolari. Questo approccio sembra vantaggioso perchè gli spazi di Sobolev hanno buone proprietà di compattezza (a differenza degli spazi di funzioni tradizionali, come C^1). L'estensione naturale di F a $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$ è la seguente:

$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, dx,$$

dove il gradiente è inteso in senso debole (ricordiamo che il gradiente classico coincide con quello debole sulle funzioni di classe C^1). Procedendo come in 2.3.10, si ottiene facilmente l'esistenza del minimo in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Dalla stretta convessità del funzionale segue anche l'unicità del punto di minimo, che chiamiamo $\overline{u}$. Rimane da studiare la regolarità di $\overline{u}$: questo è il passo più difficile, che affronteremo in seguito. Esistono teoremi che, sotto qualche ipotesi aggiuntiva su Ω, garantiscono che $\overline{u}$ è regolare.

In generale, siano $\mathbb{X}'$ uno spazio di funzioni regolari e F un funzionale su $\mathbb{X}'$. Lo spazio $\mathbb{X}'$ non ha buone proprietà di compattezza; allora si possono cercare uno spazio $\mathbb{X}$ che contenga $\mathbb{X}'$ (per il quale si abbiano teoremi di compattezza abbastanza generali) ed un funzionale F_{ext} che estende F a $\mathbb{X}$. Se F_{ext} è coercivo e semicontinuo inferiormente, allora ammette minimo $u \in \mathbb{X}$. Infine, vorremmo mostrare che u è regolare, cioè appartiene allo spazio $\mathbb{X}'$: in tal caso, u minimizza F in $\mathbb{X}'$. Tuttavia, questo programma presenta alcune notevoli difficoltà:

- la teoria della regolarità è piuttosto difficile;

- la regolarità può fallire, cioè può accadere che i punti di minimo di F_{ext} non diano informazioni sull'estremo inferiore di F in $\mathbb{X}'$. In altri termini, vorremmo che esista un legame tra i punti di minimo di F_{ext} in $\mathbb{X}$ e i punti di accumulazione delle successioni $(u_n)_n$ in $\mathbb{X}'$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \inf_{x\in\mathbb{X}'} F(x)$$

  Queste proprietà ricordano il risultato ottenuto nel corollario 4.1.13.

In maniera del tutto esplicita, un'estensione ragionevole può essere costruita nel modo seguente. Siano dati uno spazio metrico $\mathbb{X}$, un sottoinsieme $\mathbb{X}'$ di $\mathbb{X}$ e un funzionale $F : \mathbb{X}' \to [0, +\infty]$.

Definizione 4.2.1. Si consideri in funzionale

$$G(x) := \begin{cases} F(x) & x \in \mathbb{X}', \\ +\infty & x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}'. \end{cases}$$

Allora si pone

$$F_{\text{ext}} := \overline{G}.$$

Osservazione 4.2.2. Dalla definizione di rilassato (vedi 4.1.1), ricordiamo che

$$F_{\text{ext}}(u) = \begin{cases} \inf \left\{ \liminf\limits_{n\to+\infty} F(u_n) \;\middle|\; u_n \to u,\ (u_n)_n \subseteq \mathbb{X} \right\} & u \in \overline{\mathbb{X}'} \\ +\infty & u \in \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{X}'}. \end{cases}$$

Le domande cruciali sono le seguenti: è vero che F_{ext} è un'estensione di F, cioè che coincide con F sullo spazio $\mathbb{X}'$? É possibile dedurre informazioni sull'estremo inferiore di F in $\mathbb{X}'$ e sulle successioni che lo realizzano studiando i punti di minimo di F_{ext} in $\mathbb{X}$ (ammesso che esistano, ovviamente)?

4.2.1 Alcuni esempi significativi

Presentiamo alcuni esempi di particolare rilevanza. É dato un funzionale F definito su uno spazio $\mathbb{X}'$ di funzioni regolari; lo estendiamo ad un funzionale G su uno spazio di Sobolev $\mathbb{X}$ ponendolo $+\infty$ fuori da $\mathbb{X}$ e rilassiamo il funzionale G, trovando F_{ext} come nella definizione 4.2.1. Vogliamo calcolare F_{ext}.

Nei prossimi esempi, assumiamo che siano dati un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ di classe C^∞ ed una funzione $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ovviamente queste ipotesi possono essere indebolite, ma non vogliamo indagare questi aspetti perchè non sono essenziali in questo contesto.

Esempio 4.2.3. Siano $\mathbb{X}' := C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathbb{X} := W^{1,2}(\Omega)$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ una funzione tale che $g(x; \cdot)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$. Supponiamo anche che esista una costante $C > 0$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$g(x; u) \leq C(1 + |u|^2)$$

per ogni $u \in \mathbb{R}$. Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + g(x; u)\right] \, dx$$

definito sullo spazio $C^\infty(\overline{\Omega})$. Vogliamo provare che F_{ext} definito su $W^{1,2}(\Omega)$, rispetto alla convergenza forte, è il funzionale

$$D(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + g(x; u)\right] \, dx,$$

dove il gradiente è inteso in senso debole.

Dimostrazione. Poniamo

$$G(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + g(x; u)\right] \, dx & u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ +\infty & u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus C^\infty(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Dobbiamo mostrare che $D = \overline{G}$, dove il rilassato è fatto rispetto alla convergenza forte in $W^{1,2}(\Omega)$. Osserviamo che $D \leq G$; è banale osservare che D è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza forte in $W^{1,2}(\Omega)$ (in realtà è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole); segue che $D \leq \overline{G}$.

Per la regolarità di Ω, per ogni $u \in W^{1,2}(\Omega)$ esiste una successione $(u_n)_n$ in $C^\infty(\overline{\Omega})$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$. In particolare, vale che $G(u_n) \to D(u)$: è sufficiente verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega |g(x; u_n) - g(x; u)| \, dx = 0. \tag{4.1}$$

Possiamo equivalentemente mostrare che per ogni sottosuccessione esiste una ulteriore sottosuccessione per cui vale (4.1). Fissata una sottosuccessione (non rinominata), esiste una ulteriore sottosuccessione (non rinominata) tale che $u_n \to u$ puntualmente quasi ovunque in Ω ed esiste una funzione $w \in L^2(\Omega)$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che $|u_n(x)| \leq w(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che $g(x; u_n(x)) \to g(x; u(x))$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Allora, utilizzando il teorema di convergenza dominata (con dominazione w) e l'ipotesi di crescita di g, troviamo la relazione (4.1) per l'opportuna sottosuccessione estratta. Concludiamo che $D = \overline{G}$ per la proposizione 4.1.10. $\square$

Precisiamo che l'ipotesi di continuità di g nella seconda variabile può essere indebolita (è sufficiente la semicontinuità inferiore) utilizzando strumenti nello spirito del teorema di Lusin.

Esempio 4.2.4. Siano $\mathbb{X}' := C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$ e $\mathbb{X} := W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx$$

definito sullo spazio $\mathbb{X}'$. Vogliamo provare che F_{ext} definito su $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$, rispetto alla convergenza forte, è il funzionale

$$D(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx,$$

dove il gradiente è inteso in senso debole.

Dimostrazione. Poniamo

$$G(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx & u \in C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega}), \\ +\infty & u \in W^{1,2}_{u_0}(\Omega) \setminus C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Dobbiamo mostrare che $D = \overline{G}$, dove il rilassato è fatto rispetto alla convergenza forte in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Osserviamo che D è continuo rispetto alla convergenza forte (in realtà è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole) e $D \leq G$; segue che $D \leq \overline{G}$ Per la regolarità di Ω, $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$ è uno spazio affine di giacitura $W^{1,2}_0(\Omega)$ (per 6.4.58 e le proprietà di linearità della traccia in 6.4.50). Sia $u \in W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$; vale che $u - u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Per definizione, esiste una successione $(u_n)_n$ in $C^\infty_c(\Omega)$ tale che $u_n \to u - u_0$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Per la regolarità di u_0, la successione $(u_n + u_0)_n$ è in $C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$ (per la precisione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno di $\partial\Omega$ in cui $u_n + u_0$ coincide con u_0). Ovviamente vale che $u_n + u_0 \to u$ fortemente in $W^{1,2}(\Omega)$. In particolare, vale che $G(u_n + u_0) \to D(u)$. Concludiamo che $D = \overline{G}$ per la proposizione 4.1.10. □

Esempio 4.2.5. Siano $\mathbb{X}' := C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$ e $\mathbb{X} := W^{1,2}(\Omega)$; consideriamo il funzionale

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx$$

definito sullo spazio $\mathbb{X}'$. Il funzionale F_{ext} definito sullo spazio $\mathbb{X}$ rispetto alla convergenza forte in $W^{1,2}(\Omega)$ è tale che

$$F_{\text{ext}}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx & u \in W^{1,2}_{u_0}(\Omega), \\ +\infty & u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W^{1,2}_{u_0}(\Omega). \end{cases}$$

Per verificarlo si può procedere come nell'esempio 4.2.4, notando che $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$ è un chiuso in $W^{1,2}(\Omega)$ (infatti l'operatore traccia è continuo).

Esempio 4.2.6. Consideriamo lo spazio

$$\mathbb{X}' := \left\{ u \in C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial u_0}{\partial \eta}(x) \; x \in \partial\Omega \right\},$$

dove $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ indica la derivata normale. Denotiamo con $\mathbb{X} := W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

definito in $\mathbb{X}'$. Analizzando le argomentazioni esposte nell'esempio 4.2.4, notiamo che abbiamo provato che F_{ext} definito su $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$, rispetto alla convergenza forte, è il funzionale

$$D(u) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Nella definizione dello spazio $\mathbb{X}'$ abbiamo imposto condizioni al bordo di Dirichlet e di Neumann.

Notiamo che è possibile costruire $v \in C^{\infty}_{u_0}(\overline{\Omega})$ tale che per ogni $x \in \partial\Omega$ vale che

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(x) = 0.$$

La costruzione è totalmente elementare in dimensione 1 (in tal caso, infatti, Ω è un intervallo limitato). Se $d \geq 2$, per il teorema dell'intorno tubolare, esiste $\delta > 0$ tale che la mappa $\Phi : \partial\Omega \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ definita da

$$\Phi(x; t) := x - t\eta(x)$$

è un diffeomorfismo (C^{∞} con inversa di classe C^{∞}), dove η è la normale esterna a $\partial\Omega$. Denotiamo con $U_{2\delta}(\partial\Omega)$ l'intorno tubolare di $\partial\Omega$ di ampiezza δ (cioè l'immagine di $\Omega \times (-\delta, \delta)$ tramite la mappa Φ). Poniamo $v : U_{2\delta}(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$v(y) := u_0(\pi_x(\Phi^{-1}(y))),$$

dove $\pi_x : \Omega \times (-\delta, \delta) \to \Omega$ è la proiezione sul primo fattore. Notiamo che $U_{2\delta}(\Omega)$ è un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $v \in C^{\infty}(U_{2\delta}(\Omega))$; inoltre per ogni $x \in \partial\eta$ vale che

$$v(x) = u_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial \eta}(x) = 0.$$

A questo punto, si può estendere (per convoluzione, ad esempio) v ad una funzione v_1 di classe $C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ in modo che $v = v_1$ in $U_{\delta}(\partial\Omega)$.

Questo fatto, in un certo senso, dice che le condizioni di Neumann e di Dirichlet che possiamo imporre sulle funzioni regolari sono decisamente slegate, nel senso che abbiamo moltissima libertà nell'imporre il valore delle funzioni al bordo e della loro derivata normale. Tuttavia, per quanto discusso, estendendo il problema in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$ e rilassandolo, notiamo che i vincoli sulla derivata normale sono completamente ignorati. Del resto, non c'è modo di tradurre questa informazione (che ha perfettamente senso per le funzioni regolari) nel contesto delle funzioni di Sobolev, che sono definite quasi ovunque; invece la nozione di traccia estende (in maniera consistente) il concetto di restrizione delle funzioni regolari al bordo nel contesto delle funzioni di Sobolev.

Detto ciò, utilizzando il metodo diretto (vedi 2.3.10) abbiamo mostrato che il funzionale D ammette minimo in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$; dalla stretta convessità si deduce facilmente che il punto di minimo è unico. Utilizzando la teoria della regolarità (lo vedremo in seguito), si riesce a mostrare che il punto di minimo u appartiene a $W^{2,2}(\Omega)$; in particolare, è ben definita (nel senso di traccia) $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Pur riuscendo a dimostrare che u è in $C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$, la derivata normale al bordo (che ha senso nella teoria classica) assume un valore fissato. Quindi, il minimo del funzionale D appartiene allo spazio $\mathbb{X}'$ soltanto in un caso molto "fortunato". In tutti gli altri, il funzionale F non ha minimo in $\mathbb{X}'$ (vedi 4.1.13).

In conclusione, notiamo che stiamo esaminando (in maniera del tutto rigorosa) lo stesso fenomeno che si poneva nell'esempio 1.2.6.

4.3 p-capacità

La nozione di p-capacità sorge naturalmente dallo studio del rilassato di funzionali integrali in cui si vogliono imporre vincoli puntuali più o meno stringenti.

Esempio 4.3.1. Siano $p \in (1, +\infty)$, $x_0 \in \Omega$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia

$$\mathbb{X}' := \{u \in C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega}) \mid u(x_0) = \alpha\}.$$

Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx$$

definito sullo spazio $\mathbb{X}'$. Sia $\mathbb{X} := W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$. Consideriamo il funzionale F_{ext} definito sullo spazio $\mathbb{X}$ rispetto alla convergenza forte in $W^{1,p}(\Omega)$.

1. Se $p \leq d$, allora F_{ext} coincide con il funzionale

$$D(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx$$

   definito su tutto lo spazio $\mathbb{X}$, dove il gradiente è inteso in senso debole.

2. Se $p > d$, introduciamo lo spazio

$$\mathbb{X}'' := \{u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega) \mid u(x_0) = \alpha\}.$$

   Notiamo che lo spazio $\mathbb{X}''$ è ben definito, perchè se $p > d$ lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in $C^0(\overline{\Omega})$ (vedi 6.4.43), pertanto ha senso prescrivere i valori puntuali delle funzioni di Sobolev (intendendo che sono quelli del rappresentante continuo nella classe di equivalenza). In tal caso F_{ext} coincide con il funzionale

$$D(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \ dx & u \in \mathbb{X}'' \\ +\infty & u \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}'' \end{cases}$$

Dimostrazione. Innanzitutto possiamo supporre che $x_0 = 0$.

Passo 1: Sia $p \leq d$; affermiamo che esiste una successione $(v_n)_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:

- $v_n(0) = \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- v_n è supportata in $B\left(0; \frac{1}{n}\right)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- $v_n \to 0$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.

Costruiamo esplicitamente questa successione nel caso in cui $p < d$. Sia $v \in C_c^\infty(B(0;1))$ tale che $v(0) = \alpha$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$v_n(x) \coloneqq v(nx).$$

Osserviamo che le prime due proprietà richieste sono banalmente soddisfatte. Ricordiamo che

$$\mathscr{L}\left(B\left(0;\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\omega_d}{n^d},$$

dove ω_d è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^d$. Inoltre

$$\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq \|v\|_{L^\infty(B(0;1))}^p \frac{\omega_d}{n^d},$$

da cui si deduce immediatamente che $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. Per quanto riguarda i gradienti, vale che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v_n|^p \; dx &= n^p \int_{B\left(0;\frac{1}{n}\right)} |\nabla v(nx)|^p \; dx \\ &= \frac{n^p}{n^d} \int_{B(0;1)} |\nabla v(y)|^p \; dy \\ &= \frac{1}{n^{d-p}} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p ;\end{aligned}$$

essendo $p < d$ si deduce che $\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$.

Precisiamo che se $p = d$, la dimostrazione data fallisce, ma può essere forzata scegliendo una successione di funzioni che non siano tutti riscalamenti di uno stesso profilo. In ogni caso, questo risultato equivale al fatto che se $p \leq d$ non vale l'immersione di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^d)$ (ovvero che l'immersione $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^d)$ non è continua rispetto alla norma di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$).

Passo 2: Sia $p \leq d$; poniamo

$$G(u) \coloneqq \begin{cases} F(u) & u \in \mathbb{X}', \\ +\infty & u \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}'. \end{cases}$$

Il funzionale D è fortemente continuo in $W_{u_0}^{1,p}(\Omega)$ (in realtà è debolmente semicontinuo inferiormente) e vale banalmente $D \leq G$; segue che $D \leq \overline{G}$. Per concludere, basta mostrare che per ogni $u \in \mathbb{X}$ esiste $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, cioè che $\mathbb{X}'$ è denso in $\mathbb{X}$, e concludere applicando la proposizione 4.1.10. Abbiamo mostrato nell'esempio 4.2.4 che $C_{u_0}^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{1,2}(\Omega)$; con le stesse argomentazioni, si mostra che $C_{u_0}^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p \in [1,+\infty)$. Allora è sufficiente mostrare che, se $p \leq d$, vale che $\mathbb{X}'$ è denso in $C_{u_0}^\infty(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma di $W^{1,p}(\Omega)$. Siano $u \in C_{u_0}^\infty(\overline{\Omega})$ e sia $(v_n)_n$ la successione costruita nel primo passo, costruita in modo tale che $v_n(0) = \alpha - u(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. A meno di eliminare i primi termini della successione, possiamo supporre che $(v_n)_n$ sia in $C_c^\infty(\Omega)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$u_n(x) \coloneqq u(x) + v_n(x).$$

Per costruzione, la successione $(u_n)_n$ è contenuta in $\mathbb{X}'$ ed è tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Passo 3: Sia $p > d$. Innanzitutto notiamo che lo spazio $\mathbb{X}''$ è chiuso in $W^{1,p}(\Omega)$: infatti, per i teoremi di Morrey (vedi 6.4.41) e di Ascoli-Arzelà, se $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, allora $u_n \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega}$. Se poniamo

$$G(u) := \begin{cases} F(u) & u \in \mathbb{X}', \\ +\infty & u \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}', \end{cases}$$

deduciamo immediatamente che $F_{\mathrm{ext}}(u) = +\infty$ se $u \notin \mathbb{X}''$ (infatti $F_{\mathrm{ext}} = \overline{G}$). Ovviamente vale che $D \leq G$ e inoltre D è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza forte in $W^{1,p}(\Omega)$. Dobbiamo provare che per ogni $u \in \mathbb{X}''$ esiste $(u_n)_n$ in $\mathbb{X}'$ tale che $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$. Siano $u \in \mathbb{X}''$ e $(u_n)_n$ una successione in $C^{\infty}_{u_0}(\overline{\Omega})$ che converge a u in $W^{1,p}(\Omega)$. Come discusso in precedenza, a meno di sottosuccessioni, si può assumere che $u_n \to u$ uniformemente in $\overline{\Omega}$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $B(0;\varepsilon) \subseteq \Omega$. A meno di passare a ulteriori sottosuccessioni, possiamo supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che per ogni $x \in B(0;\varepsilon)$ si abbia

$$|u_n(x) - u(x)| \leq 2^{-n}.$$

Allora è possibile costruire (per convoluzione, ad esempio) una successione $(v_n)_n \in C^{\infty}_c(B(0;\varepsilon))$ tale che

- $v_n(x) = \alpha - u_n(0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in B\left(0; \frac{\varepsilon}{2}\right)$;
- $|v_n(x)| \subseteq [0, 2^{-n}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in B(0;\varepsilon)$;
- esiste una costante $C > 0$ tale che $|\nabla v_n(x)| \leq C 2^{-n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in B(0;\varepsilon)$.

In particolare, deduciamo che $v_n \to 0$ in $W^{1,p}(\Omega)$. La successione $(u_n + v_n)_n$ è contenuta in $\mathbb{X}'$ ed è tale che $u_n + v_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Concludiamo notando che il risultato ottenuto è perfettamente coerente con i seguenti fatti:

- se $p \leq d$ non ha senso definire valori puntuali per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$
- se $p > d$ è possibile definire in maniera consistente i valori puntuali di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.

Infine, notiamo che nel caso in cui $p \leq d$ abbiamo provato in 2.3.10 che il funzionale F_{ext} ha minimo in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ ignorando completamente il vincolo puntuale in x_0. Per la stretta convessità, tale punto di minimo è unico. Se anche riuscissimo a provare che il punto di minimo è di classe $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ (la teoria di regolarità L^p è veramente dura), allora il suo valore in x_0 è fissato. Quindi il funzionale F generalmente non avrebbe minimo in $\mathbb{X}'$ (tranne in un caso molto "fortunato").

Siano $K \subseteq \Omega$ un insieme compatto e $p \in [1, +\infty)$; definiamo lo spazio

$$\mathbb{X}' := \{u \in C^{\infty}_{u_0}(\overline{\Omega}) \mid u_{|K} \equiv 0\}.$$

Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx$$

definito sullo spazio $\mathbb{X}'$. Per quali K vale che

$$F_{\text{ext}}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \ dx$$

su tutto lo spazio $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ dotato della convergenza forte? L'esempio 4.3.1 risponde a questa domanda nel caso in cui K è un punto: la risposta è affermativa se $p \le d$, è negativa se $p > d$. A tal proposito, introduciamo la nozione di p-capacità: seguiremo un approccio coerente, ma certamente non il più generale.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, $K \subseteq \Omega$ un insieme relativamente compatto e $p \in [1, +\infty)$. Definiamo gli spazi

$$\mathbb{X}' := \{v \in C^\infty_c(\Omega) \mid v \ge 1 \text{ in un intorno di } K\},$$

$$\mathbb{X}'' := \{v \in C^\infty_c(\Omega; [0,1]) \mid v = 1 \text{ in un intorno di } K\},$$

$$\mathbb{Y}' := \{v \in \mathrm{Lip}_c(\Omega) \mid v \ge 1 \text{ in un intorno di } K\},$$

$$\mathbb{Y}'' := \{v \in \mathrm{Lip}_c(\Omega; [0,1]) \mid v = 1 \text{ in un intorno di } K\}.$$

Sia $D : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ il funzionale

$$D(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx.$$

Lemma 4.3.2. *Vale che*

$$\inf_{u\in\mathbb{X}'} D(u) = \inf_{u\in X''} D(u) = \inf_{u\in\mathbb{Y}'} D(u) = \inf_{u\in\mathbb{Y}''} D(u).$$

Dimostrazione. **Passo 1**: Dall'inclusione $\mathbb{Y}'' \subseteq \mathbb{Y}'$ segue che

$$\inf_{u\in\mathbb{Y}'} D(u) \le \inf_{u\in\mathbb{Y}''} D(u).$$

Sia $T_{[0,1]} : \mathbb{Y}' \to \mathbb{Y}''$ l'operatore di troncamento tra 0 e 1. Notiamo che $T_{[0,1]}$ è ben definito. Per il lemma 6.4.59 (si veda anche 6.4.29), per ogni $u \in \mathbb{X}'$ si ha che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\left|\nabla T_{[0,1]} u(x)\right| \le |\nabla u(x)|\,.$$

Allora vale che

$$D(T_{[0,1]}u) \le D(u),$$

da cui segue immediatamente che

$$\inf_{u\in\mathbb{Y}'} D(u) \ge \inf_{u\in\mathbb{Y}''} D(u).$$

Passo 2: Dalle inclusioni $\mathbb{X}'' \subseteq \mathbb{X}' \subseteq \mathbb{Y}'$ e dal passo 1 seguono banalmente le disuguaglianze

$$\inf_{u\in\mathbb{Y}''} D(u) = \inf_{u\in\mathbb{Y}'} D(u) \le \inf_{u\in\mathbb{X}'} D(u) \le \inf_{u\in\mathbb{X}''} D(u).$$

Allora è sufficiente provare che

$$\inf_{u\in\mathbb{X}''} D(u) \le \inf_{u\in\mathbb{Y}''} D(u);$$

in altri termini, basta mostrare che per ogni $u \in \mathbb{Y}''$ esiste $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}''$ tale che $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$. Sia $u \in \mathbb{Y}''$; per il lemma 6.4.59 vale che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$; essendo

$\mathscr{L}(\Omega) < +\infty$ vale che $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Possiamo estendere u a 0 fuori da Ω e troviamo ancora una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ (è facile provarlo per definizione: infatti u ha supporto compatto in Ω e si può scrivere $u = u\psi$ dove ψ è una funzione $C_c^\infty(\Omega; [0,1])$ che vale 1 sul supporto di u). Sia ρ un mollificatore (vedi 6.3.2); per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$u_\varepsilon \coloneqq u * \rho_\varepsilon$$

come in 6.4.23: vale che $u_\varepsilon \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Ricordiamo che

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(y-x)\rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\ dy;$$

se ε è abbastanza piccolo vale che $(u_\varepsilon)_\varepsilon \subseteq C_c^\infty(\Omega)$; siccome $u \geq 0$ ovunque (anche $\rho \geq 0$), vale che $u_\varepsilon \geq 0$ ovunque; siccome $u = 1$ in un intorno di K, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un altro intorno di K (più piccolo del precedente) in cui $u_\varepsilon = 1$ (ricordiamo che ρ_ε ha integrale 1). In altri termini, $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ è contenuta definitivamente in $\mathbb{X}''$. □

Il lemma 4.3.2 motiva la seguente definizione.

Definizione 4.3.3 (p-capacità)**.**
Definiamo la p-capacità di K in Ω come l'estremo inferiore del funzionale D in uno qualsiasi degli insiemi $\mathbb{X}', \mathbb{X}'', \mathbb{Y}', \mathbb{Y}''$; la denoteremo come $\mathrm{Cap}_p(K;\Omega)$.

La nozione di p-capacità è motivata dal seguente teorema, di cui diamo una dimostrazione parziale, che si applica allo studio dei problemi con ostacolo (vedi 1.2.9).

Teorema 4.3.4. *Consideriamo il funzionale*

$$F(u) \coloneqq \int_\Omega |\nabla u|^p\ dx$$

definito sullo spazio

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{u \in C_c^\infty(\overline{\Omega}) \mid u_{|K} \equiv 0\}.$$

Sia

$$G(u) \coloneqq \begin{cases} F(u) & u \in \mathbb{Z}, \\ +\infty & u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega) \setminus \mathbb{Z}; \end{cases}$$

denotiamo con F_{ext} il rilassato di G in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$ rispetto alla convergenza forte.

1. *Se $Cap_p(K;\Omega) = 0$, vale che*

$$F_{ext}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\ dx$$

per ogni $u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$.

2. *Se $Cap_p(K;\Omega) > 0$, definiamo*

$$\mathbb{Z}' \coloneqq \{u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega) \mid Cap_p(\{x \in K \mid u(x) \neq 0\};\Omega) = 0\},$$

avendo scelto u approssimativamente continua eccetto che in un insieme di p-capacità nulla. Vale che

$$F_{ext}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\ dx & u \in \mathbb{Z}', \\ +\infty & u \in W^{1,p}_{u_0}(\Omega) \setminus \mathbb{Z}'. \end{cases}$$

Dimostrazione. Verifichiamo soltanto il primo enunciato; supponiamo che $\mathrm{Cap}_p(K;\Omega) = 0$. Sia

$$D(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

definito su $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$. Il funzionale D è continuo rispetto alla convergenza forte e inoltre $D \leq G$. Allora $D \leq \overline{G}$, intendendo il rilassato rispetto alla convergenza forte. Per concludere che $D = F_{\text{ext}}$ è sufficiente provare che, data u appartenente ad un denso in energia per D (vedi 4.1.9) esiste $(u_n)_n \subseteq \mathbb{X}'$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$; a questo punto, si può concludere utilizzando la proposizione 4.1.10. Estendendo le argomentazioni presentate nell'esempio 4.2.4 nel caso in cui $p = 2$ al caso di $p \in [1, +\infty)$, si trova che $C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$ è denso in energia per D in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega)$. Sia $u \in C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$; per definizione di p-capacità (vedi 4.3.3), esiste una successione $(v_n)_n \subseteq C^\infty_c(\Omega;[0,1])$ con le seguenti proprietà:

- per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno aperto U_n di K in Ω tale che per ogni $x \in U_n$ vale che $v_n(x) = 1$;
- vale che $\|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$u_n := u(1 - v_n);$$

notiamo che $(u_n)_n \subseteq C^\infty_{u_0}(\overline{\Omega})$ e $u_n \equiv 0$ in K per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1), vale che

$$\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}), \end{aligned}$$

per una costante C opportuna (dipendente soltanto da p e da Ω). Allora vale $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Osservazione 4.3.5. La p-capacità è monotona rispetto all'inclusione: se $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \Omega$ e K_2 è relativamente compatto in Ω, allora vale che

$$\mathrm{Cap}_p(K_1;\Omega) \leq \mathrm{Cap}_p(K_2;\Omega).$$

Notiamo che nell'esempio 4.3.1 abbiamo provato che se $p \leq d$ ogni punto $x_0 \in \Omega$ è tale che $\mathrm{Cap}_p(x_0;\Omega) = 0$. Supponiamo, invece, $p > d$ e sia $x_0 \in \Omega$ un punto. Data una funzione $u \in C^\infty_c(\Omega;[0,1])$ tale che $u(x_0) = 1$, per l'immersione in $C^0(\Omega)$ (vedi 6.4.57) e per la disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1) esistono costanti C, C' dipendenti soltanto ad Ω e da p tali che

$$1 \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{1,p,\Omega} \leq C \cdot C' \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dalla definizione 4.3.3 segue che $\mathrm{Cap}_p(x_0;\Omega) > 0$.

Infine, esaminiamo alcune proprietà della p-capacità nel caso in cui $1 < p \leq d$.

Proposizione 4.3.6. *Supponiamo che $1 \leq p < d$. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e $K \subseteq \Omega$ un insieme relativamente compatto in Ω. Vale che*

$$Cap_p(K;\Omega) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \ dx \ \middle|\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1]),\ u = 1 \text{ in un intorno di } K\right\}.$$

In altri termini, il numero $Cap_p(K;\Omega)$ non dipende da Ω.

Dimostrazione. Per la definizione data di p-capacità (vedi 4.3.3), vale banalmente che

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \ dx \ \middle|\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ u = 1 \text{ in un intorno di } K\right\} \leq \mathrm{Cap}_p(K;\Omega).$$

Dobbiamo provare l'altra disuguaglianza. Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ tale che $u = 1$ in un intorno di K; è sufficiente mostrare che esiste una successione $(u_n)_n$ in $C_c^\infty(\Omega;[0,1])$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono

- un intorno aperto di K contenuto in Ω in cui $u_n = 1$,
- $\varepsilon_n > 0$ tale che
$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \varepsilon_n$$
e la successione $(\varepsilon_n)_n$ è infinitesima.

Essendo K relativamente compatto in Ω, è possibile costruire (per convoluzione, ad esempio) una successione $(\psi_n)_n \subseteq C_c^\infty(\Omega;[0,1])$ con le seguenti proprietà:

- per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono due aperti K_n, H_n tali che
$$K \subseteq K_n \subseteq H_n \subseteq \Omega,$$
$\psi_n(x) = 1$ per ogni $x \in K_n$, ψ_n ha supporto compatto in H_n ed esiste una costante C indipendente da n tale che
$$\mathscr{L}(H_n \setminus K_n) = C\frac{1}{n^d};$$
- esiste una costante C' tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ per ogni $x \in \Omega$ vale che
$$|\nabla u(x)| \leq C'n.$$

In altri termini, bisogna costruire intorno a K una "corona" di "ampiezza" $\frac{1}{n}$ in cui realizzare un raccordo C^∞ tra il valore 0 (da assumere intorno al bordo di Ω) e il valore 1 (da assumere intorno a K). A questo punto, denotiamo

$$u_n := u\psi_n.$$

Notiamo che la successione $(u_n)_n$ è contenuta in $C_c^\infty(\Omega;[0,1])$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno di K in cui $u_n = 1$. Infine vale che

$$\begin{aligned}\|\nabla(u\psi_n)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \|\psi_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \psi_n\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + C'nC^{\frac{1}{p}}\frac{1}{n^{\frac{d}{p}}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + C''n^{1-\frac{d}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.\end{aligned}$$

La conclusione è immediata notando $p < d$ e prendendo il limite per $n \to +\infty$. $\square$

Osservazione 4.3.7. Vale un risultato analogo a quello del teorema 4.3.6 nel caso in cui $1 < p = d$, nonostante la costruzione fatta non funzioni.

Osservazione 4.3.8. La proposizione 4.3.6 dice che, se $p \leq d$, per minimizzare il funzionale

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx$$

tra tutte le funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ che valgono 1 in un intorno di K conviene scegliere competitori aventi un supporto sempre più vicino a K; se $p > d$, invece, il risultato si inverte. Infatti, consideriamo una funzione una funzione $u \in C_c^\infty(B(0;2);[0,1])$ tale che $u(x) = 1$ in $B(0;1)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$u_n(x) \coloneqq u\left(\frac{x}{n}\right).$$

Notiamo che $(u_n)_n$ è una successione in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ tale che per $u_n(x) = 1$ se $x \in B(0;n)$. Tuttavia, vale che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p \ dx &= \int_{B(0;2n)} \frac{1}{n^p} \left|\nabla u\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p \ dx \\ &= \frac{n^d}{n^p} \int_{B(0;2)} |\nabla u(y)|^p \ dy;\end{aligned}$$

essendo $p > d$ segue che

$$\lim_{n\to} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_n|^p \ dx = 0.$$

Allora, se $p > d$, deduciamo che per ogni insieme limitato $K \subseteq \mathbb{R}^d$ vale che

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \ dx \ \middle|\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ u = 1 \text{ in un intorno di } K\right\} = 0$$

mentre per ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ per ogni insieme K compatto in Ω vale che

$$\mathrm{Cap}_p(K;\Omega) > 0,$$

come provato in 4.3.5.

La proposizione 4.3.6 giustifica la seguente definizione.

Definizione 4.3.9. Sia $1 \leq p < d$; sia $K \subseteq \mathbb{R}^d$ qualsiasi insieme limitato. Denotiamo con

$$\mathrm{Cap}_p(K) \coloneqq \mathrm{Cap}_p(K;\Omega),$$

dove Ω è qualsiasi aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che contiene la chiusura di K.

Corollario 4.3.10. *Supponiamo $1 \leq p < d$. Esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ per ogni $r > 0$ vale che*

$$Cap_p(B(x;r)) = Cr^{d-p}.$$

Dimostrazione. L'invarianza per traslazione di è banale; in altri termini, possiamo supporre che $B(x;r) = B(0;r)$. Notiamo che per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ tale che $u = 1$ in un intorno di $B(0;1)$ vale che

$$u_r(x) \coloneqq u\,(rx)$$

è in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d;[0,1])$ e $u_r = 1$ in un intorno di $B(0;r)$. Inoltre, effettuando un cambio di variabili, si vede facilmente che

$$r^{d-p} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_r|^p \;\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p \;\, dx.$$

Da ciò segue facilmente la proprietà di riscalamento, cioè che

$$\mathrm{Cap}_p(B(0;r)) = \mathrm{Cap}_p(B(0;1))r^{d-p}$$

per ogni $r > 0$. Supponiamo che $\mathrm{Cap}_p(B(0,1)) = 0$; dalla definizione 4.3.9 segue che esiste una successione $(u_n)_n \in C_c^\infty(B(0;2);[0,1])$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno aperto di $B(0;1)$ in cui $u_n = 1$ e inoltre $\nabla u_n \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\|u_n\|_{L^p(B(0;2))} \geq [\mathscr{L}(B(0;1))]^{\frac{1}{p}} > 0,$$

in contrasto con la disuguaglianza di Poincarè (vedi 2.3.1). □

Enunciamo il seguente teorema.

Teorema 4.3.11. *Supponiamo $1 < p < d$. La p-capacità è numerabilmente subadditiva, cioè se $A, (A_i)_i$ sono insiemi limitati in $\mathbb{R}^d$ in quantità al più numerabile tali che $A \subseteq \bigcup_i A_i$, allora vale che*

$$Cap_p(A) \leq \sum_i Cap_p(A_i).$$

In particolare, Cap_p si estende ad una misura esterna definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^d$ (non soltanto sui limitati).

Corollario 4.3.12. *Siano $1 < p < d$ e $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un insieme limitato tale che $\mathcal{H}^{d-p}(A) = 0$. Allora vale che $Cap_p(A) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione esiste una famiglia al più numerabile di palle $(B_i)_i$ che copre A tale che, detto r_i in raggio di B_i, vale che

$$\sum_i r_i^{d-p} \leq \varepsilon.$$

Per il corollario 4.3.10 e per il teorema 4.3.11, esiste una costante $C > 0$ indipendente da ε tale che

$$\mathrm{Cap}_p(A) \leq \sum_i \mathrm{Cap}_p(B_i) \leq \sum_i C r_i^{d-p} \leq C\varepsilon.$$

Si conclude con l'arbitrarietà di ε. □

Esempio 4.3.13 (Relazione con il potenziale elettrostatico).
Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e K un insieme compatto in Ω. Abbiamo definito

$$\mathrm{Cap}_2(K;\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \;\middle|\; u \in C_c^\infty(\Omega;[0,1]),\ u = 1 \text{ in un intorno di } K \right\}.$$

Supponiamo che l'estremo inferiore sia un minimo e che sia realizzato da una funzione di classe $C^2(\Omega)$, cioè che esiste $\bar{u} \in C_c^2(\Omega;[0,1])$ tale che $\bar{u} = 1$ in K e inoltre

$$\mathrm{Cap}_2(K;\Omega) = \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 \, dx.$$

Per quanto mostrato in 1.2.9, $\bar{u}$ risolve il problema differenziale

$$\begin{cases} \Delta\bar{u}(x) = 0 & x \in \Omega \setminus K, \\ \bar{u}(x) = 1 & x \in K, \\ \bar{u}(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilizzando la formula della divergenza, si trova che

$$\mathrm{Cap}_2(K;\Omega) = \int_\Omega < \nabla\bar{u}, \nabla\bar{u} > \, dx = -\int_\Omega \bar{u}\Delta\bar{u} \, dx = -\int_K \Delta\bar{u} \, dx.$$

Se K è un conduttore su cui poniamo della carica con distribuzione $-\Delta u$, la 2-capacità di K in Ω è la minima quantità di carica che bisogna mettere su K (con una distribuzione $-\Delta\bar{u}$) in modo da avere differenza di potenziale 1 tra il conduttore e il bordo di Ω. Abbiamo anche visto che $\mathrm{Cap}_2(K;\Omega)$ non dipende da Ω.

4.4 Fenomeno di Lavrentiev

Sia

$$F(u) = \int_\Omega f(x;u;\nabla u) \, dx$$

un funzionale integrale definito su qualche spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in (1,+\infty)$. Supponiamo che l'aperto Ω sia limitato, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ sia continua nelle tre variabili e convessa in ξ; sotto qualche ipotesi di integrabilità su F, un'applicazione standard del metodo diretto garantisce l'esistenza del minimo di F in $W^{1,p}(\Omega)$. Consideriamo la restrizione di F alle funzioni regolari, diciamo $C^\infty(\overline{\Omega})$; estendiamo per rilassamento $F_{|C^\infty(\overline{\Omega})}$ a tutto $W^{1,p}(\Omega)$ (vedi 4.2.1). Otteniamo ancora il funzionale F? Se così fosse, il minimo di F in $W^{1,p}(\Omega)$ coinciderebbe con quello su $C^\infty(\overline{\Omega})$ e avremmo regolarità della soluzione. In caso contrario, invece, possono sorgere fenomeni patologici. Notiamo che se F è continuo in $W^{1,p}(\Omega)$, la risposta alla domanda posta è certamente affermativa (infatti $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$, almeno se Ω è un aperto regolare). I controesempi a riguardo sono dovuti a Lavrentiev.

Esempio 4.4.1 (Manià/Ball - James, dopo Lavrentiev).
Siano $\alpha, \beta, \gamma > 0$ dei parametri (che fisseremo in seguito). Sia $p \in (1,+\infty)$. Introduciamo lo spazio

$$\mathbb{X} := \{u \in W^{1,p}((0,1)) \mid u(0) = 0,\ u(1) = 2\}.$$

Definiamo in $\mathbb{X}$ il funzionale

$$F(u) := \int_0^1 |2x^\alpha - u|^\beta \, |\dot{u}|^\gamma \ dx.$$

Scegliamo $\alpha \in (0,1)$ tale che $\bar{u}(x) = 2x^\alpha \in \mathbb{X}$; ciò è equivalente a richiedere che $\alpha \in \left(0, 1 - \frac{1}{p}\right)$. Allora il minimo di F in $\mathbb{X}$ è 0 e $\bar{u}$ è l'unico punto di minimo. Tuttavia, possiamo scegliere $\gamma, \beta > 0$ in modo che

$$\inf\{F(u) \mid u \in W^{1,\infty}((0,1)),\ u(0) = 0,\ u(1) = 2\} \geq C > 0.$$

In questo caso, diciamo che si manifesta il fenomeno di Lavrentiev (l'estensione per rilassamento della restrizione di F alle funzioni regolari non coincide con il funzionale di partenza F, pertanto i punti di minimo non sono regolari). Denotiamo con

$$W^{1,\infty}_{u_0}((0,1)) := \{u \in W^{1,\infty}((0,1)),\ u(0) = 0,\ u(1) = 2\}.$$

Innanzitutto notiamo che $\bar{u}$ non appartiene a tale spazio. Data u in $W^{1,\infty}_{u_0}((0,1))$, u è lipschitziana (vedi 6.4.20). Con un argomento di troncamento (non del tutto banale) è possibile mostrare che esiste una funzione crescente $\tilde{u} \in W^{1,\infty}_{u_0}((0,1))$ compresa tra 0 e $\bar{u}$ tale che

$$F(u) \geq F(\tilde{u}).$$

In altri termini, dovendo studiare un estremo inferiore, possiamo supporre che u sia crescente. Denotiamo con a_u il minimo $x \in (0,1)$ in cui $u(x) = x^\alpha$ (dalla lipschitzianità di u segue che $u(x) < x^\alpha$ per x abbastanza piccolo; inoltre, poichè $u(1) = 2$, esiste $\overline{x} \in (0,1)$ in cui $u(\overline{x}) = \overline{x}^\alpha$). Introduciamo un altro parametro δ; se poniamo $u(x) = v(x^\delta)$, da cui segue $\dot{u}(x) = \delta x^{\delta-1}\dot{v}(x^\delta)$, deduciamo che

$$F(u) \geq \int_0^{a_u} x^{\alpha\beta} \, |\dot{u}|^\gamma \ dx \geq \int_0^{a_u} x^{\alpha\beta + (\delta-1)\gamma} \delta^\gamma \left|\dot{v}(x^\delta)\right|^\gamma \ dx.$$

Poniamo $t = x^\delta$, da cui $dt = \delta x^{\delta-1} \ dx$; allora vale che

$$F(u) \geq \int_0^{a_u^\delta} t^{\frac{\alpha\beta + (\gamma-1)(\delta-1)}{\delta}} \delta^{\gamma-1} \, |\dot{v}(t)|^\gamma \ dt.$$

Se imponiamo che

$$\alpha\beta + (\gamma - 1)(\delta - 1) = 0,$$

ovvero

$$\delta = \frac{\alpha\beta}{1-\gamma} + 1,$$

troviamo che

$$F(u) \geq \delta^{\gamma-1} \int_0^{a_u^\delta} |\dot{v}(t)|^\gamma \ dt.$$

Bisogna anche imporre che $\gamma > 1$ e $\delta > 0$; in ogni caso è possibile scegliere γ (in funzione di β) con queste proprietà. Essendo v crescente, notiamo che

$$\int_0^{a_u^\delta} |\dot{v}(t)| \ dt = \int_0^{a_u^\delta} \dot{v}(t) \ dt = v(a_u^\delta) - v(0) = u(a_u) = a_u^\alpha.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder con esponenti γ e $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ (per questo bisogna richiedere $\gamma > 1$), troviamo

$$a_u^\alpha = \int_0^{a_u^\delta} |\dot{v}(t)| \ dt \le \left(\int_0^{a_u^\delta} |\dot{v}(t)|^\gamma \ dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} a_u^{\frac{\delta(\gamma-1)}{\gamma}};$$

elevando all'esponente γ e riordinando i termini, otteniamo che

$$a_u^{\alpha\gamma+\delta(1-\gamma)} \le \int_0^{a_u^\delta} |\dot{v}(t)|^\gamma \ dt.$$

Infine, scegliamo β in modo tale che

$$\alpha\gamma + \delta(1-\gamma) \le 0.$$

Allora otteniamo che

$$\min_{a_u \in [0,1]} a_u^{\alpha\gamma+\delta(1-\gamma)} \ge C > 0.$$

Abbiamo dedotto che

$$F(u) \ge \delta^{\gamma-1} C > 0$$

per ogni $u \in W^{1,\infty}_{u_0}((0,1))$.

Presentiamo un altro esempio importante, di cui diamo soltanto un cenno di dimostrazione.

Teorema 4.4.2. *Siano $\Omega = B(0;1) \subseteq \mathbb{R}^2$, $p \in [1,2)$ e $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ una funzione boreliana tale che $\varphi(x) = 0$ se e solo se $|x| = 1$. Sia $u_0(x) \coloneqq x$; definiamo in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ il funzionale*

$$F(u) \coloneqq \int_B \varphi(u) \left|\nabla u\right|^2 \ dx.$$

- *Vale che*
$$\min \left\{ F(u) \mid u \in W^{1,p}_{u_0}(B;\Omega;\mathbb{R}^2) \right\} = 0 = F\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

- *Esiste $C > 0$ tale che*
$$\inf \left\{ F(u) \mid u \in C^1_{u_0}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2) \right\} \ge C > 0.$$

In particolare, si verifica il fenomeno di Lavrentiev.

Dimostrazione. Diamo soltanto un cenno di dimostrazione. Data $u \in C^1_{u_0}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$, vale che

$$\left|\nabla u\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}\right)^2 \ge 2\left|\det(\nabla u)\right|.$$

Notiamo che

$$F(u) \ge \int_B 2\varphi(u) \left|\det(\nabla u)\right| \ dx \ge \int_{u(\Omega)} 2\varphi(y) \ dy \ge 2\int_\Omega \varphi(y) \ dy = C > 0.$$

La seconda disuguaglianza segue dal cambio di variabili $y = u(x)$ e dal fatto che u in generale non è iniettiva (quindi c'è una disuguaglianza); la terza, invece, segue dal fatto che una funzione continua dalla palla in $\mathbb{R}^2$ che coincide con l'identità sul bordo della palla è tale che la sua immagine contiene tutta la palla (è un risultato classico di topologia generale). Notiamo, invece, che $u(x) := \frac{x}{|x|} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ se e solo se $p \in [1, 2)$; infatti, $\nabla u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ e $\frac{1}{|x|} \in L^p(\Omega)$ se e solo se $p \in [1, 2)$: sicuramente $u \in W^{1,p}(\Omega \setminus \{0\}; \mathbb{R}^2)$ per $p \in [1, 2)$; utilizzando la formula della divergenza (si integra su corone circolari che invadono la palla) è immediato far vedere che il gradiente classico di u fa funzionare la formula di integrazione per parti anche con funzioni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (limitate, ma non necessariamente nulle intorno a 0). $\square$

Osservazione 4.4.3. A margine del teorema 4.4.2, precisiamo che, con conti assolutamente analoghi, si può ottenere che $F(u) \geq C > 0$ per ogni $u \in W^{1,\infty}_{u_0}(\Omega; \mathbb{R}^2)$: serve la formula di coarea per giustificare il cambio di variabili. La disuguaglianza può essere estesa anche a tutte le funzioni $u \in W^{1,q}_{u_0}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ per ogni $q > 2$ (in questo caso, però, non è semplice ottenere delle formule di coarea). Infine, il funzionale F è continuo in $W^{1,p}_{u_0}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ per ogni $p > 2$; in questo caso, quindi, non si manifesta il fenomeno di Lavrentiev.

Capitolo 5

Variazione prima negli spazi di Sobolev

5.1 Il caso uni-dimensionale

Presentiamo il problema della regolarità in dimensione 1 con dei semplici esempi.

Esempio 5.1.1. Sia $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana con le seguenti proprietà:

- $g(x; \cdot)$ è di classe C^1 per quasi ogni $x \in [a, b]$;
- esiste $c \in L^1((a, b))$ tale che
$$\max\{|g(x; u)| \,; |g_u(x; u)|^2\} \leq c(x)$$
per quasi ogni $x \in [a, b]$.

Consideriamo il funzionale
$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2}(\dot{u})^2 + g(x; u)\right] \, dx,$$
definito in $W^{1,2}_{\bar{u}}((a, b))$. Abbiamo provato che F è ben definito in $W^{1,2}_{\bar{u}}((a, b))$ e ammette minimo in tale spazio tramite il metodo diretto (vedi 2.3.10). Sia u un punto di minimo per F in $W^{1,2}_{\bar{u}}((a, b))$. Osserviamo che per ogni $v \in C^\infty_c((a, b))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che $u + tv \in W^{1,2}_{\bar{u}}((a, b))$. Essendo u punto di minimo, si deduce che
$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|\dot{u} + t\dot{v}|^2 + g(x; u + tv)\right\} \, dx \\
&= \int_a^b [\dot{u}\dot{v} + g_u(x; u)v] \, dx,
\end{aligned}$$
dove abbiamo derivato sotto il segno di integrale (ciò è possibile perchè le ipotesi su g consentono di applicare il teorema 6.1.3). In altri termini, per ogni $v \in C^\infty_c((a, b))$ vale che
$$\int_a^b \dot{u}\dot{v} \, dx = -\int_a^b v g_u(x; u) \, dx,$$

che è equivalente ad affermare che $\dot{u} \in W^{1,2}((a,b))$ e che la sua derivata distribuzionale è $g_u(x;u)$. Segue che $\dot{u}$ è una funzione continua e, quindi, u è di classe $C^1((a,b))$. Se $g_u(x;u)$ è di classe $C^0((a,b))$, allora deduciamo che $\dot{u}$ è di classe $C^1((a,b))$ e quindi u è di classe $C^2((a,b))$. In tal caso, u risolve l'equazione

$$u'' = g(x;u) \quad x \in (a,b)$$

in senso classico, cioè intendendo tutte le derivate in senso forte.

In generale, se $g(x;u)$ è di classe $C^k((a,b))$, vale che $\dot{u}$ è di classe $C^{k+1}((a,b))$ e, quindi, u è di classe $C^{k+2}((a,b))$. Ovviamente u rispetta le condizioni al bordo di Dirichlet, appartenendo allo spazio $W^{1,2}_{\bar{u}}((a,b))$.

Esempio 5.1.2. Sia $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ una funzione boreliana con le seguenti proprietà:

- esiste una costante $C > 0$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha che per ogni $u \in \mathbb{R}$ vale che $g(x;u) \geq C\,|u|^2$;
- $g(x;\cdot)$ è di classe C^1 per quasi ogni $x \in [a,b]$;
- esiste $c \in L^1((a,b))$ tale che
$$\max\{|g(x;u)|\,;|g_u(x;u)|^2\} \leq c(x)$$
per quasi ogni $x \in [a,b]$.

Consideriamo il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{2}(\dot{u})^2 + g(x;u)\right] dx,$$

definito in $W^{1,2}_{\bar{u}}((a,b))$. Abbiamo provato che F è ben definito in $W^{1,2}((a,b))$ e ammette minimo in tale spazio tramite il metodo diretto (vedi 2.3.9). Sia u un punto di minimo per F in $W^{1,2}((a,b))$. Osserviamo che per ogni $v \in C^\infty_c((a,b))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che $u + tv \in W^{1,2}((a,b))$. Essendo u punto di minimo, procedendo in maniera totalmente analoga all'esempio 5.1.1, deduciamo che $\dot{u} \in W^{1,2}((a,b))$ e che la sua derivata distribuzionale è $g_u(x;u)$. Segue che $\dot{u}$ è una funzione continua e, quindi, u è di classe $C^1((a,b))$. Supponiamo che $g_u(x;u)$ sia di classe $C^0((a,b))$; allora vale che $\dot{u}$ è di classe $C^1((a,b))$ e quindi u è di classe $C^2((a,b))$. Allora u risolve l'equazione

$$u'' = g(x;u) \quad x \in (a,b)$$

in senso classico, cioè intendendo tutte le derivate in senso forte.

Se prendiamo $v \in C^\infty([a,b])$ tale che $v(a) = 0, v(b) = 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che $u + tv \in W^{1,2}((a,b))$; allora si ha che

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}F(u+tv)\bigg|_{t=0} \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,|\dot{u}+t\dot{v}|^2 + g(x;u+tv)\right\} dx \\
&= \int_a^b [\dot{u}\dot{v} + g_u(x;u)v]\; dx \\
&= \int_a^b (-u'' + g(x;u))v\; dx + [\dot{u}v]_a^b \\
&= \dot{u}(b),
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti (ciò è possibile perchè $u \in C^2((a,b)) \cap C^1([a,b])$) e utilizzato il fatto che u risolve l'equazione differenziale

$$u'' = g(x;u) \quad x \in (a,b)$$

in senso forte. Ragionando in maniera completamente analoga, si deduce che $\dot{u}(a) = 0$. Abbiamo ottenuto le condizioni al bordo di Neumann.

Osservazione 5.1.3. Gli esempi 5.1.1 e 5.1.2 formalizzano le idee presentate negli esempi 1.2.2 e 1.2.1, in cui assumevamo l'esistenza del punto di minimo e il fatto che fosse di classe C^2 per poter integrare per parti. L'esistenza del minimo è garantita dal metodo diretto; il passaggio di integrazione per parti è assiomatizzato quando si ambienta il problema in uno spazio di Sobolev opportuno.

Esempio 5.1.4. Siano $g : [a,b] \times \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ come nell'esempio 5.1.2 e $p \in (1,+\infty)$. Possiamo ben definire il funzionale

$$F(u) := \int_a^b \left[\frac{1}{p}|\dot{u}|^p + g(x;u)\right] dx$$

nello spazio $W^{1,p}((a,b))$. Sia u punto di minimo per F in tale spazio (abbiamo mostrato che esiste nell'esempio 2.3.9). Notiamo che per ogni $v \in C_c^\infty((a,b))$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale che $u + tv \in W^{1,p}((a,b))$. Come nell'esempio 5.1.1 troviamo che

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}F(u+tv)\bigg|_{t=0} \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{p}|\dot{u}+t\dot{v}|^p + g(x;u+tv)\right\} dx \\
&= \int_a^b \left[\operatorname{sgn}(\dot{u})\,|\dot{u}|^{p-1}\,\dot{v} + g_u(x;u)v\right] dx.
\end{aligned}$$

In altri termini, deduciamo che $\operatorname{sgn}(\dot{u})\,|u|^{p-1} \in W^{1,1}((a,b))$ e che la sua derivata debole è $g_u(x;u)$. Tuttavia, se $p \neq 2$, in generale non si può dedurre nulla su u.

Questa mancanza di regolarità risiede nel fatto che la funzione $\varphi(\xi) := |\xi|^p$ è di classe C^1; tuttavia, se $p \in (1,2)$ non è derivabile due volte in 0, se $p > 2$ è di classe C^2 ma $\varphi''(0) = 0$. Invece, se $p = 2$ è di classe C^2, con derivata seconda limitata dal basso da una costante strettamente positiva.

5.2 Soluzioni deboli

Esempio 5.2.1. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato e di classe C^1. Sia $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana con le seguenti proprietà:

- per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che $g(x;\cdot)$ è di classe C^1;
- esiste una funzione $c \in L^1(\Omega)$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ vale che

$$\max\{|g(x;u)|\,;|g_u(x;u)|^2\} \leq c(x).$$

Definiamo il funzionale

$$F(u) := \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + g(x;u)\right] \, dx$$

in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Abbiamo mostrato nell'esempio 2.3.10 che F ammette minimo in $W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Sia u punto di minimo per F in tale spazio; notiamo che per ogni $v \in C_c^\infty(\Omega)$ vale che $u + tv \in W^{1,2}_{u_0}(\Omega)$. Segue che

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}F(u+tv)\bigg|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla v|^2 + g(x;u+tv)\right\} \, dx \\
&= \int_\Omega [< \nabla u, \nabla v > + g_u(x;u)v] \, dx,
\end{aligned}$$

dove abbiamo derivato sotto il segno di integrale (le ipotesi su g giustificano questo passaggio). Possiamo equivalentemente dire che

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla v > \, dx = -\int_\Omega v g_u(x;u) \, dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Motivati dall'esempio 5.2.1 e dalla formula di Gauss-Green (vedi 6.1.2), possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 5.2.2 (Laplaciano distribuzionale)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto qualsiasi, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$. Si dice che u risolve l'equazione

$$\Delta u = g$$

in senso debole (o distribuzionale) in Ω se per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale che

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla \varphi > \, dx = -\int_\Omega \varphi g \, dx.$$

In analogia al caso uni-dimensionale, vorremmo mostrare che se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (intendendo il laplaciano in senso distribuzionale), allora $u \in W^{2,2}(\Omega)$ e vale una stima del tipo

$$\|u\|_{2,2,\Omega} \leq c(\Omega)\left[\|u\|_{1,2,\Omega} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\right],$$

per una costante $c(\Omega)$ opportuna dipendente soltanto da Ω. Questo risultato è generalmente falso; tuttavia, vale qualcosa del genere.

5.2.1 Regolarità interna

Teorema 5.2.3 (Regolarità L^2 su $\mathbb{R}^d$)**.**
Sia $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ tale che ammette laplaciano distribuzionale (vedi 5.2.2) $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Allora $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ e vale che

$$\|u\|^2_{2,2,\mathbb{R}^d} \leq \frac{3}{2}\left[\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right]. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. **Step 1**: Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$; mostriamo che in tal caso vale la stima (5.1). Per la regolarità di u, possiamo integrare due volte per parti e, osservando che i termini di bordo sono sempre nulli, otteniamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2}\right)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)\, dx\end{aligned}$$

Vale che

$$\begin{aligned}\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla^2 u\right|^2\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\, dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)^2\, dx + \sum_{i\neq j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)^2\, dx + \sum_{i\neq j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)^2\, dx \\ &= \left\|\Delta u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 .\end{aligned}$$

Inoltre, per il teorema della divergenza (il termine di bordo è sempre nullo), vale che

$$\begin{aligned}\left\|\nabla u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} < \nabla u, \nabla u > \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} u \Delta u \, dx \\ &\leq \left\|u \Delta u\right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \left\|\Delta u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left\|u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \left\|\Delta u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\right],\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le disuguaglianze di Hölder e di Young. Allora otteniamo immediatamente la disuguaglianza (5.1).

Step 2: Sia $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, avente supporto compatto. Dato un mollificatore ρ, per ogni $\varepsilon > 0$ sia ρ_ε come nella definizione 6.3.2; sia $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per il lemma 6.4.22, vale che

$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = (\nabla u) * \rho_\varepsilon, \quad \Delta(u * \rho_\varepsilon) = (\Delta u) * \rho_\varepsilon,$$

dove $\nabla u, \Delta u$ sono ovviamente intesi in senso debole. Prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$, vale che $u * \rho_\varepsilon \to u$, $(\nabla u) * \rho_\varepsilon \to \nabla u$ e $(\Delta u) * \rho_\varepsilon \to \Delta u$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$ (vedi 6.3.4). Per quanto provato nel passo precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\left\|u_\varepsilon\right\|_{2,2,\Omega}^2 \leq \frac{3}{2}\left[\left\|u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\Delta u_\varepsilon\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right].$$

In particolare, la successione $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ è di Cauchy in $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$. Segue che $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ e che vale la disuguaglianza (5.1) desiderata per la funzione u, prendendo il limite per $\varepsilon \to 0$.

Step 3: Sia $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$; sia $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; [0,1])$ una funzione cut-off tale che $\theta(x) = 1$ se $|x| < 1$ e $\theta(x) = 0$ se $|x| \geq 2$. Per ogni $\varepsilon > 0$, sia

$$\theta_\varepsilon(x) \coloneqq \theta(\varepsilon x).$$

Poniamo

$$u_\varepsilon \coloneqq u \cdot \theta_\varepsilon.$$

Notiamo che $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e ha supporto compatto per ogni $\varepsilon > 0$. Precisiamo anche che vale

$$\nabla u_\varepsilon = \theta_\varepsilon \nabla u + u \nabla \theta_\varepsilon.$$

Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione test. Utilizzando le formule di integrazione per parti e la definizione di laplaciano debole di u, troviamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} < \nabla\varphi, \nabla u_\varepsilon > \; dx &= \int_{\mathbb{R}^d} [< \nabla\varphi, \theta_\varepsilon \nabla u > + < \nabla\varphi, u\nabla\theta_\varepsilon >] \; dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} < \nabla(\theta_\varepsilon\varphi), \nabla u > \; dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi < \nabla\theta_\varepsilon, \nabla u > \; dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} u < \nabla\varphi, \nabla\theta_\varepsilon > \; dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(\theta_\varepsilon\varphi) \; dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi < \nabla\theta_\varepsilon, \nabla u > \; dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^d} < \nabla(\varphi u), \nabla\theta_\varepsilon > \; dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi < \nabla u, \nabla\theta_\varepsilon > \; dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} [\theta_\varepsilon \Delta u + 2 < \theta_\varepsilon, \nabla u > + u\Delta\theta_\varepsilon] \, \varphi \; dx;
\end{aligned}$$

in altri termini, u_ε soddisfa l'equazione

$$\Delta u_\varepsilon = \theta_\varepsilon \Delta u + 2 < \theta_\varepsilon, \nabla u > + u\Delta\theta_\varepsilon$$

in senso distribuzionale in $\mathbb{R}^d$. Inoltre, è immediato trovare che

$$\begin{aligned}
\|\Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\theta_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + 2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\nabla\theta_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|\Delta\theta_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + c_1\varepsilon^2 \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + c_2\varepsilon^4 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

per opportune costanti positive c_1, c_2 (dipendenti solo da θ). Per quanto mostrato nel passo precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|^2_{2,2,\mathbb{R}^2} &\leq \frac{3}{2}\left(\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\Delta u_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&\leq \frac{3}{2}\left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right).
\end{aligned}$$

La successione $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ è limitata in $W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$; per il teorema di Banach-Alaoglu (vedi 2.1.11) esistono una sottosuccessione (non rinominata) ed una funzione $v \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d^2})$

tale che $\nabla^2 u_\varepsilon \rightharpoonup v$ debolmente in $L^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d^2})$. Per il lemma 6.4.5, deduciamo che $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ e che $\nabla^2 u = v$. Per la semicontinuità inferiore della norma rispetto alla convergenza debole vale che

$$\|u\|_{2,2,\mathbb{R}^d}^2 \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{2,2,\mathbb{R}^d}^2 = \frac{3}{2}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\right),$$

che è la disuguaglianza desiderata. □

Osservazione 5.2.4. Nel teorema (5.2.3), avremmo potuto provare il primo passo (che è quello decisivo) anche nel modo seguente. Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$; ricordiamo che la trasformata di Fourier di u è definita come

$$\mathscr{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} u(x)e^{-i<\xi,x>}\, dx$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^d$. Vale anche che

$$\mathscr{F}(\nabla u)(\xi) = i\xi\mathscr{F}u(\xi),\ \mathscr{F}(\nabla^2 u)(\xi) = -\xi\otimes\xi\mathscr{F}u(\xi),\ \mathscr{F}(\Delta u)(\xi) = -|\xi|^2\mathscr{F}u(\xi).$$

Per la formula di Plancherel, vale che

$$\begin{aligned}\|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d}\|\mathscr{F}(\Delta u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^4|\mathscr{F}u(\xi)|^2\, d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\left\||\xi|^2\mathscr{F}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.\end{aligned}$$

Inoltre, vale che

$$\sum_{i,j=1}^d |\xi\otimes\xi|_{i,j}^2 = \sum_{i,j=1}^d |\xi_i\xi_j|^2 = |\xi|^4.$$

Utilizzando ancora la formula di Plancherel, abbiamo che

$$\left\|\nabla^2 u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\mathscr{F}(\nabla^2 u)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\left\||\xi|^2\mathscr{F}u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Per la formula di Plancherel, vale che

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^2|\mathscr{F}u(\xi)|^2\, d\xi\\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\left[1+|\xi|^4\right]|\mathscr{F}u(\xi)|^2\, d\xi\\ &= \frac{1}{2}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\right).\end{aligned}$$

Segue immediatamente la disuguaglianza (5.1)

Corollario 5.2.5 (Regolarità L^2_{loc}).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto qualsiasi, $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che Δu è definito in senso debole e appartiene a $L^2_{loc}(\Omega)$. Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e per ogni aperto Ω' relativamente compatto in Ω esiste una costante $c(d;\Omega;\Omega')$ tale che

$$\|u\|_{2,2,\Omega'} \leq c(d;\Omega;\Omega')\left[\|u\|_{L^2(\Omega')}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega')}^2\right].$$

Dimostrazione. Dato Ω' un aperto relativamente compatto in Ω, sia $\theta \in C_c^\infty(\Omega; [0,1])$ una funzione cut-off tale che $\theta(x) = 1$ se $x \in \Omega'$. Introduciamo la funzione $v := \theta u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$. Con gli stessi calcoli presentati dettagliatamente nel terzo passo della dimostrazione del teorema 5.2.3, si trova la disuguaglianza desiderata. □

Osservazione 5.2.6. In generale non è possibile migliorare il risultato del corollario 5.2.5; infatti, dato un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, in certi casi è possibile costruire una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ armonica su Ω, ma non appartenente a $W^{2,2}(\Omega)$.

5.2.2 Regolarità fino al bordo

Presentiamo dei teoremi di regolarità fino al bordo, di cui diamo soltanto dimostrazioni parziali (esaminiamo i casi significativi per evitare notevoli complicazioni tecniche).

Teorema 5.2.7 (Regolarità fino al bordo con condizioni di Dirichlet)**.**
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato di classe C^2.

- *Sia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (in senso distribuzionale). Allora $u \in W^{2,2}(\Omega)$ ed esiste una costante $c(\Omega) > 0$ dipendente soltanto da Ω tale che*

$$\|u\|_{2,2,\Omega}^2 \leq c(\Omega) \left(\|u\|_{1,2,\Omega}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

- *Se $u \in W_{u_0}^{1,2}(\Omega)$, con $u_0 \in W^{2,2}(\Omega)$, e $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (in senso distribuzionale), allora $u \in W^{2,2}(\Omega)$ ed esiste una costante $c(\Omega)$ dipendente soltanto da Ω tale che*

$$\|u\|_{2,2,\Omega}^2 \leq c(\Omega) \left(\|u_0\|_{2,2,\Omega}^2 + \|u\|_{1,2,\Omega}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Dimostrazione. Il secondo enunciato è una conseguenza immediata del primo, lavorando con $v := u - u_0$. Mostriamo il primo enunciato nel caso semplificato del semispazio. Il caso generale si ottiene a partire da questo seguendo questi passaggi, che non svolgeremo nel dettaglio:

- si "decompone" il bordo di Ω in un numero finito di pezzi ($\partial\Omega$ è compatto) che siano diffeomorfi con mappe C^2 al semispazio;

- si prende una partizione dell'unità relativa a questo ricoprimento di $\partial\Omega$ e all'interno di Ω;

- si utilizza il risultato di regolarità L^2_{loc} (vedi 5.2.5) per stimare u in un aperto relativamente compatto in Ω;

- si effettua un cambio di variabile, cioè si studia l'equazione risolta nel semispazio dalla composizione di u con ciascun diffeomorfismo (in questo punto, la regolarità C^2 del bordo permette di ottenere un'equazione dello stesso tipo di quella soddisfatta da u in Ω);

- si cambia ancora variabile e si rincollano i pezzi in Ω con una partizione dell'unità.

Quindi, assumiamo che

$$\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty).$$

Per semplicità denotiamo

$$R^d_+ := \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty), \quad \mathbb{R}^d_- := \mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0).$$

Step 1: Consideriamo l'operatore di estensione per disparità E che, data una funzione $u : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, associa $\tilde{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{u}(x; y) := \begin{cases} u(x; y) & y > 0, \\ -u(x; -y) & y < 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Ovviamente, se $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$ vale che $\tilde{u} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$; inoltre è banale osservare che

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x; y) := \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x; y) & y > 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x; -y) & y < 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x; y) := \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x; y) & y > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x; -y) & y < 0, \end{cases} \tag{5.3}$$

Deduciamo che per ogni $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$ vale che

$$\|\tilde{u}\|^2_{1,2;\mathbb{R}^d} = 2 \|u\|^2_{1,2;\mathbb{R}^d_+}.$$

Da questa stima segue che l'operatore di estensione per disparità è ben definito ed è continuo da $W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d_+)$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e che le formule (5.2), (5.3) valgono per tutte le funzioni $u \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d_+)$.

Step 2: Sia data $u \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d_+)$ tale che Δu esiste in senso distribuzionale ed appartiene ad $L^2(\mathbb{R}^d_+)$. Detta $\tilde{u}$ l'estensione per disparità di u, vogliamo mostrare che esiste il laplaciano distribuzionale di $\tilde{u}$, diciamo $\Delta\tilde{u}$, e vale che $\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u}$. Sappiamo che la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \nabla \varphi > \; dxdy = -\int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi \Delta u \; dxdy$$

vale per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$; è immediato notare che questa relazione si estende per densità a tutte le funzioni test $\varphi \in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^d_+)$.

Prendiamo una funzione test $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} < \nabla\tilde{u}, \nabla\psi > \ dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d_+} \left[\sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\right] \ dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d_-} \left[\sum_{i=1}^{d-1} -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;-y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x;-y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\right] \ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d_+} \left[\sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;y)\right] \ dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d_+} \left[\sum_{i=1}^{d-1} -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x;-y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x;y)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x;-y)\right] \ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \nabla\varphi > \ dxdy,
\end{aligned}$$

avendo posto $\varphi(x;y) \coloneqq \psi(x;y) - \psi(x;-y)$. Notiamo che $\varphi \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^d_+)$; allora vale che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} < \nabla\tilde{u}, \nabla\psi > \ dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \nabla\varphi > \ dxdy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi\Delta u \ dxdy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \psi[\widetilde{\Delta u}] \ dxdy,
\end{aligned}$$

dopo aver espanso nuovamente i termini.

Step 3: Abbiamo che $\tilde{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e ha laplaciano distribuzionale ben definito ed appartenente a $L^2(\mathbb{R}^d)$ (coincide con l'estensione per disparità di Δu); per il teorema 5.2.3, deduciamo che $\tilde{u} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ e inoltre vale che

$$\|\tilde{u}\|^2_{2,2,\mathbb{R}^d} \le \frac{3}{2}\left[\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \le 3\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\right].$$

Deduciamo che $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d_+)$ e che vale la stima

$$\|u\|^2_{2,2,\mathbb{R}^d_+} \le 3\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\right].$$

□

Abbiamo discusso come interpretare le condizioni al bordo di Dirichlet anche nel contesto delle funzioni di Sobolev, considerando l'operatore traccia: in questo modo, è possibile dare senso ad una condizione del tipo $u_{|\partial\Omega} = 0$. Esaminiamo, invece, il caso delle condizioni di Neumann; per una funzione in $u \in W^{1,2}(\Omega)$ generalmente non è possibile interpretare la condizione $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ su $\partial\Omega$ (derivata normale nulla sul bordo) in termini di traccia; infatti $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ è solo una funzione L^2, per cui non è definita una traccia. Per procedere in questo modo e sperare che $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sia una funzione di Sobolev, bisognerebbe richiedere che $u \in W^{2,2}(\Omega)$; tuttavia, questa richiesta è eccessiva e non si verifica mai nelle applicazioni (anzi, è proprio ciò che vogliamo dimostrare). Per rilassare le condizioni di Neumann bisogna procedere in maniera diversa, ispirandosi alla formula classica di Gauss-Green.

Definizione 5.2.8 (Laplaciano con condizione di Neumann debole).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto di classe C^1, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$; si dice che u soddisfa l'equazione

$$\Delta u = f$$

in senso debole in Ω con condizione di Neumann omogenea se per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (non si richiede che si annulli vicino a $\partial\Omega$) vale che

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla\varphi > \ dx = -\int_\Omega \varphi\Delta u \ dx.$$

Teorema 5.2.9 (Regolarità fino al bordo con condizioni di Neumann).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato di classe C^2. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che $\Delta u \in L^2(\Omega)$ (in senso distribuzionale) con condizione di Neumann omogenea (vedi 5.2.8). Allora $u \in W^{2,2}(\Omega)$ ed esiste una costante $c(\Omega) > 0$ dipendente soltanto da Ω tale che

$$\|u\|_{2,2,\Omega}^2 \leq c(\Omega)\left(\|u\|_{1,2,\Omega}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

Dimostrazione. Supponiamo $\Omega = \mathbb{R}_+^d$ (la riduzione a questo caso può essere svolta come discusso nel teorema 5.2.7).

Step 1: Richiamando la notazione introdotta nel teorema 5.2.7, introduciamo l'operatore di estensione per parità P che associa ad ogni funzione $u : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ una funzione $\tilde{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{u}(x;y) := \begin{cases} u(x;y) & y > 0, \\ u(x;-y) & y < 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Si può verificare (vedi 6.4.35) che l'operatore P è ben definito da $W^{1,2}(\mathbb{R}_+^d)$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$; inoltre per ogni $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^d)$ per quasi ogni $(x;y) \in \mathbb{R}^d$ vale che

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}(x;y) := \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x;y) & y > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x;-y) & y < 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}(x;y) := \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x;y) & y > 0, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x;-y) & y < 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

Deduciamo che per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ vale che

$$\|\tilde{u}\|_{1,2;\mathbb{R}^d}^2 = 2\,\|u\|_{1,2;\mathbb{R}_+^d}^2.$$

In particolare, l'operatore di estensione per parità è continuo da $W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+^d)$ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ (è ovviamente lineare).

Step 2: Sia data $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^d)$ tale che Δu esiste in senso distribuzionale ed appartiene ad $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ con condizioni di Neumann omogenee (vedi 5.2.8). Detta $\tilde{u}$ l'estensione per parità di u, vogliamo mostrare che esiste il laplaciano distribuzionale di $\tilde{u}$, diciamo $\Delta\tilde{u}$, e vale che $\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u}$ (ciò il laplaciano dell'estensione per parità è l'estensione per parità del laplaciano). Prendiamo una funzione test $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ragionando in maniera totalmente analoga al teorema 5.2.7 troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} < \nabla\tilde{u}, \nabla\psi > \; dxdy = \int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \nabla\varphi > \; dxdy,$$

avendo posto $\varphi(x; y) := \psi(x; y) + \psi(x; -y)$. Notiamo che φ è una funzione test in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (potrebbe non avere supporto compatto in $\mathbb{R}^d_+$); avendo imposto condizioni di Neumann in senso debole (vedi 5.2.8), deduciamo che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} < \nabla\tilde{u}, \nabla\psi > \; dxdy &= \int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \nabla\varphi > \; dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d_+} \varphi\Delta u \; dxdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \psi[\widetilde{\Delta u}] \; dxdy,\end{aligned}$$

dopo aver espanso nuovamente i termini.

Step 3: Abbiamo che $\tilde{u} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ e ha laplaciano distribuzionale ben definito ed appartenente a $L^2(\mathbb{R}^d)$ (coincide con l'estensione per parità di Δu); per il teorema 5.2.3, deduciamo che $\tilde{u} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$ e inoltre vale che

$$\|\tilde{u}\|^2_{2,2,\mathbb{R}^d} \leq \frac{3}{2}\left[\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\tilde{u}\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \leq 3\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\right].$$

Deduciamo che $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^d_+)$ e che vale la stima

$$\|u\|^2_{2,2,\mathbb{R}^d_+} \leq 3\left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}\right].$$

□

Abbiamo mostrato dei risultati di regolarità L^2 per l'equazione di Laplace in senso distribuzionale con condizioni di Dirichlet e di Neumann (opportunamente interpretate). I risultati presentati possono essere estesi ad una classe molto ampia di equazioni ellittiche; tuttavia, è conveniente procedere in maniera completamente diversa (si può utilizzare il metodo delle traslazioni di Niremberg). É possibile anche sviluppare la teoria della regolarità L^p, per $p \in (1, +\infty)$; tuttavia, è un ambito abbastanza complesso da studiare e richiede la teoria di Calderon-Zygmund.

Capitolo 6

Appendice

6.1 Utili regole di calcolo

Ricordiamo le seguenti formule, di cui faremo larghissimo uso nel seguito.

Teorema 6.1.1 (Formula della divergenza).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto di classe C^1 e limitato; sia $U \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Detta $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{S}^{n-1}$ la normale unitaria esterna a Ω, vale la formula

$$\int_{\partial\Omega} < U, \nu > \ d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} div(U) \ dx,$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}$ è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale su $\partial\Omega$.

Corollario 6.1.2 (Formula di Gauss-Green).
Nelle ipotesi del teorema della divergenza (vedi 6.1.1), se $v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ è una funzione scalare, vale la formula

$$\int_{\partial\Omega} < vU, \nu > \ d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega} < \nabla v, U > \ dx + \int_{\Omega} v div(U) \ dx.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema 6.1.1, applicando la formula della divergenza a $v \cdot U \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. □

Teorema 6.1.3 (Derivazione sotto il segno di integrale).
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $g : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- *$g(\cdot; x) \in C^1(I)$ per ogni $x \in \Omega$;*
- *esiste $t_0 \in I$ tale che $g(t_0; \cdot) \in L^1(\Omega)$;*
- *vale che*
$$\alpha(x) \coloneqq \sup_{t \in I} |g_t(t; x)| \in L^1(\Omega).$$

Per ogni $t \in I$ poniamo

$$G(t) \coloneqq \int_{\Omega} g(t; x) \ dx.$$

La funzione $G : I \to \mathbb{R}$ è ben definita, finita e continua. Inoltre $G \in C^1(I)$ e vale che

$$G'(t) = \int_{\Omega} g_t(t; x) \ dx.$$

Dimostrazione. La verifica segue immediatamente dal teorema di convergenza dominata e dal teorema di Fubini. □

6.2 Lemmi variazionali

Lemma 6.2.1 (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni).
Siano $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ *uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto,* μ *una misura di Radon su* $\mathbb{X}$ *e* f *una funzione in* $L^1_{loc}(\mathbb{X})$ *tale che*

$$\int_{\mathbb{X}} f(x)\varphi(x)\ d\mu \geq 0$$

per ogni φ *in* $C^0_c(\mathbb{X})$ *tale che* $\varphi(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{X}$. *Allora* $f(x) \geq 0$ *per quasi ogni* x *in* $\mathbb{X}$. *In particolare, se* f *è tale che*

$$\int_{\mathbb{X}} f(x)\varphi(x)\ d\mu = 0$$

per ogni $\varphi \in C^0_c(\mathbb{X})$, *allora* $f(x) = 0$ *per quasi ogni* $x \in \mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia $M \coloneqq f^{-1}([-\infty, 0))$; notiamo che M è misurabile. Supponiamo per assurdo che $\mu(M) > 0$; allora esiste un compatto $K \subseteq M$ tale che $0 < \mu(K) < +\infty$ (infatti μ è una misura di Radon). Essendo $(\mathbb{X}; \mathcal{T})$ uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, esiste un aperto V tale che $K \subseteq V \subseteq \overline{V}$ e $\overline{V}$ è compatto in $\mathbb{X}$. Notiamo che $\mu(V) \leq \mu(\overline{V}) < +\infty$. Siccome la funzione $\operatorname{sgn}(f)\mathbb{1}_K \in L^1(V)$, esiste una successione $(\varphi_n)_n$ di funzioni in $C^0_c(V)$ che converge in $L^1(V)$ a $\operatorname{sgn}(f)\mathbb{1}_K$. A meno di passare a sottosuccessioni, si può supporre che la convergenza sia puntuale; a meno di comporre con un operatore di troncamento, si può supporre che $\varphi_n(x) \in [-1, 0]$ per ogni $x \in V$ (per il teorema di convergenza dominata, si mantiene la convergenza in $L^1(V)$): infatti $f(x) < 0$ in K. Allora vale che

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_V -\varphi_n f\ d\mu &= -\lim_{n\to+\infty} \int_V f\varphi_n\ d\mu \\ &= -\int_V \mathbb{1}_K \operatorname{sgn}(f) f\ d\mu = -\int_K |f|\, d\mu. \end{aligned}$$

Essendo $f < 0$ in K e $\mu(K) > 0$ si trova l'assurdo. □

Osservazione 6.2.2. Applicheremo questo lemma al caso in $\mathbb{R}^d$ con la misura di Lebesgue oppure su una varietà di classe C^1 in $\mathbb{R}^d$ dotata della misura di Hausdorff. Nel primo caso, è sufficiente richiedere che

$$\int_\Omega f\varphi\ dx \geq 0$$

per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ tale che $\varphi(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ (oppure che l'integrale vale 0 per ogni φ nella stessa classe di funzioni). La dimostrazione data, infatti, si adatta perfettamente a questo caso: procedendo in modo del tutto analogo (e mantenendo la notazione), si può costruire per convoluzione una successione di funzioni $(\varphi_n)_n$ in $C^\infty_c(\Omega; (-\infty, 0])$ che converge a $\operatorname{sgn}(f)\mathbb{1}_K$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ e puntualmente quasi ovunque. Allora, è immediato concludere.

Lemma 6.2.3 (Du Bois-Reymond).
Siano Ω *un aperto connesso di* $\mathbb{R}^d$, n *un intero positivo e* f *una funzione in* $L^1_{loc}(\Omega)$ *tale che per ogni multi-indice* α *in* $\mathbb{N}^d$ *tale che* $|\alpha| = n$ *vale che*

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^\alpha x}\varphi(x)\ dx = 0$$

per ogni φ in $C_c^\infty(\Omega)$. In altri termini, f è una funzione avente tutte le derivate W-deboli di ordine n nulle. Allora f coincide con un polinomio di grado al più $n-1$ per quasi ogni x in Ω.

6.3 Prodotto di convoluzione

Definizione 6.3.1 (Esponente coniugato)**.**
Sia $p \in [1, +\infty]$. Si dice che p' è l'esponente coniugato di p se vale la relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Definizione 6.3.2 (Mollificatore)**.**
Sia ρ una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ con le seguenti proprietà:

- $\rho(x) = 0$ se $|x| \geq 1$;
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\ dx = \int_{\mathcal{B}(0;1)} \rho(x)\ dx = 1.$

La funzione ρ è detta mollificatore.

Definizione 6.3.3 (Prodotto di convoluzione)**.**
Sia $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un mollificatore come nella definizione 6.3.2. Per ogni $\varepsilon > 0$, indichiamo con ρ_ε la funzione tale che

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Data una funzione u in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, per ogni $\varepsilon > 0$, definiamo

$$u_\varepsilon(y) = u * \rho_\varepsilon(y) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) u(y-x)\ dx.$$

La funzione u_ε è il prodotto di convoluzione tra u e ρ_ε. Se u è definita su un sottoinsieme Ω di $\mathbb{R}^d$, la convoluzione è definita in modo analogo estendendo u a 0 fuori da Ω.

Osservazione 6.3.4. Ricordiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ valgono le seguenti proprietà:

- u_ε è ben definita a valori in $\mathbb{R}$ ed è misurabile;
- se A è il supporto di u, allora il supporto di $u * \rho_\varepsilon$ è contenuto in $A + \mathcal{B}(0;\varepsilon)$;
- u_ε è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ vale che
$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \rho_\varepsilon(x) u(y-x)\ dx = u * D^\alpha \rho_\varepsilon(x);$$
- se u appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^d)$ per un certo p in $[1, +\infty]$, vale che
$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)};$$
- se u appartiene ad $L^p(\mathbb{R}^d)$ per un certo p in $[1, +\infty)$ ($+\infty$ è escluso), allora la successione $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge ad u in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corollario 6.3.5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia D l'insieme delle funzioni limitate a supporto compatto è denso in $L^p(\Omega)$. Il sottospazio $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in D; dunque $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

6.4 Spazi di Sobolev

Presentiamo la teoria basilare sugli spazi di Sobolev, affinché questi appunti siano il più possibile autocontenuti; alcuni risultati classici (mai utilizzati nel corso) e le dimostrazioni di molti fatti enunciati saranno omesse; ci limiteremo a presentare brevemente solo pochi esempi e a dimostrare soltanto i risultati dimostrati nel corso. Per una trattazione completa e dettagliata si veda [1].

6.4.1 Definizioni

Formalismo W

Definizione 6.4.1 (Derivata W-debole)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Siano u e v funzioni in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si dice che v è la derivata W-debole di u di ordine α se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\varphi(x)\ dx. \tag{6.1}$$

Osservazione 6.4.2. Nella definizione 6.4.1, la richiesta che le funzioni u, v siano in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e che le funzioni test siano limitate a supporto compatto in Ω è quella minima affinché gli integrali scritti abbiano senso. Inoltre, utilizzando il lemma 6.2.1, è immediato mostrare che la derivata W-debole, se esiste, è unica.

Osservazione 6.4.3. Come nella definizione di derivata W-debole (vedi 6.4.1), dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^d$, u, v in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e un vettore non nullo η in $\mathbb{R}^d$, diciamo che v è la derivata direzionale di u nella direzione η se per ogni funzione test φ in $C_c^\infty(\Omega)$ vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\ dx = -\int_\Omega \varphi v\ dx.$$

In tal caso, denotiamo

$$v = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ovviamente esiste una funzione v con la proprietà di derivata direzionale di u, allora v è unica. Supponiamo inoltre che u ammetta tutte le derivate parziali W-deboli di ordine 1 (vedi 6.4.1). Allora, per ogni η in $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ esiste la derivata direzionale di u lungo η e vale la formula

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = < \nabla u, \eta >,$$

come è immediato verificare.

Osservazione 6.4.4 (Compatibilità con il caso classico).
Siano α un multi-indice in $\mathbb{N}^d$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Supponiamo che u sia una funzione di classe $C^{|\alpha|}(\Omega)$; allora u ammette derivata W-debole di ordine α e questa coincide con la sua derivata classica di ordine α.

Lemma 6.4.5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $L^1_{loc}(\Omega)$, u, v in $L^1_{loc}(\Omega)$ e α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che*

- *v_n sia la derivata W-debole di u_n di ordine α per ogni n in $\mathbb{N}$;*
- *per ogni sottoinsieme Ω' aperto relativamente compatto in Ω vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u debolmente in $L^1(\Omega')$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a v in $L^1(\Omega')$.*

Allora u ammette derivata W-debole di ordine α e questa coincide con v.

Definizione 6.4.6 (Spazi di Solobev - definizione W)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ e p in $[1, +\infty]$. Si indica con $W^{m,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni u in $L^p(\Omega)$ che ammettono tutte le derivate W-deboli di ordine minore o uguale a m in $L^p(\Omega)$.

Osservazione 6.4.7. Ovviamente, $W^{m,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale e le derivate W-deboli sono operatori lineari.

Formalismo H

Definizione 6.4.8 (Derivata H-debole)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice, u, v funzioni in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Si dice che v è la derivata H-debole di u di ordine α se esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ tale che per ogni aperto Ω' a chiusura compatta in Ω vale che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^1(\Omega')$ e $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v in $L^1(\Omega')$.

Osservazione 6.4.9. Siano Ω una aperto di $\mathbb{R}^d$ e α un intero in $\mathbb{N}^d$. Se u è una funzione in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che ammette derivata H-debole v di ordine α (vedi 6.4.8), allora u e v coincidono quasi ovunque con delle funzioni continue su Ω.

Definizione 6.4.10 (Spazi di Sobolev - definizione H)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ e p in $[1, +\infty]$. Si indica con $H^{m,p}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni u in $L^p(\Omega)$ per le quali esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$;
- per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$ vale che $\{D^\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite in $L^p(\Omega)$.

Osservazione 6.4.11. Nella definizione 6.4.10, la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale da approssimare tutte le derivate H-deboli di u. Dunque, questa richiesta è più forte della sola esistenza delle derivate H-deboli.

Osservazione 6.4.12. Nel contesto della definizione 6.4.10, data una funzione u in $C^\infty(\Omega)$, definiamo

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definiamo l'insieme

$$C^{m,p}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{m,p,\Omega} < +\infty\}.$$

La funzione $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ è ovviamente una norma sull'insieme $C^{m,p}(\Omega)$. Per la definizione 6.4.10, lo spazio $H^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^{m,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Osservazione 6.4.13. Denoteremo con $D^m u : \Omega \to R^{d^m}$ il vettore avente tutte le derivate H-deboli di ordine m; se $m = 1$ denoteremo

$$D^1 u \coloneqq \nabla u.$$

Se $p < +\infty$, porremo

$$\|D^m u\|_{L^p(\Omega)} \coloneqq \left\| |D^m u|_p^p \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

dove $|v|_p$ è la norma p-esima di una vettore in $\mathbb{R}^d$. Se $p = +\infty$, porremo

$$\|D^m u\|_{L^\infty(\Omega)} \coloneqq \left\| \max_{|\alpha|=m} \{|D^\alpha u|\} \right\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Ovviamente, per ogni p in $[1, +\infty]$ valgono le disuguaglianze

$$\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposizione 6.4.14 (H $\subseteq$ W).
Siano Ω in $\mathbb{R}^d$ un aperto, u, v funzioni in $L^1_{loc}(\Omega)$ e α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che v sia la derivata H-debole di u di ordine α; allora, v è anche la derivata W-debole di u di ordine α. In altri termini, per ogni intero $m \geq 1$ per ogni p in $[1, +\infty]$ vale la seguente inclusione

$$H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega).$$

6.4.2 Il caso speciale di $W^{1,p}((a, b))$

Presentiamo brevemente il caso speciale in cui Ω è un intervallo (a, b) in $\mathbb{R}$, eventualmente illimitato, limitandoci al primo ordine di derivazione.

Esempio 6.4.15. Siano (a, b) un intervallo in $\mathbb{R}$ eventualmente illimitato e $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 a tratti. Per la precisione, supponiamo che u sia continua in $[a, b]$ e che esista una partizione finita $a \coloneqq t_0 < t_1 \cdots < t_n < t_{n+1} \coloneqq b$ tale che u è di classe $C^1([t_i, t_{i+1}])$ per ogni i in $\{0; \ldots; n\}$. Si verifica facilmente che la derivata debole in senso W di u esiste e coincide quasi ovunque con la derivata in senso classico di u (che è definita ovunque tranne che in un numero finito di punti di (a, b)).

Esempio 6.4.16. Sia $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$H(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

É facile verificare che tale funzione non ammette derivata debole in senso W.

Osservazione 6.4.17. Siano (a, b) un intervallo in $\mathbb{R}$, eventualmente illimitato, e u una funzione in $L^1_{\text{loc}}((a, b))$. Supponiamo che u ammetta derivata debole v in senso W (vedi 6.4.6) di classe $C^0((a, b))$. Si verifica facilmente che u è di classe $C^1((a, b))$ e v è la derivata di u in senso classico.

Lemma 6.4.18. *Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato), u una funzione in $L^1_{loc}((a,b))$ e v la sua derivata debole in senso W (vedi 6.4.6) appartenente ad $L^1_{loc}((a,b))$. Sia x_0 un punto in (a,b) e definiamo la funzione $V:(a,b)\to\mathbb{R}$ tale che*

$$V(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} v(t)\ dt.$$

V è una funzione continua ed esiste una costante c in $\mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = V(x) + c$$

per quasi ogni c in (a,b). In altri termini, una funzione derivabile debolmente in senso W (vedi 6.4.1) è una primitiva della sua derivata debole.

Teorema 6.4.19 (H=W in dimensione 1)**.**
Siano (a,b) un intervallo limitato in $\mathbb{R}$, p in $[1,+\infty)$ ($+\infty$ è escluso) e u una funzione in $W^{1,p}((a,b))$. Esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty((a,b))$ tale che

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p((a,b))$;*
- *$\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Du in $L^p((a,b))$.*

In particolare, gli spazi $H^{1,p}((a,b))$ e $W^{1,p}((a,b))$ coincidono.

Teorema 6.4.20 (Regolarità delle funzioni in $W^{1,p}((a,b))$)**.**
Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$ (eventualmente illimitato), p un esponente in $[1,+\infty]$, u una funzione in $W^{1,p}((a,b))$ e Du la sua derivata debole.

- *Se $p=+\infty$, u coincide quasi ovunque con una funzione lipschitziana e vale che*

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u\|_{L^\infty((a,b))} |x-y|\,;$$

- *se p è in $(1,+\infty)$, detto p' l'esponente coniugato di p (vedi 6.3.1), u coincide quasi ovunque con una funzione $\frac{1}{p'}$-hölderiana che denotiamo ancora con u e vale la disuguaglianza*

$$|u(x)-u(y)| \leq \|Du\|_{L^p((a,b))} |x-y|^{\frac{1}{p'}}$$

  ed esiste una costante $c(a,b,p)$ dipende soltanto dal dominio (a,b) e da p tale che

$$\|u\|_{L^\infty((a,b))} \leq c(a,b,p)\, \|u\|_{1,p,(a,b)}\,;$$

- *se $p=1$ esiste una costante $c(a,b)$ tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)}\, c(a,b) \leq \|u\|_{1,1,(a,b)}\,.$$

Inoltre, sono ben definiti i valori

$$u(a) \coloneqq \lim_{x\to a^+} u(x),$$

$$u(b) \coloneqq \lim_{x\to b^-} u(x).$$

Proposizione 6.4.21. *Siano (a,b) un intervallo in $\mathbb{R}$, p in $(1,+\infty)$, (c,d) un intervallo limitato in (a,b) e u,v funzioni in $W^{1,p}((a,b))$. Allora vale la formula*

$$\int_c^d u(x)v'(x)\ dx = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d u'(x)v(x)\ dx.$$

6.4.3 Teoremi di approssimazione

Approssimazioni in aperti a chiusura compatta

Lemma 6.4.22. *Siano B un aperto di $\mathbb{R}^d$, A un aperto a chiusura compatta in B, u una funzione in $L^1(B)$ e α in $\mathbb{N}^d$ un multi-indice. Supponiamo che $D^\alpha u$ sia la derivata W-debole di u di ordine α. Sia ρ un mollificatore e per ogni $\varepsilon > 0$ sia u_ε come nella definizione 6.3.3. Supponiamo $B \neq \mathbb{R}^d$; sia*

$$\delta := \min\{\operatorname{dist}(a; \partial B) \mid a \in A\}.$$

Allora, per ogni ε in $(0, \delta)$ per ogni x in A vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Se, invece, $B = \mathbb{R}^d$, per ogni $\varepsilon > 0$ per ogni x in $\mathbb{R}^d$ vale che

$$D^\alpha u_\varepsilon(x) = D^\alpha u * \rho_\varepsilon(x).$$

Teorema 6.4.23. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ ($+\infty$ è escluso) e u una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$. Esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:*

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$;*
- *per ogni aperto Ω' a chiusura compatta in Ω per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ con $|\alpha| \leq m$, la successione $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega')$.*

Se u appartiene ad $L^\infty(\Omega)$ per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Inoltre, se $\Omega = \mathbb{R}^d$, per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$ vale che $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Approssimazioni globali

Lemma 6.4.24. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1, +\infty]$, u una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$ e ψ una funzione in $C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u\psi$ è una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$ e vale la regola di Leibniz per le derivate W-deboli.*

Teorema 6.4.25 (Meyers-Serrin, 1964)**.**
Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1, +\infty)$ ($+\infty$ escluso) e u una funzione in $W^{m,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^p(\Omega)$;*
- *$\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha(u)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni α multi-indice in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$.*

In particolare, vale il contenimento

$$W^{m,p}(\Omega) \subseteq H^{m,p}(\Omega).$$

Osservazione 6.4.26. Provata l'uguaglianza degli spazi $W^{m,p}(\Omega)$ e $H^{m,p}(\Omega)$, lo spazio $W^{m,2}(\Omega)$ è denotato usualmente con H^m.

Teoremi algebrici

Il teorema di Meyers-Serrin (vedi 6.4.25) dimostra l'uguaglianza degli spazi $H^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ per ogni $m \geq 1$, per ogni p in $[1,+\infty)$ e per ogni aperto Ω in $\mathbb{R}^d$, senza ulteriori ipotesi aggiuntive. Tuttavia, i seguenti teoremi algebrici seguono dal teorema di approssimazione 6.4.23.

Teorema 6.4.27. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1,+\infty]$, u, v due funzioni in $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Allora uv è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz per le derivate deboli, cioè per ogni i in $\{1;\dots;d\}$ vale che*

$$D_{x_i}(uv) = uD_{x_i}v + vD_{x_i}u.$$

Teorema 6.4.28. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$, p in $[1,+\infty]$ e u una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:*

- *g è di classe $C^1(\mathbb{R})$;*
- *$g(0) = 0$ (richiesta superflua Ω ha misura finita);*
- *esiste M in $\mathbb{R}$ tale che $|g'(s)| \leq M$ per ogni s in $\mathbb{R}$.*

Allora $g(u)$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni i in $\{1;\dots;d\}$ vale la formula

$$D_{x_i}g(u) = g'(u)D_{x_i}u.$$

Corollario 6.4.29. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1,+\infty]$ e u una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora $|u|$ è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni i in $\{1;\dots;d\}$ vale*

$$D_{x_i}|u| = \operatorname{sgn}(u)D_{x_i}u.$$

In particolare, se v è una funzione in $W^{1,p}(\Omega)$, allora $\max\{u;v\}$ e $\min\{u;v\}$ sono funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 6.4.30 (Composizione interna)**.**
Siano A, B aperti di $\mathbb{R}^d$ tali che esiste una mappa $\Phi : A \to B$ con le seguenti proprietà:

- *Φ è invertibile;*
- *Φ e Φ^{-1} sono di classe C^1;*
- *$J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ sono limitati.*

Sia p in $[1,+\infty]$. Allora u appartiene a $W^{1,p}(B)$ se e solo se $u \circ \Phi$ appartiene a $W^{1,p}(A)$. Inoltre, vale la regola di derivazione a catena:

$$\frac{\partial u \circ \Phi}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\Phi(x))\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x).$$

6.4.4 Estensione di funzioni di Sobolev

Definizione 6.4.31 (Extender)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ e p in $[1, +\infty]$.

1. Si dice (m, p)-estensione una funzione lineare $E_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ con le seguenti proprietà:
   - per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ per quasi ogni x in Ω vale che
   $$E_{m,p}u(x) = u(x);$$
   - esiste una costante $c(m; p)$ dipendente solo da m e p tale che per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ vale che
   $$\|u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq c(m;p) \|u\|_{m,p,\Omega} .$$
2. Si dice m-estensione forte una funzione lineare $E_m : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tale che la sua restrizione a $W^{m,p}(\Omega)$ è una $(m; p)$-estensione per ogni p in $[1, +\infty]$.

Teorema 6.4.32. *Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ un intero e p in $[1, +\infty)$. Supponiamo che esista $E_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ una $(m; p)$-estensione (vedi 6.4.31). Allora per ogni u in $W^{m,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che*

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad u in $L^p(\Omega)$,*
- *per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$ vale che $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$.*

Osservazione 6.4.33. Il teorema 6.4.32 è il miglior risultato di approssimazione che si possa dare in questo contesto. L'intento delle prossime sezioni è trovare ipotesi ragionevoli su Ω che garantiscano l'esistenza di una (m, p)-estensione (come nel teorema 6.4.32).

Estensione nel caso modello

Definizione 6.4.34. Siano A un aperto in $\mathbb{R}^{d-1}$; poniamo $C^+_A := A \times (0, 1)$ e $C_A := A \times (-1, 1)$ in $\mathbb{R}^d$ Data una funzione $u : C^+_A \to \mathbb{R}$, definiamo

- l'estensione per parità, cioè $Eu : C_A \to \mathbb{R}$ tale che
$$[Eu](x; y) := \begin{cases} u(x; y) & \text{se } (x; y) \in C^+_A, \\ u(x; -y) & \text{se } x \in A,\ y \in (-1, 0), \\ 0 & \text{se } x \in A,\ y = 0; \end{cases}$$
- l'estensione per disparità, cioè $\hat{E}u : C_A \to \mathbb{R}$ tale che
$$[\hat{E}u](x; y) := \begin{cases} u(x; y) & \text{se } (x; y) \in C^+_A, \\ -u(x; -y) & \text{se } x \in A,\ y \in (-1, 0), \\ 0 & \text{se } x \in A,\ y = 0. \end{cases}$$

In entrambi i casi, la definizione in $A \times \{0\}$ è puramente convenzionale (infatti $A \times \{0\}$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^d$).

Teorema 6.4.35 (Estensione per parità).
Siano $d \geq 1$ un intero, A un aperto di $\mathbb{R}^{d-1}$, $C_A := A \times (-\infty, +\infty)$ e $C_A^+ := A \times (0, +\infty)$ e p in $[1, +\infty]$. Siano E l'operatore di estensione per parità ed $\hat{E}$ l'operatore di estensione per disparità (vedi 6.4.34). La restrizione di $E : W^{1,p}(C_A^+) \to W^{1,p}(C_A)$ è ben definita e lineare; inoltre valgono le seguenti proprietà:

- *per ogni i in $\{1; \ldots ; d-1\}$ vale che*
$$\frac{\partial Eu}{\partial x_i} = E\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right);$$
- $\dfrac{\partial Eu}{\partial y} = \hat{E}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right);$
- *per ogni u in $W^{1,p}(C_A^+)$ vale che*
$$\|Eu\|_{1,p,C_A} \leq 2\,\|u\|_{1,p,C_A^+}.$$

Estensione nel caso di aperti regolari

Lemma 6.4.36. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1, +\infty]$ e ψ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R}^d)$ supportata in Ω. Supponiamo che u sia in $W^{1,p}(\Omega)$. Se estendiamo u a 0 fuori da Ω, allora ψu è in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Teorema 6.4.37 (Estensione per aperti C^1).
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 (vedi 0.0.1) tale che $\partial\Omega$ è compatto. Allora esiste una 1-estensione forte nel senso della definizione 6.4.31.

6.4.5 Teoremi di immersione

Immersione nel caso modello

Definizione 6.4.38 (Esponente di Sobolev).
Siano $d \geq 1$ un intero e p in $[1, d)$. Sia p^* tale che
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{d};$$
equivalentemente, vale che
$$p^* = \frac{dp}{d-p}.$$
p^* è detto esponente di Sobolev relativo a d e p.

Il seguente teorema fondamentale vale soltanto se l'aperto di definizione è $\mathbb{R}^d$.

Teorema 6.4.39 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg).
Siano $d \geq 2$ un intero, p in $[1, d)$ e u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Sia p^* l'esponente di Sobolev relativo a p e d (vedi 6.4.38). Allora u appartiene ad $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ e vale
$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p(d-1)}{d-p}\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Corollario 6.4.40. *Siano $d \geq 2$ un intero, $p = d$ e u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Allora per ogni q in $[p, +\infty)$ ($+\infty$ è escluso) u appartiene ad $L^q(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una $c(d;p;q)$ che dipende da d, p e q tale che*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p;q)\,\|u\|_{1,d,\mathbb{R}^d}\,.$$

Teorema 6.4.41 (Morrey)**.**
Siano $d \geq 2$ un intero, p un esponente in $(d, +\infty)$ e u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$; allora u appartiene ad $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ed esiste una costante $c(d;p)$ dipendente da p e d tale che

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(d;p)\left\{\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right\}.$$

Inoltre, u coincide quasi ovunque con una funzione α-hölderiana che denotiamo ancora con u, dove $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$, e per ogni x, y in $\mathbb{R}^d$ vale

$$|u(y) - u(x)| \leq c(d;p)\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,|y - x|^\alpha\,.$$

Osservazione 6.4.42. Un argomento di riscalamento mostra che i teoremi di immersione (vedi 6.4.39 e 6.4.41) sono possibili soltanto per gli esponenti indicati. In particolare, $d \geq 1$ è un intero, p è in $[1, d)$ e q in $[1, +\infty)$; supponiamo che esista $M > 0$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ vale che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq M\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Allora q deve coincidere con p^*, l'esponente di Sobolev relativo a p (vedi 6.4.38). Infatti, date u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\lambda > 0$, poniamo

$$u_\lambda(x) \coloneqq u(\lambda x);$$

testiamo la disuguaglianza con u_λ e concludiamo prendendo il limite per λ che tende a 0 e λ che tende a $+\infty$.

Immersione per aperti regolari

Teorema 6.4.43. *Siano $d \geq 2$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e p in $[1, +\infty)$. Supponiamo che esista una 1-estensione forte E_1 (vedi 6.4.31). Allora valgono le seguenti alternative:*

- *se $p < d$, sia p^* l'esponente di Sobolev relativo a p, d (vedi 6.4.38); esiste una costante $c(d;p)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,;$$

- *se $p = d$ per ogni q in $[p, +\infty)$ esiste una costante $c(d;p;q)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,;$$

- *Supponiamo $p > d$. Esiste una costante $c(d;p)$ tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(d;p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,.$$

  Vale che u appartiene a $C^{1,\alpha}(\Omega)$ con

$$\alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

  e per ogni x, y in Ω vale che

$$|u(x) - u(y)| \leq c(d;p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}\,|x - y|^\alpha\,.$$

Esempio 6.4.44. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la palla bidimensionale centrata nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$. Definiamo la funzione $u : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che

$$u(x) = \log(|\log(|x|)|).$$

Si può verificare che u è in $W^{1,2}(\mathcal{B})$; tuttavia, è ovvio che u non appartiene a $L^\infty(\mathcal{B})$.

Esempio 6.4.45. Siano $d \geq 2$ un intero e p in $(1, d)$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la palla d-dimensionale centrata nell'origine e di raggio $\frac{1}{2}$. Definiamo

$$u(x) := \frac{1}{|x|^{\frac{d}{p}-1} |\log(|x|)|}.$$

La funzione u è in $W^{1,p}(\mathcal{B})$, tuttavia per ogni $q > p^*$ vale che u non appartiene a $L^q(\mathcal{B})$ (p^* è l'esponente di Sobolev relativo a p, vedi 6.4.38).

Esempio 6.4.46. Siano $\Omega := (-1, 0) \cup (0, 1)$ e $u(x) := \mathbb{1}_{(-1,0)} - \mathbb{1}_{(0,1)}$. Ovviamente u appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni p in $[1, +\infty]$; tuttavia, non può essere estesa ad una funzione in $W^{m,p}(\mathbb{R})$ e non può essere approssimata con funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ nel senso del teorema 6.4.32.

Esempio 6.4.47. Sia $\Omega := \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$; possiamo definire

$$u(x) := \sum_{n\geq 1} |\ln n| \, \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)}.$$

Allora, è ovvio che u appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ per ogni p in $[1, +\infty)$; tuttavia u non è limitata.

Immersione compatta

Teorema 6.4.48 (Rellich-Kondrakov).
Siano $d \geq 2$, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1, +\infty)$. Supponiamo che Ω sia limitato e vale il teorema di immersione (vedi 6.4.43). Allora valgono le seguenti alternative:

- *se $p < d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta per ogni q in $[1, p^*)$, dove p^* è l'esponente di Sobolev (vedi 6.4.38);*
- *se $p = d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta per ogni q in $[p, +\infty)$;*
- *se $p > d$, l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ è compatta.*

Esempio 6.4.49. In generale l'immersione $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ non è compatta; infatti, è possibile produrre dei controesempi.

6.4.6 Traccia per funzioni di Sobolev

Supponiamo che $d \geq 2$ sia un intero, p sia in $[1, +\infty)$, Ω sia un aperto C^1 (vedi 0.0.1) in $\mathbb{R}^d$ tale che $\partial\Omega$ sia compatto oppure sia $\Omega = \mathbb{R}^d_+$.

Lemma 6.4.50. *Esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ vale che*

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega}\,.$$

Inoltre, se $p < d$, posto $q := \frac{(d-1)p}{d-p}$, esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $C_c^1(\Omega)$ vale che

$$\|u\|_{L(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega}\,.$$

Teorema 6.4.51 (Traccia per funzioni di Sobolev in $W^{1,p}(\Omega)$)**.**
Esiste un'applicazione lineare $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ con le seguenti proprietà:

- *esiste una costante $c(p;\Omega)$ dipendente soltanto da p e da Ω tale che per ogni u in $W^{1,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c(p;\Omega)\, \|u\|_{1,p,\Omega}\,;$$

- *vale una formula della divergenza, cioè per ogni $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ in $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che*
$$\int_\Omega u div(()\,\varphi)\; dx = -\int_{\mathbb{R}^d_+} < \nabla u, \varphi > dx + \int_{\partial\Omega} [\mathrm{Tr}(u)] < \varphi, \nu > \; d\sigma,$$
dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$;

- *coincide con la restrizione a $\partial\Omega$ per le funzioni continue in $W^{1,p}(\Omega)$ che si estendono con continuità in $\overline{\Omega}$.*

Teorema 6.4.52 (Dipendenza continua della traccia per aperti C^1)**.**
Supponiamo che p sia in $(1,+\infty)$. Siano $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e u_∞ una funzione in $L^p(\Omega)$ tali che

- *$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u_∞ in $L^p(\Omega)$;*

- *esiste una costante M tale che per ogni n in $\mathbb{N}$ vale che*
$$\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M.$$

Allora $\{\mathrm{Tr}(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathrm{Tr}(u_\infty)$ in $L^p(\partial\Omega)$. Inoltre, vale che

- *se $p < d$ la convergenza è in $L^r(\partial\Omega)$ per ogni r in $\left[1, \frac{p(d-1)}{d-p}\right)$;*

- *se $p = d$ la convergenza è in $L^r(\partial\Omega)$ per ogni r in $[1,+\infty)$;*

- *se $p > d$ la convergenza è uniforme in $\partial\Omega$.*

6.4.7 Lo spazio $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definizione 6.4.53 ($W_0^{m,p}(\Omega)$)**.**
Siano $d \geq 1$ un intero, Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $m \geq 1$ un intero e p in $[1,+\infty]$. Diciamo che una funzione u è in $W_0^{m,p}(\Omega)$ se esiste una successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge ad u in $L^p(\Omega)$ e tale che $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $L^p(\Omega)$ per ogni multi-indice α in $\mathbb{N}^d$ tale che $|\alpha| \leq m$. In tal caso, denoteremo con $D^\alpha u$ il limite in L^p di $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 6.4.54. In maniera del tutto equivalente, possiamo definire $W_0^{m,p}(\Omega)$ (vedi 6.4.53 come il completamento di $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$. Ricordiamo che per il teorema di Meyers-Serrin (vedi 6.4.25), lo spazio $W^{m,p}(\Omega)$ è il completamento di $C^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$.

Osservazione 6.4.55. Siano $d \geq 1$ un intero, p in $[1,+\infty)$, $m \geq 1$ un intero; per il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vedi 6.4.23) vale che $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^d) = W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. In generale, però, gli spazi $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}(\Omega)$ sono molto diversi.

Lemma 6.4.56. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, p in $[1,+\infty)$ e u una funzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sia $\hat{u}$ l'estensione di u a tutto $\mathbb{R}^d$, tale che $\hat{u}(x) = 0$ se x non è in Ω. Allora $\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Teorema 6.4.57 (Immersioni a partire da $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.**
Siano $d \geq 1$, Ω un aperto qualunque di $\mathbb{R}^d$.

- *Supponiamo $p < d$: detto p^* l'esponente di Sobolev (vedi 6.4.38), esiste una costante $c(d;p)$ dipendente soltanto da d, p tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c(d;p) \, \|\nabla u\|_{1,p,\Omega} .$$
- *Supponiamo $p = d$: per ogni q in $[p,+\infty)$ esiste una costante $c(d;p;q)$ dipendente soltanto da d, p, q tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(d;p;q) \, \|\nabla u\|_{1,p,\Omega} .$$
- *Supponiamo $p > d$: esiste una costante $c(d;p)$ dipendente solo da d, p tale che per ogni u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale che*
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(d;p) \, \|u\|_{1,p,\Omega} ;$$
inoltre per ogni x, y in Ω vale che
$$|u(x) - u(y)| \leq c(d;p) \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \, |x-y|^{1-\frac{d}{p}} .$$

Supponiamo che Ω sia limitato.

- *Se $p < d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$
è compatta per ogni q in $[1, p^*)$.
- *Se $p = d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$$
è compatta per ogni q in $[p, +\infty)$.
- *Se $p > d$ l'immersione*
$$i : W_0^{1,p}(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$$
è compatta.

Teorema 6.4.58. *Siano $d \geq 2$ un intero, p in $[1,+\infty)$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato di classe C^1 (vedi 0.0.1) oppure $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Per ogni funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ denotiamo con $\hat{u}$ la sua estensione a 0 a tutto $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti i seguenti fatti:*

1. *u appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$;*
2. *$\hat{u}$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;*
3. *$\mathrm{Tr}(u) = 0$.*

6.4.8 Sulla differenziabilità delle funzioni di Sobolev

Teorema 6.4.59. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto qualsiasi. Supponiamo che $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Sia $u \in Lip_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; denotiamo con $\bar{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la funzione tale che*

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Allora $\bar{u}$ appartiene a $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e inoltre vale che

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq d Lip(\bar{u}),$$

dove $Lip(\bar{u})$ è la costante di Lipschitz di $\bar{u}$. In particolare, vale che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d Lip(u).$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^d$, per ogni $u \in Lip(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e inoltre

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq d Lip(u).$$

Dimostrazione. Esaminiamo il caso in cui $\Omega \neq \mathbb{R}^d$; se $\Omega = \mathbb{R}^d$ i ragionamenti esposti si adattano facilmente e risultano semplificati.

Il fatto che $\bar{u}$ sia in $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ è ovvio. Sia e_i un versore della base canonica di $\mathbb{R}^d$; dato $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, introduciamo la derivata discreta in direzione e_i di passo h, ovvero la funzione $D_{he_i}\bar{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$D_{he_i}\bar{u}(x) := \frac{\bar{u}(x + he_i) - \bar{u}(x)}{h}.$$

Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una qualsiasi funzione test; è immediato verificare che vale la seguente formula di "integrazione per parti discreta":

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D_{he_i}\bar{u}(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}(x) D_{-he_i}\varphi(x)\, dx. \tag{6.2}$$

Dalla lipschitzianità di $\bar{u}$ segue che la famiglia $(D_{he_i}\bar{u})_h$ è uniformemente limitata in $L^\infty(\Omega)$ dalla costante $\mathrm{Lip}(\bar{u})$. Per il teorema di Banach-Alaoglu, a meno di passare a sottosuccessioni, esiste una funzione $v \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tale che $D_{he_i}\bar{u} \overset{*}{\rightharpoonup} v$ in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. In particolare, segue che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) D_{he_i}\bar{u}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v(x)\, dx.$$

Notiamo che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale che $D_{-he_i}\varphi \to \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ uniformemente in $\mathbb{R}^d$; essendo tutti gli integrali su insiemi compatti, deduciamo che

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}(x) D_{-he_i}\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Allora, passando al limite nella relazione (6.2), troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) v(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Dal teorema di Banach-Alaoglu segue anche che

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \operatorname{Lip}(\bar{u});$$

allora deduciamo che v è la derivata debole di $\bar{u}$ di indice i. Segue che $\bar{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)$ e che

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq d\operatorname{Lip}(\bar{u}).$$

Concludiamo dicendo che lo stesso risultato vale sostituendo $\bar{u}$ con u, stimando le norme in Ω; infatti è banale notare che $\operatorname{Lip}(\bar{u}) = \operatorname{Lip}(u)$. □

Teorema 6.4.60. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in (d, +\infty]$ e $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Allora u è differenziabile quasi ovunque e il gradiente debole coincide quasi ovunque con quello classico.*

Dimostrazione. Innanzitutto supponiamo che p sia finito. Sia data una funzione $v \in W^{1,p}(\Omega) \cup C^0(\Omega)$; sia $\overline{r} > 0$ tale che $B(\overline{x}; \overline{r})$ sia relativamente compatta in Ω. Per il teorema di immersione di Morrey a partire dalla palla (vedi 6.4.43), esiste una costante $C > 0$ (dipendente soltanto ad $\overline{x}, \overline{r}, d, p$) tale che per ogni $r \in (0, \overline{r})$ per ogni $x \in B(\overline{x}; r)$ vale che

$$\begin{aligned} |v(x) - v(\overline{x})| &\leq C \left|x - \overline{x}\right|^{1-\frac{d}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(B(\overline{x};r))} \\ &\leq C' \left|x - \overline{x}\right| \left(\fint_{B(\overline{x};r)} |\nabla v|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

per una costante C' dipendente soltanto da $\overline{x}, \overline{r}, d, p$. Fissiamo una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Supponiamo in aggiunta che $\overline{x}$ un punto di Lebesgue per $|\nabla u|^p$. Applicando la disuguaglianza precedente alla funzione

$$v(x) \coloneqq u(x) - < \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} >,$$

si trova che per ogni $r \in (0; \overline{r})$ per ogni $x \in B(\overline{x}; r)$ vale che

$$|u(x) - u(\overline{x}) - < \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} >| \leq C' \left|x - \overline{x}\right| \left(\fint_{B(\overline{x};r)} |\nabla u(x) - \nabla u(\overline{x})|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dividendo per $|x - \overline{x}|$ e passando all'estremo superiore su $B(\overline{x}; r) \setminus \{0\}$, troviamo che

$$\sup_{B(\overline{x};r)\setminus\{0\}} \frac{|u(x) - u(\overline{x}) - < \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} >|}{|x - \overline{x}|} \leq C' \left(\fint_{B(\overline{x};r)} |\nabla u(x) - \nabla u(\overline{x})|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Passando al limite per $r \to 0$, troviamo che

$$\lim_{r\to 0} \sup_{B(\overline{x};r)\setminus\{0\}} \frac{|u(x) - u(\overline{x}) - < \nabla u(\overline{x}), x - \overline{x} >|}{|x - \overline{x}|} = 0,$$

per la scelta di $\overline{x}$ (ricordiamo che la costante C' è indipendente da r). Deduciamo che u è differenziabile in $\overline{x}$ e che il suo gradiente coincide con quello distribuzionale in $\overline{x}$.

Il caso in cui $p = +\infty$ si ottiene notando che una funzione in $W^{1,\infty}(\Omega)$ appartiene a $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ (basta scegliere $p \in (d, +\infty)$). □

Bibliografia

[1] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York, 2010.